PDE

جلسه بیست و یکم

۹۹/۲/۲۹

تنظم مرزی

قضیه- Ω یک ناحیه باز کران دار C^{m+2} است و $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ و $f \in H^m(\Omega)$. اگر $u \in H_0^1(\Omega)$ جواب ضعیف

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

باشد، آنگاه $u \in H^{m+2}(\Omega)$ است و تقریب زیر برای یک ثابت C که تنها به Ω، m و ضرایب L وابسته است برقرار است:

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

اثبات- گام اول- کافی است نشان دهیم برای هر همسایگی U از نقطه مرزی $x_0 \in \partial\Omega$، همسایگی $x_0 \in V \subset\subset U$ وجود دارد که $u \in H^{m+2}(V)$ و تخمین بالا بصورت زیر برقرار است:

$$(1) \qquad \|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C\left[\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right]$$

درصورت اثبات مطلب بالا و باتوجه به فشردگی $\partial\Omega$ تعداد متناهی مجموعه $V_1, \dots, V_k$ هستند که $\partial\Omega$ را می پوشانند. همچنین می توانیم

باز $\Omega' \subset\subset \Omega$ را انتخاب کنیم که $\Omega \subseteq \Omega' \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ و باتوجه به تنظم درونی جواب، قضیه اثبات می شود.

گام دوم - کافی است رابطه (۱) را برای $U=B_1^+(0)=\{x\in B_1(0) : x_n>0\}$ و $V=B^+_{1/2}(0)$ اثبات کنیم.

درواقع چون $\partial\Omega$ هموار C^{m+2} است، در همسایگی هر نقطه $x_0\in\partial\Omega$ باز U و وابریختی هموار C^{m+2} ، $\Phi : U\to\mathbb{R}^n$

وجود دارد که $\Phi(U\cap\Omega)=B_1^+(0)$.

$$v(y) := u(\Phi^{-1}(y)) : B_1^+(0)\longrightarrow\mathbb{R}$$

و $y=\Phi(x)$ آنگاه با توجه به رابطه $\frac{\partial}{\partial x_i}v=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}v\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}u(x)=\mathcal{L}\left[v(\Phi(x))\right]=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}v\right]+\sum_i b^i\frac{\partial}{\partial x_i}v+cv$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial y_k}\left[a^{ij}(\Phi^{-1}(y))\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_l}v\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right]+\sum_{i,k}b^i(\Phi^{-1}(y))\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial y_k}+cv$$

$$=-\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\tilde a^{kl}(y)\frac{\partial}{\partial y_l}v\right]+\sum_{k=1}^{n}\tilde b^k(y)\frac{\partial v}{\partial y_k}+\tilde c v=:\tilde{\mathcal{L}}v$$

که $\tilde c(y)=c(\Phi^{-1}(y))$ ، $\tilde b^k(y)=\sum_{i=1}^{n}b^i(\Phi^{-1}(y))\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ و $\tilde a^{kl}(y)=\sum_{i,j}a^{ij}(\Phi^{-1}(y))\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}$

عملگر $\tilde{L}$ یک عملگر بیضوی است که ثابت بیضوی آن متناسب ثابت L است. درحقیقت

$$\sum_{k,l} \tilde{a}^{kl}\xi_k\xi_l = \sum_{k,l}\sum_{i,j} a^{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\xi_k\xi_l$$

$$= \sum_{i,j} a^{ij}\left(\sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\xi_k\right)\cdot\left(\sum_l \frac{\partial y_l}{\partial x_j}\cdot\xi_l\right)$$

$$\geq \theta\,|\eta|^2$$

که $\eta_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\xi_k$ یا به عبارتی دیگر $\eta = D\Phi\cdot\xi$. چون Φ وابرریختی است

$D\Phi$ یک ماتریس وارون‌پذیر است و $|\eta| \geq \|D\Phi^{-1}\|^{-1}\cdot|\xi|$. درنتیجه

$$\sum_{k,l}\tilde{a}^{kl}\xi_k\xi_l \geq \theta\,\|D\Phi^{-1}\|^{-2}\cdot|\xi|^2$$

به طور خلاصه با انتخاب نقشه مناسب تابع $v(y)=u(\Phi^{-1}(y))$ در $B_1^+(0)$ در معادله بیضوی $\tilde{L}v=\tilde{f}(y)=f(\Phi^{-1}(y))$

صدق می‌کند. چون Φ هموار C^{m+2} است، می‌دانیم که

$$f \in H^m(U) \iff \tilde{f} \in H^m(B_1^+(0))$$

$$V = \Phi^{-1}(B_{1/2}^+(0)) \text{ که } u \in H^{m+2}(V) \iff v \in H^{m+2}(B_{1/2}^+(0))$$

در نتیجه اگر رابطه (۱) را برای v اثبات کرده باشیم، به طور متناظر برای u نیز اثبات می‌شود.

گام سوم- (اثبات (۱) برای $m=0$ و $U = B_1^+(0)$ ، $V = B_{1/2}^+(0)$.)

تابع برشی ζ را انتخاب کنید به گونه‌ای که

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{on } B_{1/2}^+(0) \\ \zeta \equiv 0 & \text{on } \mathbb{R}^n \setminus B_1^+(0) \\ 0 \le \zeta \le 1 \end{cases}$$

چون u جواب ضعیف $Lu=f$ در U است، می‌دانیم:

$$B[u,v] = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_0^1(U)$$

حال مشابه قضیه قبل (نظم درونی) قرار دهید:

$$v = D_k^{-h}\left(D_k^h(\zeta u)\right) \qquad k\in\{1,\dots,n-1\}$$

برای $h>0$ به اندازه کافی کوچک. چون $u=0$ روی $\{x_n=0\}$ و $\zeta=0$ نزدیک $\partial B_1\cap\mathbb{R}^n_+$ درنتیجه $v\in H_0^1(U)$.

با محاسبات مشابه قضیه قبل خواهیم داشت:

$$(2) \qquad \|D_k^h(\chi u)\|^2_{H^1(B_1^+)} \le C\left[\|u\|^2_{H^1(B_1^+)} + \|f\|^2_{L^2(B_1^+)}\right]$$

و درنتیجه $\partial_k(\chi u)\in H^1(B_1^+)$ یا $\partial_k u\in H^1(B_{1/2}^+)$ وقتی $1\le k\le n-1$.

برای تکمیل اثبات باید ثابت کنیم $\partial_n^2 u\in L^2(B_{1/2}^+)$. برای این منظور تعریف جواب ضعیف را دوباره مرور کنید:

$$\int_U f v\,dx = B[u,v] = \int_U \sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u\,\partial_j v + \sum b^i \partial_i u\cdot v + cuv\,dx$$

$$= \int_U a^{nn}\partial_n u\,\partial_n v + \Big[-\sum_{1<i+j<2n}\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + \sum_i b^i\partial_i u + cu\Big]v\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -\int_U a^{nn}\partial_n^2 u \cdot v\, dx = \int_U \tilde{f}\, v\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(U)$$

که
$$\tilde{f} = f + \partial_n a^{nn} \cdot \partial_n u + \sum_{1<i+j<2n} \partial_j (a^{ij}\partial_i u) - \sum_i b^i \partial_i u - cu \,.$$

با توجه به اینکه $\partial_k u \in H^1(V)$ برای $1 \leq k \leq n-1$ و فرض های نظم ضرایب عملگر L، نتیجه می‌شود که $\tilde{f} \in L^2(V)$.

$$\Rightarrow \quad a^{nn}\partial_n^2 u = -\tilde{f} \in L^2(V) \qquad (3)$$

از طرفی بنابر خاصیت بیضوی عملگر L می‌دانیم که

$$\sum a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

اگر قرار دهیم $\xi = (0, \ldots, 0, 1)$ آنگاه $a^{nn}(x) \geq \theta$ برای هر $x \in U$ و نتیجه می‌شود که

$\partial_n^2 u \in L^2(V)$. تخمین (1) نیز از رابطه (2) و (3) به سادگی به دست می‌آید.

گام چهارم - اثبات (۱) برای هر $m>0$ ، $U=B_1^+$ و $V=B_{1/2}^+$.

با استقرا این مطلب را اثبات می‌کنیم. برای $m=0$ در گام قبل اثبات شد. اگر برای $f\in H^m(U)$ بدانیم $u\in H^{m+2}(V)$ و رابطه (۱) برقرار است، در حالت $m+1$ وقتی $Lu=f\in H^{m+1}(B_1^+)$ می‌دانیم $u\in H^{m+2}(B_{2/3}^+)$. (در (۱) قرار دهید $V=B_{2/3}^+$.) بنابراین u جواب کلاسیک است و تساوی $Lu=f$ نقطه‌وار در $H^m(B_{2/3}^+)$ برقرار است. از این تساوی نسبت به x_k مشتق بگیرید وقتی $1\le k<n$. دقت کنید در این صورت $\partial_k u\in H_0^1(B_{2/3}^+)$ جواب ضعیف معادله

$$L(\partial_k u) = \bar{f} = \partial_k f + \sum_{i,j}\partial_i\left(\partial_k(a^{ij})\,\partial_j u\right) - \sum_i \partial_k b^i . u - (\partial_k c)u$$

است. به وضوح $\bar{f}\in H^m(B_{2/3}^+)$ و بنا بر فرض استقراء $\partial_k u\in H^{m+2}(B_{1/2}^+)$ (وقتی $1\le k<n$).

برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم $\partial_n^2 u\in H^{m+1}(B_{1/2}^+)$. مشابه گام سوم خواهیم داشت:

$$a_{nn}\,\partial_n^2 u = -\tilde{f} \in H^{m+1}(B_{1/2}^+)$$

و بدین ترتیب اثبات تکمیل می‌شود. تخمین (۱) هم با تخمین‌های مربوط به $\tilde{f}$ و $\partial_k u$ به سادگی به دست می‌آید.

PDE

۹۹,۳,۱۰

جلسه بیست و دوم

اصول ماکسیمم

این جلسه تعمیم نتایج جلسه هشتم برای جواب یک عملگر بیضوی به جای معادله لاپلاس است. البته چون خاصیت مقدار میانگین در حالت کلی برقرار نیست، اثبات متفاوت است. ایده اصلی این است که اگر u یک تابع C^2 باشد و ماکسیمم خود را در یک نقطه درونی $x_0 \in \Omega$ بگیرد، باید

$$\nabla u(x_0) = 0 \quad , \quad D^2 u(x_0) \leq 0 .$$

(منظور از $D^2 u$ ماتریس مشتق دوم u است و نامساوی بالا به این معناست که ماتریس $D^2 u$ نیمه معین نامثبت است .)

