به نام او

امتحان پایان ترم درس آنالیز تابعی مقدماتی وقت امتحان: ۳ ساعت ۹۹/۱۱/۸

سؤال اول: یکی از دو گزاره زیر را اثبات کنید.

۱.۱ـ هر فضای هیلبرت بازتابی است.

۱.۲ـ فضای ℓ^p برای $1 < p < \infty$ بازتابی است.

سؤال دوم: به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید.

۲.۱ـ نشان دهید چگونه از قضیه نگاشت باز نتیجه می‌شود که یک نگاشت خطی کران‌دار دوسویی $T : X \to Y$ بین فضاهای باناخ، وارون پیوسته دارد. با یک مثال نشان دهید شرط باناخ بودن X ضروری است.

۲.۲ـ نشان دهید چگونه از قضیه نگاشت باز نتیجه می‌شود که یک نگاشت خطی کران‌دار دوسویی $T : X \to Y$ بین فضاهای باناخ، وارون پیوسته دارد. با یک مثال نشان دهید شرط باناخ بودن Y ضروری است.

سؤال سوم:

۳ـ فضای $X = C[0, 1]$ را با نرم سوپریمم در نظر بگیرید. عملگر $T : X \to X$ با ضابطه $Tu(t) := \int_0^t u(s)\, ds$ تعریف می‌شود.

الف‌ـ نشان دهید T فشرده است.

ب‌ـ نشان دهید

$$T^n u(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} u(s)\, ds,$$

و به کمک آن ثابت کنید $\|T^n\| \leq \frac{1}{n!}$.

پ‌ـ ثابت کنید $\sigma(T) = \{0\}$.

سؤال چهارم:

۴ـ $T : X \to X$ فشرده است و $\lambda \neq 0$ مقدار ثابت است. نشان دهید ثابت $c > 0$ تنها وابسته به T و λ وجود دارد که برای هر $y = (T - \lambda I)x$ بردار $\tilde{x}$ وجود دارد که

$$(T - \lambda I)\tilde{x} = y, \qquad \|\tilde{x}\|_X \leq c\|y\|_X.$$

سؤال پنجم: به یکی از دو سؤال زیر پاسخ دهید.

۱.۵ــ H فضای هیلبرت و Y زیرفضای بسته آن است. اگر $T : H \to H$ یک عملگر خطی کران‌دار باشد، ثابت کنید $T(Y) \subseteq Y$ اگر و تنها اگر $T^*(Y^\perp) \subseteq Y^\perp$.

۲.۵ــ H فضای هیلبرت و Y زیرفضای بسته آن است. اگر $T : H \to H$ یک عملگر خطی کران‌دار باشد و P عملگر تصویر روی زیرفضای Y باشد، ثابت کنید $TP = PT$ اگر و تنها اگر $T(Y) \subseteq Y$ و $T(Y^\perp) \subseteq Y^\perp$.

سؤال ششم: به یکی از سه سؤال زیر پاسخ دهید.

۱.۶ــ اگر P_1 و P_2 دو عملگر تصویری باشند. نشان دهید $P = P_1P_2$ تصویری است اگر و تنها اگر $P_1P_2 = P_2P_1$. در این حالت ImP را برحسب ImP_1 و ImP_2 به دست آورید.

۲.۶ــ اگر P_1 و P_2 دو عملگر تصویری باشند. نشان دهید $P = P_1 + P_2$ تصویری است اگر و تنها اگر $ImP_1 \perp ImP_2$. در این حالت ImP را برحسب ImP_1 و ImP_2 به دست آورید.

۳.۶ــ اگر P_1 و P_2 دو عملگر تصویری باشند. نشان دهید $P = P_2 - P_1$ تصویری است اگر و تنها اگر $ImP_1 \subseteq ImP_2$. در این حالت ImP را برحسب ImP_1 و ImP_2 به دست آورید.

موفق باشید.