به نام او

امتحان پایان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای وقت امتحان: ۳ ساعت

---

۱. فرض کنید $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار، کراندار و غیرنزولی باشد که $\phi(z) = z$ برای $|z| \leq 1$ و ϕ' نیز کراندار است. همچنین فرض کنید که $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای باز باشد و $u \in H^1(\Omega)$.

الف- برای $u^\epsilon(x) = \epsilon\phi(\frac{u}{\epsilon})$ ثابت کنید $u^\epsilon \rightharpoonup 0$ به طور ضعیف در $H^1(\Omega)$.

ب- به کمک قسمت قبل نتیجه بگیرید $\int_\Omega \phi'(\frac{u}{\epsilon})|\nabla u(x)|^2 \, dx \to 0$.

پ- ثابت کنید $\nabla u = 0$ تقریبا همه جا در مجموعه $\{u = 0\}$.

۲. ناحیه هموار و کراندار $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. نشان دهید برای هر ثابت $\alpha > 0$ مقدار ثابت C تنها وابسته به α و Ω وجود دارد که

$$\int_{\partial\Omega} u^2 \, dx \leq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + C \int_\Omega u^2 \, dx,$$

برای هر $u \in H^1(\Omega)$.

۳. فرض کنید $u \in H^1(B_1)$ جواب ضعیف معادله شبه خطی $-\Delta u + a(u) = f$ باشد که $f \in \mathcal{L}^2(B_1)$ و $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هموار است که $a(0) = 0$ و $a' \geq 0$. ثابت کنید $u \in H^2(B_{\frac{1}{2}})$.

۴. به کمک قضیه نقطه ثابت Shaefer ثابت کنید مسأله زیر لااقل یک جواب دارد که در آن Ω ناحیه هموار و کران‌دار است و $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نیز یک تابع هموار و کران‌دار است.

$$\begin{cases} -\Delta u = a(\nabla u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

۵. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در کلاس C^1 قرار دارد. اگر $0 < u \in C^2(\overline{B_1})$ جواب مسأله زیر باشد:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } B_1 \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1 \end{cases}$$

الف‌ـ ثابت کنید اگر $x^0 \in \partial B_1 \cap \{x_1 > 0\}$. آنگاه مقدار $\delta > 0$ وجود دارد که $\partial_{x_1} u < 0$ در

$$B_1 \cap \{|x - x^0| < \delta\}.$$

ب‌ـ برای $0 < \lambda < 1$ صفحه $\{x_1 = \lambda\}$ را با T_λ نشان می‌دهیم و قرار دهید $\Sigma_\lambda = B_1 \cap \{x_1 > \lambda\}$. به علاوه، Σ'_λ را انعکاس Σ_λ نسبت به T_λ می‌گیریم. همچنین انعکاس x نسبت به T_λ را با x^λ نشان می‌دهیم. اگر برای یک مقدار λ بدانیم

$$\partial_{x_1} u(x) \leq 0, \;\; u(x) \leq u(x^\lambda), \;\; \forall x \in \Sigma_\lambda,$$

به طوری که برای حداقل یک نقطه $x \in \Sigma_\lambda$ داشته باشیم $u(x) < u(x^\lambda)$. آنگاه $u(x) < u(x^\lambda)$ برای هر $x \in \Sigma_\lambda$ و $\partial_{x_1} u < 0$ روی $B \cap T_\lambda$.

پ‌ـ ثابت کنید برای هر $0 < \lambda < 1$ داریم:

$$\partial_{x_1} u(x) < 0, \;\; u(x) < u(x^\lambda), \;\; \forall x \in \Sigma_\lambda.$$

ت‌ـ ثابت کنید u تقارن شعاعی دارد یعنی $u(x) = v(|x|)$ و به علاوه $\partial_r v < 0$.

موفق باشید.

۹۹/۴/۸