در ادامه عملگر بیضوی غیر دیورژانسی

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial^2_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i u + cu$$

را در نظر می‌گیریم که ضرایب a^{ij} ، b^i و c پیوسته هستند .

قضیه ۱ (اصل ماکسیمم ضعیف) فرض کنید $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ و $c \equiv 0$ در Ω.

(۱) اگر $Lu \leq 0$ در Ω، (زیرجواب (subsolution) باشد)، آنگاه

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

(۲) اگر $Lu \geq 0$ در Ω، (زبرجواب (supersolution) باشد)، آنگاه

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u .$$

اثبات ـ اثبات (۲) از (۱) با جایگذاری $-u$ به جای u به دست می‌آید.

ابتدا با فرض $Lu < 0$ قسمت (۱) را اثبات می‌کنیم. فرض کنید

$$\max_{\bar{\Omega}} u = u(x_0)$$

برای نقطه درونی $x_0 \in \Omega$. در نتیجه $\nabla u(x_0) = 0$ و $D^2 u(x_0) \leq 0$.

$$(1)\qquad 0 > Lu(x_0) = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_{ij}^2 u(x_0) + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i u(x_0) = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_{ij}^2 u(x_0)$$

از طرفی اگر $A=(a^{ij})_{1\le i,j\le n}$ که یک ماتریسِ متقارن و معینِ مثبت است .

$$(2)\qquad A(x_0)>0\ ,\ D^2u(x_0)\le 0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i,j} a^{ij}\partial_{ij}^2 u(x_0) = tr(A\,D^2u(x_0)) \le 0$$

که با (1) تناقض دارد. برای دیدن اینکه چرا (2) برقرار است ، چون A ماتریسِ متقارن است ، ماتریس متعامد O وجود دارد که

$$O^TO = I \quad , \quad OAO^T = diag\,(d_1,\dots,d_n) = D$$

که به دلیل معینِ مثبت بودن A داریم $d_i \ge 0$ برای $i=1,\dots,n$. اگر $B = O\,D^2u(x_0)\,O^T$ که یک ماتریسِ معینِ نامثبت است .

$$tr(A\,D^2u) = tr(OAD^2uO^T) = tr(OAO^TOD^2uO^T) = tr(DB) = \sum_{i=1}^{n} d_i b_{ii} \le 0$$

(دقت کنید چون $B\le 0$ ، آنگاه $b_{ii} = e_i^t B e_i \le 0$)

حال برمی‌گردیم به حالت $Lu\le 0$ و قرار دهید

$$u^\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1} \qquad x\in\Omega$$

که $\epsilon>0$ و $\lambda>0$ در ادامه انتخاب می‌شوند.

$$Lu^{\epsilon} = Lu + \epsilon L(e^{\lambda x_1}) \leq \epsilon e^{\lambda x_1}\left[-\lambda^2 a^{11}(x) + \lambda b^1(x)\right]$$

$$\leq \epsilon e^{\lambda x_1}\left[-\lambda^2\theta + \lambda \|b\|_{L^\infty}\right]$$

در بالا از نامساوی $a^{ii}(x) \geq \theta > 0$ که یک نتیجه خاصیت بیضوی عملگر L است، استفاده شده است. می‌توانیم $\lambda>0$ را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم به طوری که

$$Lu^{\epsilon} < 0 \quad \text{in } \Omega.$$

آنگاه بنابر قسمت اول اثبات می‌دانیم

$$\max_{\bar{\Omega}} u^{\epsilon} = \max_{\partial\Omega} u^{\epsilon}$$

حال اگر $\epsilon \to 0$، آنگاه اثبات کامل خواهد شد.

قضیه ۲ (اصل ماکسیمم ضعیف برای $c \geq 0$) فرض کنید $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ و $c \geq 0$ در Ω.

۱) اگر $Lu \leq 0$ در Ω، آنگاه

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

۲) اگر $Lu \geq 0$ در Ω، آنگاه

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-$$

تذکر- $u^+ = \max(u, 0)$ و $u^- = -\min(u, 0)$. در واقع $u = u^+ - u^-$ و $|u| = u^+ + u^-$.

تذکر- از قضیه بالا نتیجه می‌شود که اگر $Lu = 0$، آنگاه $\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$.

اثبات - اثبات (۲) از (۱) با جایگزینی $-u$ به جای u نتیجه می‌شود. برای اثبات (۱) فرض کنید u یک زیرجواب است و $V = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ قرار دهید و

$$\tilde{L}u := Lu - cu$$

$$\tilde{L}u \le 0 \quad \text{in } V$$ دراین صورت

و ضریب جمله ثابت عملگر $\tilde{L}$ صفر است و بنابر قضیه ۱ نتیجه می‌شود که

$$\max_{\bar{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial \Omega} u^+$$

درنتیجه (۱) اثبات می‌شود. اگر $V \neq \phi$ حالت تساوی برقرار است و اگر $V = \phi$ به وضوح $u \le 0$ در Ω و (۱) برقرار است.

مثال - شرط مثبت بودن ضریب c ضروری است. عملگر $Lu = -\Delta u - u$ در فضای یک بعدی و بازه $\Omega = (-1,1)$ درنظر بگیرید.

$u(x) = 3 - x^2$ یک زیرجواب است، $Lu \le 0$ ، ولی $\max_{\bar{\Omega}} u = 3$ و $\max_{\partial\Omega} u = 2$.

قضیه ۳ (اصل ماکسیمم قوی) فرض کنید $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ و $c \equiv 0$ در Ω. فرض کنید Ω باز و همبند است.

(۱) اگر $Lu \le 0$ در Ω و u ماکسیمم خود در $\bar{\Omega}$ را در یک نقطه درونی بگیرد، آنگاه u روی Ω یک تابع ثابت است.

(2) اگر $Lu \ge 0$ در Ω و u مینیمم خود در $\bar{\Omega}$ را در یک نقطه درونی بگیرد، آنگاه u روی Ω یک تابع ثابت است.

قضیه ۴ (اصل ماکسیمم قوی وقتی $c \geq 0$). فرض کنید $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ و $c \geq 0$ در Ω. به علاوه Ω باز و همبند باشد.

(۱) اگر $Lu \leq 0$ در Ω و u ماکسیمم نامنفی خود در $\bar{\Omega}$ را در یک نقطه درونی بگیرد، آنگاه u روی Ω یک تابع ثابت است.

(۲) اگر $Lu \geq 0$ در Ω و u می‌نیمم غیرمثبت خود در $\bar{\Omega}$ را در یک نقطه درونی بگیرد، آنگاه u روی Ω یک تابع ثابت است.

اثبات اصل ماکسیمم قوی به کمک لم زیر انجام می‌پذیرد.

لم هوپف ـ فرض کنید $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. به علاوه اگر $Lu \leq 0$ در Ω و نقطه $x_0 \in \partial\Omega$ وجود داشته باشد که

$$(3) \qquad u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in \Omega$$

همچنین فرض کنید گوی $B \subseteq \Omega$ وجود داشته باشد که $x_0 \in \partial B$. (خاصیت گوی درونی)

۱) اگر $c=0$ در Ω، آنگاه $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ که ν بردار برونگرای عمود بر B در نقطه x_0 است.

۲) اگر $c \geq 0$ در Ω، آنگاه نتیجه مشابه برقرار است به شرط آنکه $u(x_0) \geq 0$.

تذکر- اگر $\partial\Omega$ از کلاس C^2 باشد، آنگاه شرط گوی درونی به طور خودکار برقرار است. اهمیت لم هوپف در نامساوی اکید $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ است وگرنه از ماکسیمم بودن u در نقطه x_0 نتیجه می‌شود که $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$. مشابه نتیجه بالا برای زیرجوابها، $Lu \geq 0$ در Ω، برقرار است و باید داشته باشیم: $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$.

فرض $u \in C^1(\bar{\Omega})$ تنها برای خوش تعریفی $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ روی مرز $\partial\Omega$ است. اثبات با فرض تنها $u \in C(\bar{\Omega})$ صحیح است. به این منظور به جای $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ باید قرار دهیم

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) := \liminf_{t \to 0^+} \frac{u(x_0 - t\nu) - u(x_0)}{t}$$

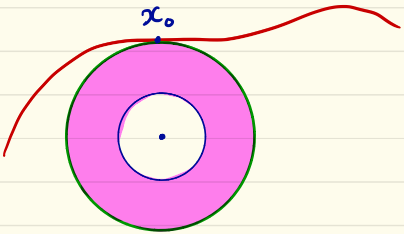
اثبات - فرض کنید گوی B درصورت لم گوی به شعاع r به مرکز مبدأ باشد، $B=B(0,r)$. تابع کمکی زیر را در نظر بگیرید:

$$w(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}$$

که مقدار ثابت $\lambda>0$ بعداً انتخاب خواهد شد. با یک محاسبه ساده خواهیم داشت:

$$Lw = e^{-\lambda|x|^2}\sum_{i,j} a^{ij}\left(-4\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda\delta_{ij}\right) - e^{-\lambda|x|^2}\sum_{i=1}^{n} 2\lambda x_i b^i + c\left(e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}\right)$$

$$\le e^{-\lambda|x|^2}\left[-4\theta\lambda^2|x|^2 + 2\lambda\, \mathrm{tr}A + 2\lambda|b|\cdot|x| + c\right]$$



که در رابطه بالا از $c\geq 0$ استفاده کرده‌ایم و θ ضریب بیضوی بودن عملگر L است.

