فصل ۱

مقدماتی از آنالیز

در این فصل به مرور بعضی مفاهیم مقدماتی نظیر فضای دوگان، همگرایی ضعیف و خواص فضاهای $\mathcal{L}^p(\Omega)$ می‌پردازیم. البته تنها به مطالبی که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، اکتفا کرده‌ایم.

۱–۱ فضای دوگان

فضای برداری (حقیقی یا مختلط) X همراه با نرم $\|\cdot\|_X$، فضای باناخ گفته می‌شود هرگاه تام[1] باشد، یعنی هر دنباله کوشی دارای حد یکتایی در X باشد. فضای دوگان X را که با X' نشان می‌دهیم، شامل همه تابعک‌های خطی پیوسته از X به $\mathbb{R}$ (اگر X فضای برداری حقیقی باشد) یا به $\mathbb{C}$ (در صورتی که X فضای برداری مختلط باشد) است. مقدار تابعک $f \in X'$ در بردار $u \in X$ را به صورت

$$\langle f, u \rangle = f(u)$$

نمایش می‌دهیم. پیوستگی تابعک خطی f روی X معادل این است که مقدار

$$\|f\|_{X'} = \sup_{u \neq 0} \frac{\langle f, u \rangle}{\|u\|_X} \qquad (۱ ـ ۱)$$

متناهی باشد. این مقدار یک نرم برای فضای دوگان X' ارایه می‌کند. با این نرم، X' یک فضای باناخ خواهد بود، حتی اگر فضای برداری X، باناخ نباشد. واضح است که X'

---

[1] complete

ناتهی است، زیرا شامل حداقل تابعک خطی صفر است. اما برای این که نشان دهیم اعضای دیگری به غیر از صفر نیز در آن قرار دارد، قضیه زیر را نیاز داریم.

قضیه ۱ ـ ۱. **(هان ـ باناخ)** *اگر W زیرفضای برداری فضای نرم‌دار X و $f : W \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابعک خطی روی W باشد که با توپولوژی القایی از X پیوسته است، یعنی مقدار مثبت C وجود دارد که*

$$|\langle f, u\rangle| \leq C||u||_X \qquad \text{برای هر } u \in W$$

آنگاه f را می‌توان به یک تابعک خطی در X' توسعه داد، به طوری که $||f||_{X'} = ||f||_{W'}$.

برای اثبات قضیه هان ـ باناخ به لم زرن یا دیگر صورتهای معادل اصل انتخاب احتیاج است. در اینجا از اثبات صرف نظر کرده و به بیان چند نتیجه مهم از این قضیه بسنده می‌کنیم. اگر $W \subseteq X$ باشد، فاصله بردار $u \in X$ تا W را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$dist(u, W) := \inf_{w \in W} ||u - w||_X$$

نتیجه ۱ ـ ۲. اگر W زیرفضای X باشد و $u \in X$ که $dist(u, W) > 0$، آنگاه تابعک خطی $f \in X'$ وجود دارد که

$$\langle f, u\rangle = dist(u, W), \qquad ||f||_{X'} = 1,$$
$$\langle f, w\rangle = 0 \qquad \text{برای هر } w \in W$$

برهان. قرار دهید $d = dist(u, W)$ و $W_1 = W \oplus \operatorname{Span}\{u\}$. تابعک خطی $f \in W_1'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle f, w + \lambda u\rangle = \lambda d, \qquad w \in W, \lambda \in \mathbb{C}$$

در این صورت

$$|\langle f, w + \lambda u\rangle| = |\lambda| d \leq |\lambda| \, ||u - (-\frac{w}{\lambda})||_X = ||w + \lambda u||_X$$

بنابراین $||f||_{W_1'} \leq 1$. از طرفی برای هر $\varepsilon > 0$، بردار $w \in W$ وجود دارد که $d \leq ||u - w||_X < d + \varepsilon$، درنتیجه

$$d = |\langle f, w - u\rangle| \leq ||f||_{W_1'} ||w - u||_X < ||f||_{W_1'}(d + \varepsilon)$$

بنابراین $||f||_{W'_1} = ۱$ و به کمک قضیه هان ـ باناخ تابعک خطی f را به X می‌توان توسعه داد. ■

نتیجه۱ ـ ۳. اگر $۰ \neq u \in X$، آنگاه تابعک $f \in X'$ وجود دارد که

$$\langle f, u\rangle = ||u||_X, \qquad ||f||_{X'} = ۱$$

برهان. قرار دهید $W = \{۰\}$، در این صورت $dist(u, W) = ||u||_X$. ■

برای هر زیرمجموعه ناتهی $A \subset X$، زیرفضای $A^\perp \subset X'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^\perp := \left\{f \in X' | \langle f, u\rangle = ۰,\ \text{برای هر } u \in A\right\}$$

هم‌چنین اگر $E \subset X'$ باشد، با همان نماد قبل، $E^\perp \subset X$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$E^\perp := \left\{x \in X | \langle f, x\rangle = ۰,\ \text{برای هر } f \in E\right\}$$

با این تعریف می‌توان گزاره زیر را از قضیه هان ـ باناخ نتیجه گرفت.

