میان‌ترم درس PDE ۹۹/۲/۳۱

شرایط امتحان:

۱- وقت امتحان از ساعت ۱۱ تا ۱۴ خواهد بود.

۲- در طول امتحان مجاز هستید از کتاب، جزوه و اینترنت استفاده کنید. ولی حق مشورت و راهنمایی از فرد دیگری ندارید.

۳- در پاسخ هر سؤال باید منبعی که از آن بهره برده‌اید، به‌صورت مرجع ذکر کنید.

۴- در پایان امتحان باید یک تصویر کم‌حجم از پاسخنامه خود را حداکثر تا یک ربع پس از پایان امتحان به ایمیل کنید. بعد از آن تا پایان روز (ساعت ۱۲ شب) فرصت دارید که اسکن باکیفیت از آن تهیه کرده و آن را در dropbox، google drive یا هر بستر دیگری بارگذاری کنید و فقط لینک آن را ارسال کنید.

۱- نشان دهید چگونه می‌توان جواب ضعیف معادله اصل بقاء برای ماده‌ای با چگالی ρ و شار حرکتی $q(x,t)$ را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x)\,dx = q(x_1,t) - q(x_2,t)$$

کمترین شرط‌هایی که ρ باید داشته باشد تا رابطه بالا حاصل شود، چیست؟ به‌علاوه ثابت کنید ρ در رابطه بالا صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ داشته باشیم:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_t(x,t)\varphi(x) - q(x,t)\varphi'(x)\,dx = 0$$

۲- یک مدل اصل بقاء برای مسأله ترافیک با سرعت حرکت خودرو مطابق فرمول زیر بیان کنید.

$$v(\rho) = \begin{cases} v_m & 0 \le \rho \le \rho_c \\ \lambda \log\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right) & \rho_c \le \rho \le \rho_m \end{cases}$$

که $\lambda = \frac{v_m}{\log(\rho_m/\rho_c)}$ که ρ چگالی خودروها است. v_m مداکثر سرعت مجاز و ρ_m مداکثر چگالی ممکن است. ρ_c مقدار بحرانی چگالی است.

جواب آنرویی این مسأله را برای شرط اولیه $\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_m & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$ به‌دست آورید.

۳- قرار دهید: $B_1^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \ , \ x_n > 0\}$

و فرض کنید $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$ یک تابع هارمونیک در B_1^+ باشد به طوری که $u = 0$ روی $\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}$. حال قرار دهید

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & x_n \geq 0 \\ u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n) & x_n < 0 \end{cases}$$

ثابت کنید v یک تابع هارمونیک در B_1 است.

۴- فرض کنید u جواب معادله موج یک بعدی زیر باشد:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = g(x), \ u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ثابت کنید برای هر $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ خواهیم داشت:

$$u(a_1 + a_4, a_4 - a_1) + u(a_2 + a_3, a_3 - a_2)$$

$$= u(a_2 + a_4, a_4 - a_2) + u(a_1 + a_3, a_3 - a_1)$$

۵- تابع $u \in C^1(\Omega)$ زیرهارمونیک است هرگاه

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \leq 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0$$

الف- ثابت کنید اگر $u \in C^2(\Omega)$، آنگاه $\Delta u \geq 0$.

ب- ثابت کنید هر تابع زیرهارمونیک $u \in C^1(\Omega)$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$u(x) \leq \fint_{\partial B_R(x)} u(y)\, dS_y, \quad u(x) \leq \fint_{B_R(x)} u(y)\, dy \qquad B_R(x) \subseteq \Omega$$

۶- اگر $u \in C^1(\Omega)$ زیرهارمونیک باشد، ثابت کنید برای هر $\eta \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx \leq 4 \int_\Omega |\nabla \eta|^2 u^2 \, dx$$