اگر $R = B(0,r) - B(0,r/2)$ ، آنگاه برای مقدار $\lambda>0$ به اندازه کافی بزرگ

خواهیم داشت:

$$(4)\qquad L\omega(x) \leq 0 \qquad \text{for} \quad x \in R$$

(کافی است λ به اندازه ای بزرگ باشد که $-\theta\lambda^2 r^2 + 2\lambda \operatorname{tr} A + 2\lambda |b| r + c \leq 0$)

حال مقدار $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک را انتخاب کنید به گونه ای که

$$u(x_0) > u(x) + \epsilon\, \omega(x) \qquad x \in \partial B(0, r/2)$$

انتخاب $\epsilon > 0$ ، به دلیل رابطه (3) ممکن است و چون $\omega(x) = 0$ برای $x \in \partial B(0,r)$ ، بنابراین

$$u(x_0) \geq u(x) + \epsilon\, \omega(x) \qquad x \in \partial B(0,r)$$

حال اصل ماکسیمم ضعیف را برای تابع $u + \epsilon\omega$ در ناحیه R به کار برید. به دلیل (4) داریم:

$$L(u+\epsilon\omega) \leq 0 \qquad \text{in} \quad R$$

در نتیجه

$$\max_{\overline{R}} (u+\epsilon\omega) \leq \max_{\partial R} (u+\epsilon\omega)^+ = u(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad u(x) + \epsilon w(x) \leq u(x_0) \qquad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u(x_0) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \nu} w(x_0) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u(x_0) \geq -\epsilon \frac{\partial}{\partial \nu} w(x_0) = -\epsilon \nabla w(x_0) \cdot \frac{x_0}{r} = 2\lambda \epsilon r e^{-\lambda r^2} > 0$$

اثبات قضیه ۳ و ۴: قرار دهید $M := \max\limits_{\Omega} u$ و بنابر فرض قضیه

$$C = \{x \in \Omega : u(x) = M\} \neq \emptyset$$

اگر $u \not\equiv M$ آنگاه نقطه $y \in \{x \in \Omega : u(x) < M\}$ وجود دارد که $dist(y, C) < dist(y, \partial\Omega)$. (چرا؟ این مطلب از همبندی Ω نتیجه می‌شود.) B را گوی به مرکز y و شعاع $dist(y,C)$ بگیرید.

آنگاه نقطه $x_0 \in \partial B \cap C$ و گوی B در شرایط لم هوپف صدق می‌کند. در نتیجه باید $0 < \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)$.

اما از آنجا که x_0 یک نقطه درونی Ω است باید $\nabla u(x_0) = 0$. این تناقض نشان می‌دهد که $u \equiv M$ روی Ω.

نتیجه - فرض کنید Ω ناحیه باز کران دار باشد که دارای خاصیت گوی درونی است. مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x) u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

به علاوه فرض کنید $c(x) \geq 0$ در Ω و $\alpha(x) \geq 0$ روی $\partial\Omega$. آنگاه مسأله فوق حداکثر یک جواب در کلاس $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ دارد اگر $c \not\equiv 0$ یا $\alpha \not\equiv 0$. اگر $c \equiv 0$ یا $\alpha \equiv 0$، این مسأله در حد جمع با یک عدد ثابت جواب یکتا دارد.

اثبات- باید نشان دهیم مسأله همگن $\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ جواب بدیهی دارد. اگر $0 \leq u(x_0) = \max\limits_{\bar{\Omega}} u$

اگر $x_0 \in \partial\Omega$ بنابر لم هوپف، $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ که با فرض $-\alpha u(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ و $0 \leq \alpha$ و $0 \leq u(x_0)$ تناقض دارد.

اگر $x_0 \in \Omega$ نقطه درونی باشد، بنابر اصل ماکسیمم قوی، u یک تابع ثابت است. اگر $c \not\equiv 0$ یا $\alpha \not\equiv 0$ نتیجه می‌شود که u تابع ثابت صفر است.

قضیه (نامساوی هارنک). فرض کنید $u \geq 0$ جواب C^2 معادله $Lu = 0$ در Ω باشد و

فرض کنید $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ همبند باشد. آنگاه ثابت C وابسته به Ω، $\tilde{\Omega}$ و ضرایب L وجود دارد که

$$\sup_{\tilde{\Omega}} u \leq C \inf_{\tilde{\Omega}} u$$

اثبات - برای سادگی قضیه را تنها در حالتی که $b^i = c = 0$ و a^{ij} هموار هستند، اثبات می‌کنیم. هرچند شرط کران‌داری ضرایب

برای قضیه بالا کافی است.

نامساوی بالا به این معناست که برای هر دو نقطه $x_1, x_2 \in \tilde{\Omega}$ داشته باشیم:

$$u(x_1) \leq C\, u(x_2)$$

یا به طور معادل

$$\frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leq C \iff \log u(x_1) - \log u(x_2) \leq C$$

و برای اثبات نامساوی اخیر، کافی است ثابت کنیم که مشتق $v := \log u$ روی $\tilde{\Omega}$ کران‌دار است و کران آن

تنها به Ω، $\tilde{\Omega}$ و ضرایب L وابسته است. برای اینکه تابع v خوش‌تعریف باشد، فرض می‌کنیم $u > 0$. چنین فرض محدودکننده نیست. چرا که می‌توان به جای u، $u+\epsilon$ قرار داد که در معادله نیز صدق می‌کند و در نهایت $\epsilon \to 0^+$.

حال برای نشان دادن کران‌داری مشتق v، محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

$$0 = Lu = L(e^v) = -\sum_{i,j} a^{ij}\left[\partial^2_{ij} v + \partial_i v \cdot \partial_j v\right] e^v$$

$$\Rightarrow \quad Lv = \sum_{i,j} a^{ij}\, \partial_i v\, \partial_j v =: w$$

از خاصیت بیضوی عملگر نتیجه می‌شود که

$$(5) \qquad \theta |\nabla v|^2 \leq \sum a^{ij}\, \partial_i v\, \partial_j v = w$$

لذا کافی است نشان دهیم w روی $\tilde{\Omega}$ کران‌دار است.

$$\partial^2_{kl} w = 2\sum_{i,j} a^{ij}\, \partial^3_{ikl} v\, \partial_j v + 2\sum_{i,j} a^{ij}\, \partial^2_{ik} v\, \partial^2_{jl} v + R$$

جمله باقیمانده R به ضرایب a^{ij} و مشتقات v وابسته است و در تخمین زیر برای هر $\epsilon>0$ صدق می‌کند:

(6) $$|R| \le \epsilon |D^2 v|^2 + C(\epsilon)|\nabla v|^2$$

درنتیجه داریم:

(7) $$Lw = -\sum_{k,l} a^{kl}\partial^2_{kl} w = 2\sum_{i,j} a^{ij}\partial_j v\Big[-\sum_{k,l} a^{kl}\partial^3_{ikl} v\Big] - 2\sum_{i,j}\sum_{k,l} a^{ij}a^{kl}\partial^2_{ik}v\,\partial^2_{jl}v - R$$

اما از رابطه $Lv=w$ خواهیم داشت:

$$-\sum_{k,l} a^{kl}\partial^3_{ikl}v = \partial_i w + R_i$$

که مانند R_i به مشتقات ضرایب a^{ij} و مشتق دوم v وابسته است. لذا عبارت $\sum_{i,j} a^{ij}\partial_j v R_i$ در تخمین مشابه (6) صدق می‌کند. از طرف دیگر

$$\sum_{\substack{i,j\\k,l}} a^{ij}a^{kl}\partial^2_{ik}v\,\partial^2_{jl}v = \sum_{i,j} a^{ij}(\nabla\partial_i v)^T A(\nabla\partial_j v)$$

$$= \sum_{i,j} a^{ij}\left[(\nabla\partial_i v)^T A(\nabla\partial_i v)\right]^{1/2}\left[(\nabla\partial_j v)^T A(\nabla\partial_j v)\right]^{1/2}$$

$$\geq \theta \left(\sum_i \left[(\nabla \partial_i v)^T A (\nabla \partial_i v) \right]^2 \right)^{1/2}$$

$$\geq \theta^2 \left(\sum_i |\nabla \partial_i v|^2 \right)^{1/2} = \theta^2 |D^2 v|^2$$

در نتیجه از رابطه (7) خواهیم داشت:

$$(8) \qquad -\sum_{k,l} a^{kl} \partial^2_{kl} w - \sum_i \underbrace{\Big(2 \sum_j a^{ij} \partial_j v \Big)}_{=:\, b^i} \partial_i w \leq -\theta^2 |D^2 v|^2 + C |Dv|^2$$

حال تابع برشی $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ را در نظر بگیرید که $\zeta \equiv 1$ on $\tilde{\Omega}$ و $0 \leq \zeta \leq 1$

و قرار دهید $z := \zeta^4 w$. فرض کنید z ماکسیمم خود را در نقطه $x_0 \in \Omega$ بگیرد. بنابراین در نقطه x_0 داریم:

$$(9) \qquad \text{در نقطه } x_0 \quad \zeta \partial_i w + 4 \partial_i \zeta \, w = 0 \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$(10) \qquad 0 \leq \sum_{k,l} -a^{kl} \partial^2_{kl} z - \sum_i b^i \partial_i z = \zeta^4 \Big[-\sum_{k,l} a^{kl} \partial^2_{kl} w - \sum_i b^i \partial_i w \Big] + \hat{R}$$

که جمله $\hat{R}$ وابسته به تابع برشی ζ و ω و $\nabla\omega$ است و در تخمین زیر صدق می‌کند:

$$|\hat{R}| \le C(\zeta^2\omega + \zeta^3|\nabla\omega|)$$

و با توجه به رابطه (9) باید

$$|\hat{R}| \le C\zeta^2\omega$$

حال این تخمین را در رابطه (10) وارد داده و از رابطه (8) استفاده کنید تا به رابطه زیر برسیم:

در نقطه x_0

$$0 \le \zeta^4\left(-\theta|D^2v|^2 + C|\nabla v|^2\right) + C\zeta^2\omega$$

همچنین از رابطه $Lv=\omega$ می‌دانیم $\omega \le C|D^2v|$ و از (5) داریم که $\theta|Dv|^2 \le \omega$. بنابراین

$$\zeta^4(x_0)\,\omega^2(x_0) \le C\zeta^2(x_0)\,\omega(x_0)$$

لذا $z(x_0)=\zeta^4(x_0)\omega(x_0) \le C$. یعنی $\max_{\Omega} z \le C$ و در نتیجه $\max_{\Omega} \omega \le C$.