گزاره۱ ـ ۴. *اگر A زیرمجموعه X باشد، آنگاه* $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Span} A}$.

برهان. واضح است که $\operatorname{Span} A \subseteq (A^\perp)^\perp$ و چون $(A^\perp)^\perp$ بسته است، پس $\overline{\operatorname{Span} A} \subseteq (A^\perp)^\perp$. برای رابطه عکس قرار دهید $W = \operatorname{Span} A$، و اگر $u \in (A^\perp)^\perp \setminus \overline{W}$ وجود داشته باشد، آنگاه $dist(u, W) > ۰$ و با توجه به نتیجه ۱ ـ ۲ به تناقض می‌رسیم. ■

نتیجه۱ ـ ۵. اگر A زیرمجموعه X باشد، آنگاه $\operatorname{Span} A$ در X چگال است اگر و تنها اگر $A^\perp = \{۰\}$.

اگر $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی کران‌دار باشد، عملگر الحاقی آن را نگاشت $T^* : Y' \longrightarrow X'$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle T^* f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle, \qquad \text{برای هر } f \in Y',\ x \in X$$

به راحتی می‌توان دید که $T^* f \in X'$ و با این توصیف T^* پیوسته است و $||T^*|| = ||T||$.

گزاره۱ ـ ٦. *اگر $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر پیوسته باشد، در این صورت*

الف) $\ker T = (ImT^*)^\perp$.

ب) $\ker T^* = (ImT)^\perp$.

اکنون فرض کنید $X'' = (X')'$ فضای دوگان X' باشد، در این صورت نشاندن طبیعی $\iota : X \longrightarrow X''$ به صورت زیر می‌تواند تعریف شود. برای هر $u \in X$ تابعک خطی ιu روی X' است با ضابطه:

$$\langle \iota u, f\rangle := \langle f, u\rangle, \qquad \text{برای هر } f \in X'$$

این نگاشت را نگاشت دوگانی می‌نامیم و به کمک نتیجه ۱ ـ ۳ می‌توان دید که $||\iota u||_{X''} = ||u||_X$. بنابراین ι یک یکریختی ایزومتری از X به زیرفضای $\iota(X)$ از X'' است. با یکی کردن فضاهای X و $\iota(X)$ می‌توانیم X را به عنوان زیرفضایی از X'' در نظر بگیریم. فضای برداری X را بازتابی[۲] گوییم، هرگاه نشاندن ι پوشا باشد، یعنی $\iota(X) = X''$. نکته قابل توجه این است که در تعریف فضاهای بازتابی نقش نگاشت ι اساسی است. مثالی وجود دارد از فضای غیر بازتابی که X و X'' ایزومتر هستند.

تذکر۱ ـ ۷. اگر X و Y دو فضای باناخ باشند که $Y \subseteq X$ و این نشاندن پیوسته باشد، یعنی مقدار $C > \circ$ وجود داشته باشد که

$$||y||_X \leq C||y||_Y, \qquad \text{برای هر } y \in Y$$

یا به طور معادل نگاشت شمول $\imath : Y \hookrightarrow X$ پیوسته باشد. درضمن اگر Y زیرمجموعه چگال X باشد، آنگاه می‌توان دید که نشاندن $X' \subseteq Y'$ برقرار است. زیرا هر عضو $f \in X'$ یک تابعک خطی و پیوسته $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ است که تحدید آن به Y متعلق به Y' است. دقت کنید که تحدید f نسبت به توپولوژی Y نیز پیوسته است. لذا نگاشت $T : X' \longrightarrow Y'$ با ضابطه $Tf = f|_Y$ پیوسته می‌شود، زیرا

$$||Tf||_{Y'} = ||f|_Y||_{Y^*} = \sup_{u\neq\circ, u\in Y} \frac{\langle f, u\rangle}{||u||_Y}$$

$$\leq C \sup_{u\neq\circ, u\in X} \frac{\langle f, u\rangle}{||u||_X} = C||f||_{X'}$$

یک به یک بودن عملگر T نشان می‌دهد که شمول $X' \subseteq Y'$ معنا دارد. اگر $Tf = Tg$، آنگاه $f|_Y = g|_Y$ و چون Y زیرفضای چگال است و f و g نسبت به توپولوژی X پیوسته هستند، بنابراین $f = g$ در X'، (نتیجه ۱ ـ ۵). توجه کنید، لزومی ندارد که عملگر T پوشا باشد. زیرا هر عضو Y' نسبت به توپولوژی Y پیوسته است و ممکن است نسبت به

---

[۲] reflexive

توپولوژی القایی Y از X پیوسته نباشد.

