باسمه تعالی

آنالیز تابعی مقدماتی ــ تمرین ۱ ــ مهر ۹۹

۱. آیا فضای $(\mathbb{R}, d)$ که $d(x,y) = (x-y)^2$ فضای متریک است؟

۲. اگر (X, d) فضای متریک باشد نشان دهید

آ. $\forall x, y, z \in X \ |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$

ب. $\forall x, y, z, w \in X \ |d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$

۳. بین دو زیرمجموعه ناتهی A, B از فضای متریک (X, d) فاصله $D(A, B)$ را تعریف می‌کنیم

$$D(A,B) = \inf_{x \in A,\ y \in B} d(x,y)$$

آیا $(2^X, D)$ متریک است؟

۴. دنباله‌ای مانند (x_n) از عددهای حقیقی پیدا کنید که $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ اما این دنباله داخل هیچ کدام از l^pها به ازای $1 \leq p < \infty$ نباشد.

۵. اگر (X, d) یک فضای متریک باشد نشان دهید فضای (X, d^*) متریک کران‌دار است که

$$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

۶. $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ فضاهای متریک هستند. روی مجموعه $X_1 \times X_2$ مترهای مختلفی می‌توان تعریف کرد. نشان دهید در هر یک از موارد زیر d_3 روی این مجموعه متر تعریف می‌کند.

آ. $d_3\Big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\Big) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$

ب. $d_3\Big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\Big) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2}$

ج. $d_3\Big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\Big) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$

۷. آیا فضای توابع $C[a,b]$ با نرم $\sup$ جدایی پذیر است؟ فضای توابع کران‌دار $B[a,b]$ با همین نرم چطور؟

۸. (X, d_1) و (X, d_2) فضاهای متریک هستند. می‌دانیم عددهای مثبت a, b وجود دارند که

$$\forall x, y \in X \ a d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b d_1(x,y)$$

نشان دهید دنباله (a_n) در (X, d_1) کوشی است اگر و تنها اگر در (X, d_2) کوشی باشد.

۹. آیا فضای $(\mathbb{N}, d)$ متریک تام است؟ که d در اینجا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \ d(m,n) = |m^{-1} - n^{-1}|.$$

۱۰. نشان دهید زیرفضای $Y \subset C[a,b]$ که

$$Y = \Big\{ f \in C[a,b] \big| f(a) = f(b) \Big\}$$

با نرم القایی $\sup$ تام است.

۱۱. (X,d) فضای متریک است و (X,d^*) فضای متریک تمرین شماره ۵ است. نشان دهید (X,d) تام است اگر و تنها اگر (X,d^*) تام باشد.

۱۲. (α_n) دنباله‌ای از عددهای حقیقی است. نشان دهید اگر سری $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ به ازای هر دنباله $(x_n) \in l^1$ همگرا باشد آن‌گاه $(\alpha_n) \in l^{\infty}$.

۱۳. عددهای $1 \leq p_1, p_2, \cdots, p_k \leq \infty$ که $\sum_{j=1}^{k} p_j^{-1} \leq 1$ مفروضند. دنباله‌های $a_j \in l^{p_j}$ را در نظر بگیرید.

$$a_j = (x_{j,n})_{n=1}^{\infty}$$

دنباله $a^* = (x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ را به ترتیب زیر می‌سازیم

$$x_n^* := x_{1,n} \times x_{2,n} \times \cdots \times x_{k,n}.$$

نشان دهید $a^* \in l^p$ است که $p^{-1} = \sum_{j=1}^{k} p_j^{-1}$ و هم‌چنین

$$||a^*||_{l^p} \leq \prod_{j=1}^{k} ||a_i||_{l^{p_i}}$$

۱۴. $1 \leq p \leq q \leq \infty$ مفروضند و $a = (x_n)$ دنباله‌ای در $l^p \cap l^q$ می‌باشد. نشان دهید برای هر $p \leq r \leq q$ ، $a \in l^r$. به علاوه نشان دهید اگر $r^{-1} = \alpha p^{-1} + (1-\alpha) q^{-1}$ که $\alpha \in [0,1]$ آن‌گاه

$$||a||_{l^r} \leq ||a||_{l^p}^{\alpha} . ||a||_{l^q}^{1-\alpha}$$

۱۵. $1 \leq p, q \leq \infty$ مزدوج هستند. یعنی $p^{-1} + q^{-1} = 1$. اگر $b = (\beta_n) \in l^q$ نشان دهید

$$||b||_{l^q} = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \right| \ : \ ||(\alpha_n)||_{l^p} \leq 1 \right\}$$

۱۶. $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ دنباله ۲ بعدی از عددهای حقیقی و نامنفی می‌باشد. تعریف می کنیم

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} & \text{اگر همگرا باشد} \\ 0 & \text{اگر واگرا شد} \end{cases}$$

و هم‌چنین

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad y_k := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

نشان دهید

$$||(x_k)||_{l^p} \leq ||(y_k)||_{l^1}$$

۱۷. $0 < \alpha < 1$ عددی حقیقی است. فضای l^{α} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$l^{\alpha} := \left\{ a = (x_n) \middle| x_n \in \mathbb{R}, \ (x_n^{\alpha}) \in l^1 \right\}$$

و هم‌چنین تابع $[.]_{\alpha}$ را تعریف می‌کنیم

$$[a]_{\alpha} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n|^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

آ. نشان دهید l^{α} فضای برداری است اما $[\cdot]_{\alpha}$ نرم نیست. به طور خاص نشان دهید اگر $a, b \in l^{\alpha}$ و $a, b \geq 0$ (تمام اعضای دنباله نامنفی باشند) آن‌گاه

$$[a+b]_{\alpha} \geq [a]_{\alpha} + [b]_{\alpha}$$

ب. برای هر $a, b \in l^{\alpha}$ نشان دهید

$$[a+b]_{\alpha}^{\alpha} \leq [a]_{\alpha}^{\alpha} + [b]_{\alpha}^{\alpha}$$