PDE

۹۹/۳/۱۲ جلسه بیست و سوم

اصول ماکسیمم

u را جواب

$$(1)\quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

بگیرید که

$$Lu = -\sum_{i,j} a^{ij}\,\partial^2_{ij} u + \sum_i b^i\,\partial_i u + cu$$

$$a^{ij},\ b^i \in L^\infty(\Omega) \qquad , \qquad \theta|\xi|^2 \leq \sum a^{ij}\xi_i\xi_j$$

اگر تابع f علامت‌دار باشد، مثلاً $f \geq 0$ آنگاه u یک زیرجواب است و بنابراین از اصل ماکسیمم در جلسه قبل داریم، u می‌نیمم نامثبت خود را روی مرز می‌گیرد. در این جلسه نتایج قبل را به حالت کلی‌تر تعمیم می‌دهیم. گزاره قبل و تذکر بعد از آن اصل ماکسیمم را برای جواب‌های (1) تعمیم می‌دهد. در ادامه اصل ماکسیمم را برای نامساوی $Lu \leq f$ یا $Lu \geq f$ به جای معادله (1) اثبات خواهیم کرد.

گزاره - فرض کنید Ω کران‌دار است و $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ جواب (1) باشد. اگر $f \in C(\bar{\Omega})$ ، $\varphi \in C(\partial\Omega)$ و $c(x) \geq 0$ ، آنگاه ثابت $C = C(\theta, \|b\|_\infty, \operatorname{diam}\Omega)$ وجود دارد که

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi^+ + C \max_{\bar{\Omega}} f^+ .$$

تذکر - نتیجه گزاره بالا برای $-u$ به جای u به نامساوی

$$u(x) \geq -\left(\max_{\partial\Omega} \varphi^- + C \max_{\bar{\Omega}} f^- \right)$$

می‌رسیم. در نتیجه

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \max_{\bar{\Omega}} |f|$$

اثبات - فرض کنید ناحیه Ω در مجموعه $\{x\in\mathbb{R}^n : 0 < x_1 < d\}$ قرار گرفته باشد. قرار دهید

$$\Phi = \max_{\partial\Omega} \varphi^+ , \qquad F = \max_{\Omega} f^+ , \qquad \omega(x) := \Phi + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) F$$

که ثابت $\alpha > 0$ بعداً مشخص می‌شود. با یک محاسبه ساده خواهیم داشت:

$$L\omega = (a_{11}\alpha^2 - b_1\alpha) e^{\alpha x_1} F + c\omega \geq (\alpha^2\theta - b_1\alpha) F \geq F$$

کافی است مقدار α به اندازه‌ای بزرگ باشد که $\alpha^2\theta - \|b_1\|_\infty \alpha \geq 1$. درنتیجه

$$L(\omega - u) \geq F - f \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

همچنین

$$\omega - u \geq \Phi - \varphi \geq 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

بنابراصل ماکسیمم (مینیمم) باید

$$\omega - u \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\Rightarrow \quad u(x) \leq \omega(x) \leq \Phi + CF$$

که $C = e^{\alpha d} - 1$.

تمرین ـ مشابه گزاره قبل را وقتی شرط مرزی به صورت $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = \varphi$ باشد را اثبات کنید.

در ادامه قصد داریم یک اصل ماکسیمم برای مشتق جواب به جای خود جواب ارائه کنیم. این اصل ماکسیمم به تقریبی برای مشتق اول جواب (۱) منجر می‌شود وقتی $f \in C^1(\bar{\Omega})$. اگر ضرایب L ثابت باشند، با مشتق گرفتن از (۱) نتیجه می‌شود که $L(\partial_i u) = \partial_i f$ و به کمک گزاره قبل می‌توان یک تخمین برای $\partial_i u$ به دست آورد. البته این روش وقتی ضرایب L ثابت نیستند، به این راحتی نیست.

گزاره ـ فرض کنید Ω کراندار بوده و $a^{ij}, b^i, c \in C^1(\bar{\Omega})$. فرض کنید $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ در (۱) صدق کند. آنگاه

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u| + C\left(1 + \|f\|_{C^1}\right)$$

که $C = C(\operatorname{diam}\Omega, \|u\|_\infty, \theta, \|a^{ij}\|_{C^1}, \|b^i\|_{C^1}, \|c\|_{C^1})$. (فرض مثبت بودن c الزامی نیست)

اثبات - ایده اثبات استفاده از اصل ماکسیمم برای $|\nabla u|^2$ است.

$$\partial_i |\nabla u|^2 = 2\sum_{k=1}^{n} \partial^2_{ik} u\, \partial_k u \,, \qquad \partial_{ij} |\nabla u|^2 = 2\sum_{k=1}^{n} \partial^3_{ijk} u\, \partial_k u + \partial_{ik} u\, \partial_{jk} u$$

و اگر $L_0 := L - c$ آنگاه

$$L_0(|\nabla u|^2) = 2\sum_{k=1}^{n} L_0(\partial_k u)\, \partial_k u - 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\, \partial_{ik} u\, \partial_{jk} u$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{n} L_0(\partial_k u)\, \partial_k u - 2\theta |D^2 u|^2$$

حال از رابطه $Lu = f$ مشتق بگیرید.

$$\partial_k f = L(\partial_k u) - \sum_{i,j} \partial_k a^{ij} \cdot \partial^2_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} \partial_k b^i\, \partial_i u + \partial_k c \cdot u$$

$$\Rightarrow \quad L_0(\partial_k u)\, \partial_k u \leq \partial_k f \cdot \partial_k u - c(\partial_k u)^2 + C_0 \left[|D^2 u| + |\nabla u| + |u| \right] |\nabla u|$$

ثابت C_0 به $\|a^{ij}\|_{C^1}$، $\|b^i\|_{C^1}$ و $\|c\|_{C^1}$ وابسته است.

$$\Rightarrow L_0(|\nabla u|^2) \leq 2\nabla f\cdot\nabla u - 2c|\nabla u|^2 - 2\theta|D^2u|^2$$

$$+C_0 n\left[|D^2u| + |\nabla u| + |u|\right]|\nabla u|$$

$$\leq -\theta|D^2u|^2 + |\nabla f|^2 + C_1\left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)$$

به علاوه داریم:

$$L_0(u^2) = -2\sum_{i,j} a^{ij}\left(\partial_{ij}u\cdot u + \partial_i u\,\partial_j u\right) + 2\sum_i b^i\partial_i u\cdot u$$

$$= 2Lu\cdot u - 2cu^2 - 2\sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u \leq 2fu - 2cu^2 - 2\theta|\nabla u|^2$$

$$\leq f^2 + (1-2c)u^2 - 2\theta|\nabla u|^2$$

در نتیجه

$$L_0\left(|\nabla u|^2 + \alpha u^2\right) \leq -\theta|D^2u|^2 + (C_1 - 2\alpha\theta)|\nabla u|^2 + \left(C_1 + (1-2c)\alpha\right)|u|^2$$

$$+|\nabla f|^2 + \alpha|f|^2$$

$$\leq (\alpha+1)\|f\|^2_{C^1} + C_2$$

برای $\alpha = \frac{C_1}{2\theta}$ و $C_2 = C_2(\|a^{ij}\|_{C^1}, \|b^i\|_{C^1}, \|c\|_{C^1}, \theta, \|u\|_\infty)$.

برای اینکه جملات مثبت را در سمت راست حذف کنیم، فرض کنید $\Omega \subset \{x_1 > 0\}$ و در این صورت

$$L_0(e^{\beta x_1}) = (-a^{11}\beta^2 + b^1\beta)e^{\beta x_1} \leq -1$$

برای β به اندازه کافی بزرگ. درنتیجه

$$L_0\left(|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + ((\alpha+1)\|f\|^2_{C^1} + C_2)\, e^{\beta x_1}\right) \leq -\theta\, |D^2 u|^2 - |\nabla u|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \max_{\bar{\Omega}} |\nabla u|^2 \leq \max_{\bar{\Omega}} |\nabla u|^2 + \alpha u^2 + ((\alpha+1)\|f\|^2_{C^1} + C_2)\, e^{\beta x_1}$$

$$= \max_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 + C\left(\|f\|^2_{C^1} + 1\right)$$

تذکر- تخمین مشابهی برای معادله شبه‌خطی $Lu = f(x,u)$ in Ω برقرار است، وقتی $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

اثبات با اندکی تغییر مشابه بالا است. (تمرین - جزییات اثبات را بنویسید.)

گزاره زیر یک تخمین عمومی برای همه جوابهای $Lu=f(x,u)$ ارائه می‌کند.

گزاره - فرض کنید $u\in C^3(\Omega)$ جواب معادله $Lu=f(x,u)$ باشد، با شرایط گزاره قبل. آنگاه برای هر زیرمجموعه فشرده $\Omega'\subset\subset\Omega$، ثابت $C=C(\theta,\|a^{ij}\|_{C^1},\|b^i\|_{C^1},\|c\|_{C^1},\|u\|_{L^\infty},\|f\|_{C^1(\bar\Omega\times[-\|u\|_\infty,\|u\|_\infty])},\operatorname{diam}(\Omega),\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega))$ وجود دارد به طوری که

$$\sup_{\Omega'}|\nabla u|\le C.$$

اثبات - تابع برشی $\eta\in C_0^\infty(\Omega)$ را در نظر بگیرید که $0\le\eta\le 1$ و $\eta\equiv 1$ روی Ω'. تابع کمکی

$$\omega=\eta|\nabla u|^2+\alpha|u|^2+e^{\beta x_1}$$

با محاسبات مشابه گزاره قبل نتیجه می‌شود که $L\omega\le 0$ و نامساوی مورد نظر اثبات می‌شود.

اصل ماکسیمم Alexandrov

تعریف – برای تابع $u \in C(\bar{\Omega})$ مجموعه زیر را مجموعه تماس بالایی (upper contact set) می‌نامیم.

$$\Gamma^+ = \{ y \in \Omega : \exists\, p_y \in \mathbb{R}^n \text{ sth. } \forall x \in \Omega : u(x) \le u(y) + p_y \cdot (x-y) \}$$

اگر $u \in C^1(\Omega)$ و $y \in \Gamma^+$ آنگاه باید $p_y = \nabla u(y)$ و اگر $u \in C^2(\Omega)$ به علاوه باید ماتریس $D^2u(y)$ معین نامثبت باشد.

u یک تابع مقعر است اگر و تنها اگر $\Gamma^+ = \Omega$.