۱ـ۲ توپولوژی ضعیف

همه اعضای X'، نسبت به توپولوژی القایی از نرم $\|\cdot\|_X$ پیوسته هستند. در واقع این توپولوژی برای این منظور بیش از حد قوی است. لذا ضعیف‌ترین توپولوژی روی X که همه اعضای X' نسبت به آن پیوسته باشند را توپولوژی ضعیف X می‌نامند. در این توپولوژی دنباله $\{x_n\}$ همگرا به $x_* \in X$ است، (که آن را همگرای ضعیف گوییم) هرگاه برای هر $f \in X'$ داشته باشیم:

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x_* \rangle$$

در این صورت همگرایی را با $x_n \rightharpoonup x_*$ نشان می‌دهیم. وقتی از همگرایی با توپولوژی معمولی X صحبت می‌کنیم، منظور همگرایی در نرم $\|\cdot\|_X$ است و برای پیش‌گیری از اشتباه آن را همگرای قوی می‌نامیم. واضح است که همگرایی قوی، همگرایی ضعیف را نتیجه می‌دهد. زیرا اگر $x_n \to x_*$، آنگاه برای هر $f \in X'$ داریم:

$$\big|\langle f, x_n - x_* \rangle\big| \leq \|f\|_{X'} \|x_n - x_*\|_X \longrightarrow ۰$$

نکته قابل توجه این که عکس این مطلب در فضاهای با بعد نامتناهی صحیح نیست. به عنوان مثال کره واحد $S = \{x \in X : \|x\| = ۱\}$ در توپولوژی ضعیف فضای با بعد نامتناهی X، هیچ‌گاه بسته نیست. هم‌چنین گوی باز $B = \{x \in X : \|x\| < ۱\}$ در توپولوژی ضعیف باز نیست. [Brezis]

قضیه ۱ ـ ۸. *توپولوژی قوی X با توپولوژی ضعیف X معادل است اگر و تنها اگر* $\dim X < \infty$.

تذکر ۱ ـ ۹. هرگاه بعد X نامتناهی باشد، توپولوژی ضعیف آن متریک‌پذیر نیست. یعنی متری وجود ندارد که توپولوژی ضعیف را القا کند.

یکی از قضایای مهم و کاربردی در توپولوژی ضعیف، خاصیت فشردگی دنباله‌ای گوی واحد یک فضای بازتابی در توپولوژی ضعیف است. (توجه کنید که چون توپولوژی ضعیف متریک‌پذیر نیست، لزوماً فشردگی و فشردگی دنباله‌ای هم‌ارز نیستند.) از نتایج

بسیار مهم این قضیه، این که هر دنباله کران‌دار در فضای بازتابی، زیردنباله‌ای دارد که به طور ضعیف همگرا است.

قضیه۱ ـ ۱۰. (کاکوتانی) *فضای باناخ X، بازتابی است اگر و تنها اگر گوی واحد $B = \{x \in X : ||x|| \leq ۱\}$ در توپولوژی ضعیف X فشرده دنباله‌ای باشد.*

این بخش را با اثبات گزاره‌ای مبنی بر کران‌داری هر دنباله همگرای ضعیف به پایان می‌رسانیم.

گزاره۱ ـ ۱۱. *اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد که $x_n \rightharpoonup x$ (به طور ضعیف)، در این صورت*

الف) $||x_n||_X$ *کران‌دار است و* $||x||_X \leq \liminf ||x_n||_X$.

ب) *اگر $f_n \to f$ به طور قوی در X'، آنگاه* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

برهان. برای اثبات از قضیه باناخ ــ اشتینهاوس یا همان اصل کرانداری یکنواخت استفاده می‌کنیم. (اگر $\{T_i\}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی پیوسته باشد که $\sup_i ||T_i x|| < \infty$ برای هر x، آنگاه $\sup_i ||T_i|| < \infty$.) هر x_n یک تابعک خطی پیوسته روی X' تعریف می‌کند که برای هر $f \in X'$ مقدار $T_n f = \langle f, x_n\rangle$ را اتخاذ می‌کند. چون $\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$، پس $\{|T_n f|\}$ کراندار است. درنتیجه $\{||T_n||\}$ نیز کراندار است، اما $||T_n|| = ||x_n||_X$، (نتیجه ۱ ـ ۳). از طرفی

$$\left|\langle f, x_n\rangle\right| \leq ||f||_{X'} ||x_n||_X$$

و با حد گرفتن نتیجه می‌شود که

$$\left|\langle f, x\rangle\right| \leq ||f||_{X'} \liminf ||x_n||_X$$

بنابراین (تمرین ۲)

$$||x||_X = \sup_{||f||_{X'} \leq ۱} \left|\langle f, x\rangle\right| \leq \liminf ||x_n||_X.$$

درستی گزاره (ب) به راحتی از قسمت (الف) نتیجه خواهد شد. ■

۱—۳ فضای هیلبرت

فرض کنید H یک فضای برداری همراه با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)_H$ باشد. در این صورت

$$||u||_H = \sqrt{(u,u)_H}$$

یک نرم روی H القا می‌کند. زمانی که H با این نرم یک فضای تام باشد، آن را فضای هیلبرت می‌نامیم. توجه کنید که در این نوشتار، ضرب داخلی فضای برداری مختلط نسبت به مؤلفه اول خطی ـ مزدوج و نسبت به مؤلفه دوم خطی است، یعنی $(u,\lambda v) = \lambda(u,v)$ و $(v,u) = \overline{(u,v)}$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$.

قضیه۱ ـ ۱۲. *اگر W زیرمجموعه محدب، بسته و ناتهی فضای هیلبرت H باشد، برای هر بردار $u \in H$، بردار منحصر به فرد $w \in W$ وجود دارد که*

$$||u-w||_H = dist(u,W) = \inf_{v\in W} ||u-v||_H$$

به علاوه اگر W زیرفضای H باشد، آنگاه $u - w \perp W$.

قضیه فوق نتیجه می‌دهد که اگر W زیرفضای بسته H باشد، می‌توانیم نگاشت تصویر $P : H \longrightarrow W$ را با ضابطه $Pu = w$ تعریف کنیم. نگاشت تصویر P یک عملگر خطی است که دارای خواص زیر است:

$$P^2 = P, \quad ||P||_{\mathcal{L}(H,H)} = 1, \quad ImP = W, \quad \ker P = W^\perp$$

که $W^\perp = \{u \in H : u \perp W\}$ زیرفضای بسته H است و آن را مؤلفه عمودی W می‌نامیم. هم‌چنین داریم

$$H = W \oplus W^\perp$$

یکی از مهمترین خواص فضای هیلبرت، ارتباط بین اعضای فضای دوگان H' و اعضای H است. اگر $u \in H$ عضو دلخواهی باشد، به کمک ضرب داخلی تابعک خطی کران‌دار $\iota_1 u \in H'$ تعریف می‌شود.

$$\langle \iota_1 u, v\rangle = (v,u)_H, \qquad \text{برای هر } v \in H$$

به کمک نامساوی کوشی ـ شوارتز نتیجه می‌شود که $||\iota_1 u||_{H'} = ||u||_H$. بنابراین $\iota_1 : H \longrightarrow H'$ یک نگاشت خطی ـ مزدوج[1] و ایزومتری است. قضیه زیر نشان می‌دهد،

---

[1] یعنی $\iota_1(\lambda u) = \bar{\lambda}\iota_1 u$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$.

این ایزومتری پوشا و در نتیجه وارون‌پذیر نیز است.

قضیه ۱ ـ ۱۳. **(نمایش ریس)** *فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. برای هر $f \in H'$، عضو منحصر به فرد $u \in H$ وجود دارد که*

$$\langle f, v\rangle = (v, u)_H \qquad \text{برای هر } v \in H$$

به علاوه $||f||_{H'} = ||u||_H$.

برهان. قرار دهید $W = \ker f$. اگر $W = H$، آنگاه $f = 0$ و بنابراین $u = 0$. اگر $W \neq H$، بردار ناصفر $u_0 \in W^\perp$ را انتخاب کنید و قرار دهید $\alpha = \dfrac{\langle f, u_0\rangle}{||u_0||_H^2}$. در این صورت تابعک خطی $v \longmapsto \langle f, v\rangle - \alpha(v, u_0)_H$ روی H برابر صفر است. (توجه کنید که $W^\perp$ یک بعدی است) بنابراین $u = \bar{\alpha} u_0$ جواب مورد نظر است. ■

قضیه نمایش ریس نشان می‌دهد که می‌توان H' را به کمک ضرب داخلی زیر به یک فضای هیلبرت تبدیل کرد.

$$(f, g)_{H'} = (\iota_1^{-1} g, \iota_1^{-1} f)_H$$

در این صورت نگاشت ایزومتری و وارون‌پذیر $\iota_2 : H' \longrightarrow H''$ با ضابطه زیر پیدا می‌شود که خطی ـ مزدوج است.

$$\langle \iota_2 f, g\rangle = (g, f)_{H'} \qquad \text{برای هر } g \in H'$$

بدین ترتیب نگاشت $\iota_2\iota_1 : H \longrightarrow H''$ که خطی، وارون‌پذیر و ایزومتری است، همان نگاشت دوگانی است.

$$\langle \iota_2\iota_1 u, f\rangle = (f, \iota_1 u)_{H'} = (u, \iota_1^{-1} f)_H = \langle f, u\rangle$$

درنتیجه گزاره‌های زیر برای فضاهای هیلبرت برقرارند:

قضیه ۱ ـ ۱۴. *هر فضای هیلبرت، بازتابی است.*

نتیجه ۱ ـ ۱۵. هر دنباله کران‌دار در فضای هیلبرت H، یک زیردنباله همگرای ضعیف دارد.