برای عملگر بیضوی L، قرار می‌دهیم

$$D^*(x) = \left(\det(a^{ij}(x)) \right)^{1/n}$$

که در واقع میانگین هندسی مقادیر ویژه ماتریس ضرایب است. لذا D^* یک تابع کران‌دار است که در نامساوی $0 < \theta \le D^*(x)$ صدق می‌کند.

قضیه- (اصل ماکسیمم Alexandrov) Ω یک ناحیه کران‌دار و $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ در نامساوی $Lu \leq f$ صدق می‌کند. به علاوه داریم:

$$\frac{|b|}{D^*}, \frac{f}{D^*} \in L^n(\Omega), \qquad c \geq 0 \text{ in } \Omega$$

آنگاه نامساوی زیر برقرار است

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot \operatorname{diam}\Omega \cdot \left\| \frac{f^+}{D^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+)}$$

که Γ^+ مجموعه تماس بالایی است و ثابت C به n و $\left\| \frac{|b|}{D^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+)}$ وابسته است. درحقیقت

$$C = \exp\left[\frac{2^{n-1}}{\omega_n n^n} \left(\left\| \frac{|b|}{D^*} \right\|^n_{L^n(\Gamma^+)} + 1 \right) \right]$$

که ω_n حجم گوی واحد در $\mathbb{R}^n$ است.

لم - $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ نامنفی است. آنگاه برای هر $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ داریم:

$$\int_{B_{\tilde{M}}(0)} g(x)\,dx \leq \int_{\Gamma^+} g(\nabla u)\,|\det D^2 u|\,dx$$

که $\tilde{M} = \dfrac{\sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+}{\operatorname{diam}(\Omega)}$.

نکته - حالت خاص لم بالا وقتی است که $g = 1$ باشد، و در این صورت خواهیم داشت:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{\omega_n^{1/n}} \left[\int_{\Gamma^+} |\det D^2 u|\,dx \right]^{1/n}$$

و با توجه به نامساوی

$$(2) \qquad \det(-D^2 u) \leq \left(\frac{-\sum_{i,j} a^{ij} \partial_{ij} u}{n D^*} \right)^n$$

اصل ماکسیمم Alexandrov وقتی $Lu = -\sum_{i,j} a^{ij} \partial_{ij} u$ است، اثبات می‌شود. (دقت کنید روی Γ^+، داریم $0 \leq Lu$)

اثبات نامساوی (2) با توجه به تعریف $D^* = (\det(a^{ij}))^{1/n}$ و نامساوی حسابی-هندسی سرراست است. در واقع باید نشان دهیم

$$\left[\det\left(-(a^{ij})\,D^2u\right)\right]^{1/n} \le -\frac{tr[(a^{ij})\,D^2u]}{n}$$

سمت راست میانگین حسابی مقادیر ویژه $-(a^{ij})\,D^2u$ است و سمت چپ میانگین هندسی آن.

اثبات لم - فرض کنید Σ تصویر P^+ تحت نگاشت ∇u باشد. اگر نگاشت ∇u دوسویی باشد، آنگاه

$$\int_{\Sigma} g(z)\,dz = \int_{P^+} g(\nabla u(x))\,|\det D^2u(x)|\,dx$$

اما چون نگاشت $x \longmapsto \nabla u(x)$ پوشا است و $g \ge 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\int_{\Sigma} g(z)\,dz \le \int_{P^+} g(\nabla u(x))\,|\det D^2u(x)|\,dx$$

بنابراین تنها کافی است نشان دهیم

$$B_{\tilde{M}}(0) \subseteq \Sigma$$

یا به عبارت دیگر برای هر $a \in \mathbb{R}^n$ که $|a| < \tilde{M}$ نقطه $y \in \Gamma^+$ وجود دارد به طوری که $a = \nabla u(y)$.

قرار دهید $L_a(t) = \min_{x \in \bar{\Omega}} (t + a \cdot x - u(x))$. این تابع پیوسته و برای مقادیر بزرگ t مثبت است و برای $-t$ بزرگ

منفی است. فرض کنید t_a یک ریشه $L_a(t) = 0$ باشد، آنگاه

$$t_a + a \cdot x - u(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

و برای یک $y \in \bar{\Omega}$

$$t_a + a \cdot y - u(y) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad u(y) \geq u(x) + a \cdot (y - x) \qquad \forall x \in \Omega$$

اگر $u(x_0) = \sup_{\bar{\Omega}} u$ آنگاه

$$u(y) \geq \sup_{\bar{\Omega}} u + a \cdot (y - x_0) = \tilde{M} \cdot \mathrm{diam}(\Omega) + \sup_{\partial\Omega} u^+ + a \cdot (y - x_0)$$

چون $|a| < \tilde{M}$ و $|y - x_0| \leq \mathrm{diam}(\Omega)$ پس

$$u(y) > \sup_{\partial\Omega} u^+$$

یعنی $y \notin \partial\Omega$ و در نتیجه $y \in \Omega$. لذا باید $\nabla u(y) = a$. (y نقطه‌ای است که $x \mapsto t_a + a \cdot x - u(x)$ مینیمم خود را می‌گیرد.)

اثبات اصل ماکسیمم Alexanrov – ایده اثبات این است در لم قبل به جای g تابع مناسبی قرار دهیم. مثلاً وقتی $f\equiv 0$ و $c\equiv 0$

$Lu\le f$ نتیجه می‌دهد که $-\sum a^{ij}\partial_{ij}u \le -\sum b^i\partial_i u$ و بنابراین

$$\left(-\sum a^{ij}\partial_{ij}u\right)^n \le |b|^n|\nabla u|^n$$

و گزینه $g(p)=|p|^{-n}$ به همراه تساوی (2) اثبات را کامل می‌کند. اما مشکل اینجاست که چنین تابعی در نزدیکی مبدأ انتگرال‌پذیر

نیست. لذا قرار می‌دهیم $g(p)=(|p|^n+\mu^n)^{-1}$. در حالت کلی نیز این تابع در اثبات کمک می‌کند.

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j} a^{ij}\partial_{ij}u &\le -\sum b^i\partial_i u - cu + f\\
&\le -\sum b^i\partial_i u + f^+ \qquad \text{in} \quad \Omega^+=\{x : u(x)>0\}\\
&\le |b||\nabla u| + f^+\\
&\le \left(|b|^n+\frac{(f^+)^n}{\mu^n}\right)^{1/n}\left(|\nabla u|^n+\mu^n\right)^{1/n}(1+1)^{\frac{n-2}{n}}
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$\left(-\sum a^{ij}\partial_{ij}u\right)^n \le \left(|b|^n+\frac{(f^+)^n}{\mu^n}\right)\left(|\nabla u|^n+\mu^n\right)2^{n-2}$$

الان لم قبل را برای $g(p) = \dfrac{1}{|p|^n + \mu^n}$ استفاده می‌کنیم.

$$\int_{B_{\tilde{M}}(0)} g(x)\,dx \le \frac{2^{n-2}}{n^n} \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} \frac{|b|^n + \mu^{-n}(f^+)^n}{(D^*)^n}\,dx$$

با محاسبه انتگرال سمت چپ خواهیم داشت:

$$\int_{B_{\tilde{M}}(0)} g(x)\,dx = \omega_n \int_0^{\tilde{M}} \frac{r^{n-1}}{r^n + \mu^n}\,dr = \frac{\omega_n}{n} \log \frac{\tilde{M}^n + \mu^n}{\mu^n}$$

$$\tilde{M}^n + \mu^n \le \mu^n \exp\left[\frac{2^{n-2}}{n^{n-1}\omega_n} \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} \frac{|b|^n + \mu^{-n}(f^+)^n}{(D^*)^n}\,dx\right]$$

با قرار دادن $\mu = \| f^+/D^* \|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}$ اثبات کامل خواهد شد.

PDE

جلسه بیست و چهارم ۹۹/۳/۱۷

مقادیر ویژه :

اگر مسأله زیر برای $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

جواب غیربدیهی $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ داشته باشد، آنگاه λ مقدار ویژه عملگر L و u تابع ویژه متناظر آن خواهد بود.

در جلسه ۱۹ اشاره شد که طیف عملگر دیفرانسیلی L، تنها شامل مقادیر ویژه است و اگر L خودالحاق باشد، ($L = L^*$ یا به طور معادل $b^i = 0$)، آنگاه مقادیر ویژه یک دنباله اعداد حقیقی است که به بی‌نهایت می‌رود. قضیه زیر از خواص عملگرهای فشرده و خودالحاق نتیجه خواهد شد.

قضیه - اگر

$$Lu = -\sum_{i,j} \partial_i (a^{ij} \partial_j u) + cu$$

آنگاه: (۱) همه مقادیر ویژه L حقیقی هستند.

(۲) بعد فضای ویژه متناظر هر مقدار ویژه متناهی است.

(3) توابع ویژه متناظر دو مقدار ویژه متمایز در $L^2(\Omega)$ بر هم عمود هستند. یعنی اگر

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} Lv = \mu v & \text{in } \Omega \\ v=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

و $\lambda \neq \mu$ آنگاه $\int_\Omega uv \, dx = 0$.

(4) پایه متعامدیکه $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ از $L^2(\Omega)$ وجود دارد که همگی توابع ویژه L هستند.

(5) اگر $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله مقادیر ویژه L باشند، آنگاه $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

(6) اگر $c \geq 0$، آنگاه همه مقادیر ویژه مثبت هستند.

تعریف- اگر L یک عملگر خودالحاق باشد، کوچکترین مقدار ویژه آن را مقدار ویژه اصلی می‌نامیم و با λ_1 نشان می‌دهیم.

قضیه زیر خواصی از این مقدار ویژه و تابع ویژه متناظر آن را نشان می‌دهد. در این قضیه منظور از $B[\cdot,\cdot]$ فرم دوخطی متناظر L است.

$$B[u,v] = \int_\Omega \sum_{i,j} a^{ij} \partial_i u \, \partial_j v + cuv \, dx$$

قضیه - اگر ضرایب هموار باشند آنگاه

$$\lambda_1 = \min_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{B[u,u]}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} \qquad (i)$$

(ii) متناظر λ_1 یک تابع ویژه مثبت وجود دارد.

(iii) تکرر مقدار ویژه λ_1 برابر یک است.

اثبات - برای اثبات می‌توانیم فرض کنیم $c \geq 0$ وگرنه کافی است عملگر را با ثابت $\|c\|_\infty$ جمع کنیم. آنگاه دنباله مقادیر ویژه با مقدار ثابت $\|c\|_\infty$ جمع خواهد شد. حال $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ را پایه متعامد یکه $L^2(\Omega)$ از توابع ویژه L بگیرید که بنابر قضیه قبل وجود دارد.

$$\begin{cases} L\omega_k = \lambda_k \omega_k & \text{in } \Omega \\ \omega_k = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad B[\omega_k, \omega_k] = \lambda_k \|\omega_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_k \qquad (1)$$

$$B[\omega_k, \omega_l] = \lambda_k (\omega_k, \omega_l)_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad k \neq l \qquad (2)$$

اگر $u \in H_0^1(\Omega)$ و $\|u\|_{L^2(\Omega)}=1$ ، آنگاه می‌توان نوشت

$$(3) \qquad u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k \quad , \quad d_k = (u, w_k)_{L^2(\Omega)}$$

که این سری در $L^2(\Omega)$ همگرا است. به علاوه

$$(4) \qquad 1 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

برای محاسبه $B[u,u]$ باید سری (3) در $H_0^1(\Omega)$ همگرا باشد. دقت کنید شرط $c \geq 0$ باعث می‌شود $B[\cdot,\cdot]$ یک ضرب داخلی روی $H_0^1(\Omega)$ ارائه کند و روابط (1) و (2) نشان می‌دهد که $\left\{\frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه $H_0^1(\Omega)$ است (نسبت به این ضرب داخلی جدید)

برای اینکه نشان دهیم $\left\{\frac{w_k}{\lambda_k^{1/2}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه است، باید نشان دهیم اگر

$$B[v, w_k] = 0 \qquad k=1,2,\dots$$

آنگاه باید $v \equiv 0$. اما از خاصیت مقدار ویژه w_k نتیجه می‌شود که

$$0 = B[v, w_k] = \lambda_k (v, w_k)_{L^2}$$

در نتیجه v در $L^2(\Omega)$ بر همه توابع w_k عمود است و چون $\{w_k\}$ پایه $L^2(\Omega)$ است بنابراین $v \equiv 0$.

لذا اگر

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{\omega_k}{\lambda_k^{1/2}} \quad \text{in } H_0^1(\Omega)$$

که $\mu_k = B\left[u, \frac{\omega_k}{\lambda_k^{1/2}}\right]$ برابر $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k^{1/2}} B[u, \omega_k] = \frac{1}{\lambda_k^{1/2}} \lambda_k (u, \omega_k)_{L^2} = \lambda_k^{1/2} d_k$.

درنتیجه سری (3) در $H_0^1(\Omega)$ همگرا است . حال $B[u,u]$ را محاسبه می‌کنیم :

$$B[u,u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_1 \underset{(4)}{=} \lambda_1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 \leq \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1}} B[u,u]$$

و تساوی برای $u = \omega_1$ تابع ویژهٔ متناظر λ_1 برقرار است .

برای اثبات (iii) ابتدا نشان می‌دهیم که

$$(5) \qquad B[u,u] = \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \iff u \in H^1_0(\Omega) \text{ تابع ویژه متناظر } \lambda_1 \text{ است}$$

اثبات $\Leftarrow$ واضح است. برعکس فرض کنید $B[u,u] = \lambda_1$ و سری زیر را در نظر بگیرید:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \omega_k, \qquad d_k = (u, \omega_k)_{L^2(\Omega)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = 1$$

$$\lambda_1 = B[u,u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \implies \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 (\lambda_k - \lambda_1) = 0$$

$$\implies d_k = 0 \quad \text{if} \quad \lambda_k > \lambda_1$$

$$\implies u = \sum_{k=1}^{m} d_k \omega_k$$

که $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$ و m تکرر مقدار ویژه λ_1 است. درنتیجه u نیز یک تابع ویژه متناظر λ_1 خواهد بود و بدین ترتیب (5) اثبات می‌شود. حال u را یک تابع ویژه متناظر λ_1 بگیرید. برای اثبات (iii) نشان می‌دهیم $u > 0$ در Ω یا $u < 0$ در Ω.

برای این منظور قرار دهید $u = u^+ - u^-$ که $u^\pm = \max(\pm u, 0)$. آنگاه $u^\pm \in H_0^1(\Omega)$ است و $B[u^+, u^-] = 0$.

بافرض $\|u\|_{L^2} = 1$ از (5) خواهیم داشت:

$$\lambda_1 = B[u,u] = B[u^+ - u^-, u^+ - u^-] = B[u^+, u^+] + B[u^-, u^-]$$

$$\underset{(i)}{\geq} \lambda_1 \left(\|u^+\|_{L^2}^2 + \|u^-\|_{L^2}^2 \right) = \lambda_1$$

$$\Rightarrow \quad B[u^+, u^+] = \lambda_1 \|u^+\|_{L^2}^2 \ , \quad B[u^-, u^-] = \lambda_1 \|u^-\|_{L^2}^2$$

$\overset{(5)}{\Longrightarrow}$ u^+ و u^- توابع ویژه متناظر λ_1 هستند.

رابطه $Lu^+ = \lambda_1 u^+ \geq 0$ ثابت می‌کند که $u^+ \in C^\infty(\Omega)$ و بنابر اصل ماکسیمم قوی $u^+ > 0$ در Ω یا $u^+ \equiv 0$. نتیجه مشابه

برای u^- نیز برقرار است و بدین ترتیب اثبات (ii) کامل می‌شود.

برای اثبات (iii) دو تابع ویژه‌ی نامنفی u و $\tilde{u}$ متناظر λ_1 در نظر بگیرید. بنابر اثبات قسمت قبل u و $\tilde{u}$ هیچ‌کدام در Ω تغییر علامت نمی‌دهند. لذا $\int_\Omega \tilde{u}\, dx \neq 0$ و ثابت α وجود دارد که

$$\int_\Omega u\, dx = \alpha \int_\Omega \tilde{u}\, dx \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega (u - \alpha\tilde{u})\, dx = 0$$

تابع $u - \alpha\tilde{u}$ یک تابع ویژه‌ی متناظر λ_1 است و بنابر اثبات قسمت قبل در Ω تغییر علامت نمی‌دهد یا اینکه $u - \alpha\tilde{u} = 0$.

$$\Rightarrow \quad u = \alpha\tilde{u} \quad \text{in } \Omega.$$

بنابراین مقدار λ_1 ساده است.

نکته- تعامد توابع ویژه در L^2 ثابت می‌کند که بقیه‌ی توابع ویژه حتماً در Ω تغییر علامت می‌دهند. بنابراین اگر بدانیم تابع $u > 0$ در معادله

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

صدق می‌کند، آنگاه $\lambda = \lambda_1$ است و u تابع ویژه‌ی متناظر آن.

وقتی عملگر L خودالحاق نباشد، لزوماً مقادیر ویژه حقیقی نیستند. اما قضیه زیر نشان می‌دهد که در این حالت نیز مفهوم مقدار ویژه اصلی تعریف می‌شود که یک مقدار ویژه ساده (تکرر یک) است و تابع ویژه متناظر آن در Ω تغییر علامت نمی‌دهد.

قضیه -
$$Lu = -\sum_{i,j} a^{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i} b^{i}\partial_{i}u + cu$$

a^{ij}, b^{i}, c هموار هستند و $c \geq 0$.

(i) مقدار ویژه حقیقی λ_1 برای L وجود دارد، به طوری که اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ مقدار ویژه دیگری باشد، آنگاه

$$\mathrm{Re}(\lambda) \geq \lambda_1$$

(ii) متناظر λ_1 تابع ویژه w_1 وجود دارد که در Ω مثبت است.

(iii) مقدار ویژه λ_1 ساده است.

اثبات ـ قرار دهید $X=H^{n+1}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. بنابر قضایای نشاندن سوبولف می‌دانیم $X\subset C^2(\bar{\Omega})$.

عملگر فشرده $A:X\longrightarrow X$ را درنظر بگیرید که $Af=u$ وقتی u جواب مسأله زیر است:

$$\begin{cases} Lu=f & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

اگر $C=\{u\in X: u\geq 0 \text{ in } \Omega\}$ آنگاه بنابر اصل ماکسیمم $A:C\longrightarrow C$ خوش تعریف است.

نشان می‌دهیم A یک مقدار ویژه حقیقی دارد. اگر $C\ni w\not\equiv 0$ و $v=A(w)$ آنگاه بنابر اصل ماکسیمم قوی و لم هوپف

$$v>0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}<0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

چون $w=0$ روی $\partial\Omega$ بنابراین باید $\frac{w}{v}$ روی $\bar{\Omega}$ کران دار باشد. لذا ثابت $\mu>0$ وجود دارد که

$$w\leq \mu v \quad \text{in } \Omega.$$

تابع w را مطابق بالا درنظر بگیرید، برای مقادیر ثابت $\eta>0$ و $\epsilon>0$ ادعا می‌کنیم:

اگر $u=\eta A[u+\epsilon w]$ برای $u\in C$ آنگاه $\eta\leq\mu$. (۶)

برای اثبات (6) فرض کنید $x\in C$ جواب $x=\eta A[x+\epsilon w]$ باشد، آنگاه

$$x=\eta A[x]+\eta A[\epsilon w] \ge \eta A[\epsilon w] = \eta\epsilon v \ge \frac{\eta}{\mu}\epsilon w$$

$$\Rightarrow \quad x-\frac{\eta}{\mu}\epsilon w \in C \quad \Rightarrow \quad A\left[x-\frac{\eta}{\mu}\epsilon w\right]\ge 0$$

$$\Rightarrow \quad x=\eta A[x]+\eta A[\epsilon w]\ge \eta A[x]\ge \frac{\eta^2}{\mu}\epsilon A[w] = \frac{\eta^2}{\mu}\epsilon v \ge \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2\epsilon w$$

با تکرار محاسبات بالا نتیجه خواهد شد، $x\ge\left(\frac{\eta}{\mu}\right)^k\epsilon w$ برای هر $k=1,2,\dots$. درنتیجه باید $\eta\le\mu$.