تذکر ۱ ـ ۱۶. به کمک نگاشت ι_1 می‌توان فضاهای H و H' را یکی کرد. البته باید به خاطر داشته باشیم که دو فضای هیلبرت را که یکی در داخل دیگری قرار داشته باشد، نمی‌توان به طور همزمان با دوگان‌هایشان یکی کرد. اگر H_0 و H_1 دو فضای هیلبرت همراه با نرمهای $||\cdot||_0$ و $||\cdot||_1$ باشند که نشاندن $H_1 \subseteq H_0$ پیوسته و چگال است. با توجه

به نکته ۱ ـ ۷ نشاندن $H'_1 \subseteq H'_0$ پیوسته است و درنتیجه نمی‌توان همزمان H_0 و H'_0 و هم‌چنین H_1 و H'_1 را یکی کرد. در واقع نگاشت $\iota_1 : H_0 \longrightarrow H'_0$ که H_0 را با H'_0 یکی می‌کند، نمی‌تواند به طور پوشا H_1 را به H'_1 ببرد. بنابراین در این حالت تنها می‌توان نشاندن‌های پیوسته و چگال

$$H_1 \subseteq H_0 = H'_0 \subseteq H'_1$$

را بیان کرد. به عنوان مثال به دو فضای زیر نگاه کنید:

$H_0 = \{(x_n) | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ با ضرب داخلی $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n$

$H_1 = \{(x_n) | \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < \infty\}$ با ضرب داخلی $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \bar{x}_n y_n$

۱ـ۴ فضاهای $\mathcal{L}^p$

برای دامنه باز Ω در $\mathbb{R}^n$ و برای مقدار $1 \leq p < \infty$، تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \Big| \ f \text{ اندازه‌پذیر است و } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \Big\}$$

که اندازه مورد نظر همان اندازه لبگ است. هم‌چنین برای هر $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ قرار دهید:

$$||f||_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

و برای $p = \infty$

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \Big| \ f \text{ اندازه‌پذیر است و ثابت } K \text{ وجود دارد که } |f(x)| \leq K \text{ تقریباً همه جا در } \Omega \Big\}$$

$$||f||_\infty := \inf \{ K > 0 \,\big|\, |f(x)| \leq K \quad a.e. \}$$

توجه کنید که اگر دو تابع تقریباً همه جا در Ω برابر باشند، این دو در فضای $\mathcal{L}^p(\Omega)$ یکی هستند. بدین ترتیب برای $1 \leq p \leq \infty$، فضای $\mathcal{L}^p(\Omega)$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است. قضایای زیر نشان می‌دهد که $||\cdot||$ یک نرم برای این فضا است.

قضیه ۱ ـ ۱۷. (نامساوی هولدر) *اگر $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ و $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، آنگاه $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ است و*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

برهان. از نامساوی یونگ $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ و قرار دادن $a = \frac{|f(x)|}{||f||_p}$ و $b = \frac{|g(x)|}{||g||_q}$ نتیجه می‌شود. ■

قضیه ۱ ـ ۱۸. **(نامساوی مینکوفسکی)** *اگر $1 \leq p \leq \infty$ و $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ آنگاه*

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

برهان. از رابطه $\int_\Omega |f+g|^p dx \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)dx$ و به کمک نامساوی هولدر نتیجه می‌شود. ■

صورتهای دیگری از تعمیم نامساوی هولدر مطرح می‌شود، دو قضیه زیر نمونه‌هایی از آن هستند.

قضیه ۱ ـ ۱۹. *اگر $f_i \in \mathcal{L}^{p_i}(\Omega)$ باشد، برای $1 \leq i \leq k$ و $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k}$. در این صورت $f = f_1 \cdots f_k$ متعلق به $\mathcal{L}^p(\Omega)$ است و*

$$||f||_p \leq ||f_1||_{p_1} \cdots ||f_k||_{p_k}$$

قضیه ۱ ـ ۲۰. **(نامساوی درون‌یابی)** *اگر $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \cap \mathcal{L}^q(\Omega)$ که $1 \leq p \leq q \leq \infty$. در این صورت $f \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ برای هر $p \leq r \leq q$ و*

$$||f||_r \leq ||f||_p^\alpha ||f||_q^{1-\alpha}$$

که $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ و $0 \leq \alpha \leq 1$.

در ادامه در قضیه زیر نشان می‌دهیم که $\mathcal{L}^p(\Omega)$ یک فضای باناخ است.