حال قرار دهید

$$S_\epsilon=\{x\in C \ : 0\le\eta\le 2\mu \ \text{برای یک مقدار}\ x=\eta A[x+\epsilon w]\}$$

S_ϵ بیکران است وگرنه بنابر قضیه نقطه ثابت Schaefer (در جلسات بعد راجع به آن صحبت خواهیم) معادله $x=2\mu A[x+\epsilon w]$ جواب خواهد داشت که با (6) تناقض دارد.

اگر $T: X\longrightarrow X$ یک نگاشت فشرده روی فضای باناخ X باشد و مجموعه $\{x\in X : 0\le\sigma\le 1 \ \text{برای}\ x=\sigma T[x]\}$ در X کران دار باشد، آنگاه T نقطه ثابت دارد.

از فشردگی مجموعه S_ϵ نتیجه می‌شود که دنباله $v_\epsilon \in C$ و $0 \leq \eta_\epsilon \leq 2\mu$ وجود دارد که $\|v_\epsilon\|_X \geq 1/\epsilon$ و

$$v_\epsilon = \eta_\epsilon A[v_\epsilon + \epsilon w]$$

اگر قرار دهیم $u_\epsilon = \frac{v_\epsilon}{\|v_\epsilon\|_X}$ آنگاه در یک زیردنباله $u_{\epsilon_k} \xrightarrow{X} w_1$ و $\eta_\epsilon \to \eta$ وقتی $\epsilon_k \to 0$

تحدب C نتیجه می‌دهد که $w_1 \in C$ و بنا بر فشردگی A داریم:

$$u_\epsilon \xrightarrow{X} w_1 , \qquad w_1 = \eta A[w_1]$$

همگرایی قوی نتیجه می‌دهد $\|w_1\|_X = 1$ و در نتیجه باید $\eta \neq 0$ و w_1 تابع ویژه متناظر مقدار ویژه حقیقی η است. در ضمن شرط

$w_1 \in C$، اصل ماکسیمم قوی و لم هویف نشان می‌دهد که

$$(7) \qquad w_1 > 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial \nu} < 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

حال فرض کنید $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه بوده و u تابع ویژه (مختلط مقدار) متناظر آن باشد. برای یک تابع هموار و مثبت $w : \Omega \to \mathbb{R}$

قرار دهید $v = \frac{u}{w}$ و از تساوی $Lu = \lambda u$ می‌توان نوشت:

$$\lambda v = \frac{1}{\omega} L(v\omega) = Lv - cv - \frac{2}{\omega}\sum_{i,j} a^{ij}\, \partial_j \omega\, \partial_i v + \frac{v}{\omega} L\omega$$

و قرار دهید:

$$Kv := -\sum_{i,j} a^{ij}\, \partial_{ij} v + \sum_i b_*^i\, \partial_i v$$

که

$$b_*^i = b^i - \frac{2}{\omega}\sum_j a^{ij}\, \partial_j \omega$$

$$\Rightarrow \quad Kv + \left(\frac{L\omega}{\omega} - \lambda\right) v = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\Rightarrow \quad K\bar{v} + \left(\frac{L\omega}{\omega} - \bar{\lambda}\right) \bar{v} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\Rightarrow K(|v|^2) = \bar{v} K v + v K \bar{v} - 2\sum_{i,j} a^{ij}\, \partial_i v\, \partial_j \bar{v} \le \bar{v} K v + v K \bar{v}$$

(دقت کنید که $\sum a^{ij} \xi_i \bar{\xi}_j = \sum a^{ij} \left[(\mathrm{Re}\, \xi_i)\mathrm{Re}(\xi_j) + \mathrm{Im}(\xi_i)\mathrm{Im}(\xi_j)\right] \ge 0$ برای هر $\xi \in \mathbb{C}^n$)

$$\Rightarrow \quad K(|v|^2) \le 2\left(\mathrm{Re}\,\lambda - \frac{L\omega}{\omega}\right)|v|^2$$

حال در رابطه بالا قرار دهید $w = w_1^{1-\epsilon}$ برای $0<\epsilon<1$. آنگاه

$$Lw = \frac{1-\epsilon}{w_1^{\epsilon}} Lw_1 + \frac{\epsilon(1-\epsilon)}{w_1^{1+\epsilon}} \sum_{i,j} a^{ij}\, \partial_i w_1\, \partial_j w_1 + \epsilon c\, w_1^{1-\epsilon} \ge \lambda_1 (1-\epsilon)\, w$$

$$\Rightarrow \quad K(|v|^2) \le 2\left(\operatorname{Re}\lambda - (1-\epsilon)\lambda_1\right)|v|^2$$

بنابراین اگر $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_1$ آنگاه برای یک مقدار $0<\epsilon$ باید $K(|v|^2)\le 0$. از طرفی $v=\frac{u}{w}=0$ روی $\partial\Omega$ زیرا

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = (1-\epsilon)\, w_1^{-\epsilon}\, \frac{\partial w_1}{\partial \nu}$$

بنابراین به کمک اصل ماکسیمم نتیجه می‌گیریم که $v\equiv 0$ در Ω. یعنی $u\equiv 0$ و λ نمی‌تواند مقدار ویژه باشد. بدین ترتیب

اثبات (i) و (ii) کامل می‌شود. برای اثبات (iii) فرض کنید u یک تابع ویژه (مختلط مقدار) متناظر λ_1 باشد.

بنابراین $\operatorname{Re} u$ و $\operatorname{Im} u$ نیز تابع ویژه هستند. لذا می‌توانیم فرض کنیم u یک تابع حقیقی است. با جایگزینی $-u$ به جای u

نیز می‌توانیم فرض کنیم $u>0$ در یک جایی از Ω. قرار دهید

$$\chi := \sup\{\mu>0 : \; w_1 \ge \mu u \text{ in } \Omega\}$$

دقت کنید که (7) تضمین می‌کند که $0 < \chi < \infty$ حال قرار دهید $v = \omega_1 - \chi u$ که $v \geq 0$ و تابع ویژه λ_1 است.

اگر v برابر صفر نباشد، از آنجا که $Lv = \lambda_1 v \geq 0$ ، اصل ماکسیمم و لم هوپف نتیجه می‌دهد

$$v > 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < 0 \text{ on } \partial\Omega$$

بنابراین $\frac{u}{v}$ در Ω کران‌دار است و $v - \epsilon u \geq 0$ برای یک مقدار $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 - (\chi + \epsilon) u \geq 0 \text{ in } \Omega$$

که با انتخاب χ تناقض دارد. لذا باید $v \equiv 0$ در Ω و در نتیجه $\omega_1 = \chi u$.

PDE

جلسه بیست و پنجم ۹۹/۳/۱۹

قضایای وجود جواب

روش پرون (Perron)

این روش برای اثبات وجود جواب حتی برای عملگرهای غیرخطی به کار می رود. اما برای سادگی آن را برای عملگر لاپلاس توضیح می دهیم.

Ω را دامنه‌ای کراندار در $\mathbb{R}^n$ بگیرید و φ یک تابع پیوسته روی $\partial\Omega$. می خواهیم نشان دهیم که مسأله

$$(1)\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

دارای جواب است. البته فرض می کنیم وقتی Ω یک گوی است براساس فرمول پواسون (جلسه ۸ام) می دانیم که معادله جواب دارد.

ایده اصلی این است که سوپریمم همه زیرجوابها را در نظر می گیریم و ثابت می کنیم که در (1) صدق می کند.

تعریف - فرض کنید v یک تابع پیوسته در Ω باشد. آنگاه v زیرهارمونیک (subharmonic) [(Superharmonic) فراهارمونیک] در Ω است اگر برای هر گوی $B \subseteq \Omega$ و هر تابع هارمونیک $\omega \in C(\bar{B})$ که $v \le \omega$ [$\ge$] روی ∂B نتیجه شود $v \le \omega$ [$\ge$] در B.

اگر $v \in C^2$ باشد، آنگاه v را زیرهارمونیک [فراهارمونیک] است اگروتنها اگر $-\Delta v \leq 0$ [$\geq$] .

همچنین اگر $v \in H^1(\Omega)$ به طورضعیف زیرهارمونیک [فراهارمونیک] خواهد بود هرگاه

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \leq 0 \;\; [\geq] \qquad \forall\, 0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

لم ۱- (اصل مقایسه) اگر Ω کران دار باشد و $u \in C(\bar{\Omega})$ زیرهارمونیک و $v \in C(\bar{\Omega})$ فراهارمونیک در Ω باشد که

$u \leq v$ روی $\partial\Omega$، آنگاه $u \leq v$ در Ω .

اثبات- قرار دهید $M = \max\limits_{\Omega} (u-v)$ و

$$D = \{ x \in \Omega : u(x) - v(x) = M \}$$

از پیوستگی u و v واضح است که D بسته است. نشان می‌دهیم D یک مجموعه باز است و در نتیجه ثابت می‌شود که $u=v$ روی هر مؤلفه همبندی Ω .

دقت کنید چون $u-v \leq 0$ روی $\partial\Omega$ و با فرض اینکه $0 < M$ ، خواهیم داشت $D \cap \partial\Omega = \emptyset$. اگر $x_0 \in D$ ، مقدار $r < \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$

را انتخاب کرده و $\bar{u}$ و $\bar{v}$ را جواب مسأله‌های زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta \bar{u} = 0 \quad \text{in } B_r(x_0), \qquad \bar{u} = u \quad \text{on } \partial B_r(x_0)$$

$$\Delta \bar{v} = 0 \quad \text{in } B_r(x_0), \qquad \bar{v} = v \quad \text{on } \partial B_r(x_0)$$

وجود $\bar{u}$ و $\bar{v}$ از فرمول انتگرال پواسون نتیجه می‌شود. بنابر تعریف زیرهارمونیک و زبرهارمونیک می‌دانیم که $\bar{v} \leq v$ و $u \leq \bar{u}$ در $B_r(x_0)$.

$$\Longrightarrow \qquad u - v \leq \bar{u} - \bar{v} \qquad \text{in } B_r(x_0)$$

از طرفی

$$\begin{cases} \Delta(\bar{u} - \bar{v}) = 0 & \text{in } B_r(x_0) \\ \bar{u} - \bar{v} = u - v & \text{on } \partial B_r(x_0) \end{cases}$$

و بنابر اصل ماکسیمم داریم: $\bar{u} - \bar{v} \leq M$ در $B_r(x_0)$. لذا

$$M \geq \bar{u}(x_0) - \bar{v}(x_0) \geq u(x_0) - v(x_0) = M$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}(x_0) - \bar{v}(x_0) = M \quad \Rightarrow \quad \bar{u} - \bar{v} = M \quad \text{in } B_r(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad u - v = M \quad \text{on } \partial B_r(x_0)$$

وچون مقدار r دلخواه است پس در $B_r(x_0)$ باید $u-v=M$ باشد. لذا باید $B_r(x_0) \subseteq D$ و D یک مجموعه باز است.