قضیه ۱ ـ ۲۱. *برای هر $1 \leq p \leq \infty$، $\mathcal{L}^p(\Omega)$ یک فضای باناخ است.*

برهان. فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و $\{f_n\}$ یک دنباله کوشی در $\mathcal{L}^p(\Omega)$ باشد. زیردنباله $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p < \frac{1}{2^k} \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

اکنون قرار دهید

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

در این صورت

$$||g_m||_p \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} < 1$$

از طرفی دنباله $\{g_m(x)\}$، صعودی است و بنابر قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود که تقریباً همه جا روی Ω به تابع اندازه‌پذیری مانند g همگرا است که $||g||_p \leq 1$. از طرف دیگر برای تقریباً همه مقادیر $x \in \Omega$، دنباله $\{f_{n_k}(x)\}$ کوشی است، زیرا

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| + \cdots + \\ |f_{n_{l+2}}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| = g_k(x) - g_l(x) \leq g(x) - g_l(x)$$

بنابراین تابع $f(x)$ وجود دارد که

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \qquad a.e.$$

هم‌چنین داریم

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x)$$

پس $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$، و تنها باید نشان دهیم $||f_n - f||_p \longrightarrow 0$. به همین منظور قرار دهید:

$$\int_\Omega |f(x) - f_n(x)|^p dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p dx \\ \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p dx$$

چون دنباله $\{f_n\}$ در $\mathcal{L}^p(\Omega)$ کوشی است، برای هر $\varepsilon > 0$، مقدار N وجود دارد که اگر $k, n > N$ باشد:

$$||f_{n_k} - f_n||_p < \varepsilon$$

بنابراین برای $n > N$ داریم:

$$||f - f_n||_p < \varepsilon.$$

برای حالت $p = \infty$، برای هر k عدد N_k وجود دارد که برای $m, n \geq N_k$

$$||f_m - f_n||_\infty \leq \frac{1}{k}$$

در این صورت مجموعه اندازه صفر E_k پیدا می‌شود که خارج آن مجموعه

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

$E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$ اندازه صفر است و برای هر $x \in \Omega \setminus E$، $\{f_n(x)\}$ کوشی است و درنتیجه به مقدار $f(x)$ همگرا است. با میل دادن $m \to \infty$ در رابطه بالا، برای $n \geq N_k$ داریم:

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

بنابراین $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ و $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$. ■

از روند اثبات قضیه فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

نتیجه۱ ـ ۲۲. برای هر $1 \leq p \leq \infty$، هر دنباله کوشی در $\mathcal{L}^p(\Omega)$ زیردنباله‌ای دارد که به طور نقطه‌ای تقریباً همه جا همگرا است.

تذکر۱ ـ ۲۳. فضای $\mathcal{L}^2(\Omega)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است:

$$(u, v) := \int_\Omega \overline{u(x)} v(x) dx$$

قضیه زیر که به نمایش ریس معروف است در تعیین دوگان فضاهای $\mathcal{L}^p$ نقش اساسی دارد.

قضیه۱ ـ ۲۴. *اگر $1 \leq p < \infty$ و $\phi \in (\mathcal{L}^p)'$، در این صورت تابع $u \in \mathcal{L}^q$ به طور یکتا پیدا می‌شود که*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) dx \qquad \text{برای هر } f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$$

به علاوه داریم

$$\|\phi\|_{(\mathcal{L}^p)'} = \|u\|_q$$

که در آن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

بنابر قضیه فوق نگاشت $\iota_p : \mathcal{L}^q \longrightarrow (\mathcal{L}^p)'$ با ضابطه $\langle \iota_p u, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x)$ یک ایزومتری است. بنابراین برای $1 \leq p < \infty$، $(\mathcal{L}^p)' \cong \mathcal{L}^q$. برای $p = \infty$ این مطلب صحیح نیست. برای پیدا کردن مثال نقض، ناحیه باز Ω را در نظر بگیرید که شامل مبدأ باشد. $C^\circ(\Omega)$ با نرم $\|\cdot\|_\infty$ زیرفضای $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ است. تابعک $\delta : C^\circ(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\langle \delta, u \rangle = u(0)$ به وسیله قضیه هان ـ باناخ به $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ توسعه می‌یابد. اما این تابعک نمایشی در $\mathcal{L}^1(\Omega)$ ندارد. (اثبات این مطلب در فصل بعد در مثال ۲ ـ ۲ می‌آید.)

نتیجه۱ ـ ۲۵. برای $1 < p < \infty$، فضای $\mathcal{L}^p$ بازتابی است.

برهان. با توجه به مطلب فوق نگاشت $(\iota_p^*)^{-1} \circ \iota_q : \mathcal{L}^p \longrightarrow (\mathcal{L}^p)''$ یک ایزومتری یکریختی است. از طرفی برای هر $\phi \in (\mathcal{L}^p)'$ و $u \in \mathcal{L}^p$ داریم:

$$\langle ((\iota_p^*)^{-1}\circ\iota_q)(u),\phi\rangle = \langle \iota_q u, \iota_p^{-1}\phi\rangle = \int_\Omega u(x)(\iota_p^{-1}\phi)(x)dx = \langle \phi, u\rangle$$

بنابراین نگاشت فوق همان نگاشت دوگانی است. ■

فرض کنید f و g توابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^n$ باشند، در این صورت $f(x-\cdot)g(\cdot)$ تابعی اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ خواهد بود. اگر مقدار انتگرال زیر وجود داشته باشد، آن را پیچش دو تابع f و g تعریف می‌کنیم.

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

اگر $f,g\in\mathcal{L}^1$ آنگاه

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)g(y)\big|dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|dx\big)dy\\ &= ||g||_1||f||_1\end{aligned}$$

بنابراین از قضیه فوبینی نتیجه می‌شود که تابع $y\longmapsto f(x-y)g(y)$ برای تقریباً هر x انتگرال‌پذیر است، درنتیجه پیچش $(f*g)(x)$ تقریباً برای هر x تعریف می‌شود. هم‌چنین از رابطه بالا می‌توان دید که $f*g\in\mathcal{L}^1$ و $||f*g||_1\le||f||_1||g||_1$.

قضیه ۱ ـ ۲۶. (نامساوی یونگ) *فرض کنید $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ و $g\in\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ که $1\le p,q\le\infty$ و $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\ge 0$. در این صورت $f*g$ تعریف شده و متعلق به $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)$ است. به علاوه $||f*g||_r\le||f||_p||g||_q$.*

برهان. اگر $r=\infty$، در این صورت بنابر نامساوی هولدر نتیجه می‌شود

$$\big|(f*g)(x)\big|\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|dy\le||f||_p||g||_q$$

بنابراین $f*g$ همه جا تعریف شده است و

$$||f*g||_\infty\le||f||_p||g||_q$$

در حالتی که $r<\infty$ باشد، از نامساوی هولدر سه‌تایی استفاده می‌کنیم. با توجه به روابط $h_1(y)=|f(x-y)|^{\frac{p}{r}}|g(y)|^{\frac{q}{r}}\in\mathcal{L}^r$، $h_2(y)=|f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}}\in\mathcal{L}^{\frac{q}{q-1}}$ و $h_3(y)=|g(y)|^{1-\frac{q}{r}}\in\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}$ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\big|(f*g)(x)\big| &\le \int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|dy = \int_{\mathbb{R}^n}|h_1(y)h_2(y)h_3(y)|dy\\ &\le ||h_1||_r||h_2||_{\frac{q}{q-1}}||h_3||_{\frac{p}{p-1}}\\ &= \big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\big)^{\frac{1}{r}}\big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p dy\big)^{\frac{q-1}{q}}\big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^q dy\big)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

$$= \left((|f|^p * |g|^q)(x)\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_p^{\frac{p(q-1)}{q}} \|g\|_q^{\frac{q(p-1)}{p}}$$

از طرفی $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{L}^1$ و بنابراین $|f|^p * |g|^q \in \mathcal{L}^1$. درنتیجه

$$\|f * g\|_r \leq \left\| |f|^p * |g|^q \right\|_1^{\frac{1}{r}} \|f\|_p^{p-\frac{p}{q}} \|g\|_q^{q-\frac{q}{p}}$$

$$\leq \|f\|_p^{\frac{p}{r}} \|g\|_q^{\frac{q}{r}} \|f\|_p^{p-\frac{p}{q}} \|g\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|f\|_p \|g\|_q$$

■

تذکر۱ ـ ۲۷. در حالت $r = \infty$، $f * g$ یک تابع پیوسته و کران‌دار است. پیوستگی آن از خاصیت پیوستگی نرم $\|\cdot\|_p$، که در ادامه می‌آید، نتیجه می‌شود.

قضیه۱ ـ ۲۸. **(پیوستگی نرم $\|\cdot\|_p$)** *برای* $1 \leq p < \infty$ *و هر تابع* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *داریم:*

$$\lim_{h \to 0} \|f_h - f\|_p = 0$$

که $f_h(x) = f(x+h)$.

اکنون سه خاصیت مهم پیچش را جهت کاربردهای بعدی ارایه می‌کنیم:

۱− اگر تکیه‌گاه[1] دو تابع پیوسته f و g فشرده باشند، آنگاه

$$\operatorname{Supp}(f * g) \subseteq \operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g$$

۲− هرگاه $f * g$ تعریف شده باشد، $g * f$ نیز تعریف می‌شود و $f * g = g * f$.

۳− اگر $f \in C_0^\infty$ و $g \in \mathcal{L}^p$ آنگاه $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ و $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g$.

تابع $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ را یک تابع نامنفی در نظر می‌گیریم که $\operatorname{Supp} J \subseteq B_1(0)$ و $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)dx = 1$. ($B_1(0)$ گوی به شعاع واحد حول مبدأ است.) یک مثال خوب برای این تابع،

$$J(x) = \begin{cases} k \exp\left(-1/(1-|x|^2)\right) & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

است که ثابت $k > 0$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که انتگرال تابع برابر یک شود. اکنون برای هر $\varepsilon > 0$ قرار دهید

$$J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

---

[1] support

که یک تابع نامنفی متعلق به $C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ است و $\text{Supp}\, J_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(\circ)$، $\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x)dx = ۱$. با توجه به سه خاصیت پیچش که در بالا ذکر شد، نتیجه می‌شود که $J_\varepsilon * f$ یک تقریب هموار برای تابع f است. لذا از تابع J_ε به عنوان یک منظم‌ساز[۲] نام برده می‌شود. قضیه زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

قضیه۱ ـ ۲۹. *اگر f تابع اندازه‌پذیری باشد که روی $\mathbb{R}^n$ تعریف شده و خارج دامنه Ω صفر است، در این صورت*

الف) *اگر* $\text{Supp}\, f \Subset \Omega$*، آنگاه* $J_\varepsilon * f \in C_\circ^\infty(\Omega)$ *برای* $\varepsilon < dist(\text{Supp}\, f, \partial\Omega)$.

ب) *اگر* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ *که* $۱ \leq p < \infty$*، آنگاه* $J_\varepsilon * f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ *و*

$$\lim_{\varepsilon \to \circ^+} ||J_\varepsilon * f - f||_p = \circ$$

ج) *اگر* $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ *در این صورت،* $\lim_{\varepsilon\to\circ^+} J_\varepsilon * f(x) = f(x)$ *در نقاط پیوستگی تابع* f.

د) *اگر* $f \in C(\bar{\Omega})$ *آنگاه* $J_\varepsilon * f \longrightarrow f$ *به طور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده* Ω.

برهان. درستی قسمت (الف) با توجه به خاصیت اول پیچش که در بالا ذکر شد، واضح است. برای قسمت (ب) توجه کنید که $\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y)dy = ۱$، بنابراین

$$|J_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\,|J_\varepsilon(y)|dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\,|J_\varepsilon(y)|^{\frac{۱}{p}}|J_\varepsilon(y)|^{\frac{۱}{q}}dy$$

که $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ و بنابر نامساوی هولدر نتیجه می‌شود که

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |J_\varepsilon(y)|dy\Big)^{\frac{۱}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |J_\varepsilon(y)|dy\Big)^{\frac{۱}{q}}$$

توجه کنید که $J_\varepsilon(y) \geq \circ$ و $\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y)dy = ۱$. بنابراین

$$\int_{\mathbb{R}^n} |J_\varepsilon * f(x) - f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |J_\varepsilon(y)|dy\Big)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx\Big)J_\varepsilon(y)dy$$

---

[۲] regularization

اکنون با توجه به پیوستگی نرم $\mathcal{L}^P$، مقدار $\delta > 0$ را طوری انتخاب کنید که $||f(x-y)-f(x)||_p < \varepsilon$ برای $|y| < \delta$.

$$||J_\varepsilon * f - f||_p^p \leq \int_{|y|<\delta} \varepsilon^p J_\varepsilon(y)dy + \int_{|y|\geq\delta}\int_{\mathbb{R}^n} 2^p(|f(x-y)|^p + |f(x)|^p)dxJ_\varepsilon(y)dy$$
$$\leq \varepsilon^p + 2^{p+1}||f||_p^p \int_{|y|\geq\delta} J_\varepsilon(y)dy$$

چون $\operatorname{Supp} J_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(0)$، پس وقتی $\varepsilon \to 0$ هر دو عبارت فوق به سمت صفر میل می‌کند.

■

یکی از نتایج کاربردی و مهم قضیه فوق، چگال بودن توابع هموار در فضای $\mathcal{L}^p$ است.

نتیجه۱ ـ ۳۰. برای $1 \leq p < \infty$، فضای $C_\circ^\infty(\Omega)$ در $\mathcal{L}^p(\Omega)$ چگال است.

برهان. برای $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$، زیرمجموعه فشرده $E \Subset \Omega$ را در نظر بگیرید که $||1_E f - f||_p < \delta$. در این صورت $J_\varepsilon * (1_E f) \in C_\circ^\infty(\Omega)$ تقریب خوبی برای f در فضای $\mathcal{L}^p$ است. ■

تمرین

۱. ثابت کنید رابطه (۱ ـ ۱) یک نرم برای فضای X' است و با این نرم فضای X' تام است.

۲. ثابت کنید: $||u||_X = \max_{||f||_{X'}\leq 1} \left|\langle f, u\rangle\right|$.

۳. نشان دهید تابعک خطی $\langle T, u\rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2)u(x)\,dx$ روی $\mathcal{L}^1(-1,1)$ ماکزیمم خود را در گوی واحد $\{||u||_1 \leq 1\}$ اتخاذ نمی‌کند. به کمک این مثال نشان دهید قضیه نمایش ریس برای حالت $p = \infty$ صحیح نیست.

۴. نشان دهید اگر $|\Omega| < \infty$، آنگاه $\mathcal{L}^q(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$ که $1 \leq p \leq q \leq \infty$. همچنین اگر $u \in \mathcal{L}^\infty$، آنگاه $\lim_{p\to\infty} ||u||_p = ||u||_\infty$.