لم ۲- اگر $v \in C(\bar{\Omega})$ یک زیرهارمونیک در Ω باشد و B یک گوی که $\bar{B} \subseteq \Omega$. تابع ω را با فرض $\omega = v$ در $\bar{\Omega} \setminus B$ و $\Delta\omega = 0$ در B درنظر بگیرید. آنگاه ω یک زیرهارمونیک در Ω است که $v \leq \omega$.

اثبات - رابطه $v \leq \omega$ از تعریف زیرهارمونیک نتیجه می‌شود. اما برای اینکه نشان دهیم ω زیرهارمونیک است، گوی $B' \subseteq \Omega$ و تابع هارمونیک $u \in C(\bar{B'})$ با شرط $\omega \leq u$ روی $\partial B'$ را درنظر بگیرید. لذا باید $v \leq u$ روی $\partial B'$ وچون v زیرهارمونیک است، پس $v \leq u$ در B'. درنتیجه $\omega \leq u$ در $B' \setminus B$. (درخارج از B داریم $v = \omega$). اما در $B \cap B'$، u و ω هردو تابع هارمونیک هستند و روی $\partial(B \cap B')$ داریم $\omega \leq u$. بنابراصل ماکسیمم نتیجه می‌گیریم که $\omega \leq u$ در $B \cap B'$.

لذا $\omega \leq u$ در B' و ω یک تابع زیرهارمونیک است.

تعریف ـ تابع ω در صورت لم فوق، بالابر هارمونیک (harmonic lifting) تابع v در B نامیده می‌شود.

برای حل مسأله (۱) به روش پرون تابع زیر را تعریف کنید:

$$S = \{ v : \ v \in C(\bar{\Omega}) \text{ زیرهارمونیک است و } v \leq \varphi \text{ روی } \partial\Omega \}$$

$$u_\varphi(x) := \sup_{v \in S} v(x)$$

در دو لم بعد نشان می‌دهیم که u_φ در (۱) صدق می‌کند.

لم ۳ـ اگر Ω یک دامنه کران‌دار و φ تابع کران‌دار روی $\partial\Omega$ باشد. آنگاه u_φ یک تابع هارمونیک در Ω است.

اثبات ـ گام اول: نشان می‌دهیم u_φ خوش‌تعریف است. برای این منظور قرار دهید

$$m = \min_{\partial\Omega} \varphi , \qquad M = \max_{\partial\Omega} \varphi$$

تابع ثابت m در S قرار دارد و در نتیجه $S \neq \emptyset$. از طرفی تابع ثابت M یک تابع هارمونیک است که $\varphi \leq M$ روی $\partial\Omega$.

بنابر لم ۱، $v \leq M$ برای هر $v \in S$. در نتیجه u_φ خوش‌تعریف است و $u_\varphi \leq M$ در Ω.

گام دوم ـ مجموعه S نسبت به ماکسیمم گرفتن از تعدادی متناهی عضو بسته است. اگر $v_1, v_2, \dots, v_k \in S$ دلخواه باشند و

$$v = \max\{v_1, \dots, v_k\}$$

از تعریفِ زیرهارمونیک و اصل مقایسه واضح است که ماکسیمم زیرهارمونیک است و $v \in S$.

گام سوم ـ u_φ در هر گوی $B_r(x_0)$ هارمونیک است. دنباله $v_i \in S$ وجود دارد که

$$\lim_{i\to\infty} v_i(x_0) = u_\varphi(x_0)$$

در هر کجا که لازم باشد، می‌توانیم v_i را با یکِ $\bar{v}_i \in S$ جایگزین کنیم که $v_i \le \bar{v}_i$. (چرا؟)

در ابتدا v_i را با $\max\{m, v_i\}$ جایگزین می‌کنیم. لذا می‌توانیم فرض کنیم

$$m \le v_i \le u_\varphi \quad \text{in} \quad \Omega$$

برای هر v_i تابع w_i را بالابرِ هارمونیک آن در $B_r(x_0)$ بگیرید. یعنی $w_i = v_i$ در $\Omega \setminus B_r(x_0)$ و

$\Delta w_i = 0$ در $B_r(x_0)$. بنابر لم ۲، $v_i \le w_i \in S$ و می‌توانیم آن را جایگزینِ v_i کنیم.

در نتیجه باید $\lim_{i\to\infty} \omega_i(x_0) = u_\varphi(x_0)$ و $m \le \omega_i \le u_\varphi$. $\{\omega_i\}$ دنباله از توابع هارمونیک کران دار هستند،
در نتیجه یک زیر دنباله ای از آن وجود دارد که به تابع هارمونیک ω در هر زیرمجموعه فشرده $B_r(x_0)$ همگرا است. (تخمین مشتق توابع
هارمونیک و قضیه آرزلا-اسکولی) بنابراین تابع هارمونیک ω در

$$\omega \le u_\varphi , \qquad \omega(x_0) = u_\varphi(x_0)$$

صدق می کند. برای اتمام اثبات نشان می دهیم $\omega = u_\varphi$ در $B_r(x_0)$. نقطه $\bar{x} \in B_r(x_0)$ دلخواه در نظر بگیرید. برای اینکه نشان دهیم
$\omega(\bar{x}) = u_\varphi(\bar{x})$ فرآیند اثبات بالا را برای $\bar{x}$ به جای x_0 تکرار کنید. دنباله $\bar{v}_i \in S$ وجود دارد که

$$\lim_{i\to\infty} \bar{v}_i(\bar{x}) = u_\varphi(\bar{x}).$$

با جایگزینی $\bar{v}_i$ با $\max\{\bar{v}_i, \omega_i\}$ می توانیم فرض کنیم

$$\omega_i \le \bar{v}_i \le u_\varphi$$

و اگر $\bar{\omega}_i$ بالابر هارمونیک $\bar{v}_i$ در $B_r(x_0)$ باشد، آنگاه $\omega_i \le \bar{v}_i \le \bar{\omega}_i \le u_\varphi$ و $\lim_{i\to\infty} \bar{\omega}_i(\bar{x}) = u_\varphi(\bar{x})$.
اگر $\bar{\omega}_i$ همگرا به تابع هارمونیک $\bar{\omega}$ در زیرمجموعه های فشرده $B_r(x_0)$ باشد، روابط زیر برقرار است:

$$w \leq \bar{w} \leq u_\varphi \qquad \text{in } B_r(x_0)$$

$$w(x_0) = \bar{w}(x_0) = u_\varphi(x_0)$$

$$\bar{w}(\bar{x}) = u_\varphi(\bar{x})$$

حال اصل ماکسیمم قوی را برای تابع هارمونیکِ $\bar{w} - w$ به کار ببرید. نتیجه خواهد شد $w = \bar{w}$ در $B_r(x_0)$ علی الخصوص

$$w(\bar{x}) = \bar{w}(\bar{x}) = u_\varphi(\bar{x}).$$

لم ۴ - اگر تابع φ روی $\partial\Omega$ پیوسته و برای نقطه $x_0 \in \partial\Omega$ تابع زیرهارمونیکِ $w_{x_0} \in C(\bar{\Omega})$ وجود داشته باشد که

$$w_{x_0}(x_0) = 0 \quad , \quad w_{x_0}(x) < 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \setminus \{x_0\}$$

آنگاه $\lim_{x \to x_0} u_\varphi(x) = \varphi(x_0)$.

نکته - تابع w_{x_0} به barrier function معروف است. اگر Ω در شرط گوی خارجی در نقطه $x_0 \in \partial\Omega$ صدق کند، یعنی گوی $B_r(y_0)$ وجود داشته باشد که $\Omega \cap B_r(y_0) = \phi$ و $\bar{\Omega} \cap \overline{B_r(y_0)} = \{x_0\}$، آنگاه تابع w_{x_0} به صورت زیر می‌تواند باشد که Φ تابع اساسی لاپلاس است.

$$w_{x_0}(x) = \Phi(x - y_0) - \Phi(x_0 - y_0) \qquad x \in \bar{\Omega}$$

اثبات ـ بنابر پیوستگی φ مقدار $\delta>0$ وجود دارد که

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\le \epsilon \qquad \forall\, x\in \partial\Omega\cap B_\delta(x_0)$$

حال اگر $M=\max_{\partial\Omega}|\varphi|$ ، ثابت K را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنید که

$$-K\omega(x)\ge 2M \qquad \forall\, x\in\partial\Omega\setminus B_\delta(x_0)$$

$$\Rightarrow\ |\varphi(x)-\varphi(x_0)|\le \epsilon-K\omega(x) \qquad \forall\, x\in\partial\Omega$$

تابع $\varphi(x_0)-\epsilon+K\omega$ یک زیرهارمونیک در Ω است که $\varphi(x_0)-\epsilon+K\omega\le\varphi$ روی $\partial\Omega$. درنتیجه

$$\varphi(x_0)-\epsilon+K\omega\in S \ \Rightarrow\ \varphi(x_0)-\epsilon+K\omega\le u_\varphi \quad \text{in } \Omega$$

ازطرف دیگر $\varphi(x_0)+\epsilon-K\omega$ یک زبرهارمونیک در Ω است که $\varphi(x_0)+\epsilon-K\omega\ge\varphi$ روی $\partial\Omega$. درنتیجه بنابر لم ۱ برای هر $v\in S$ داریم $v\le\varphi(x_0)+\epsilon-K\omega$ در Ω و بالتبع

$$u_\varphi\le\varphi(x_0)+\epsilon-K\omega \quad \text{in } \Omega$$

بنابراین $\quad |u_\varphi - \varphi(x_0)| \leq \epsilon - K\omega \quad \text{in } \Omega$

$$\Rightarrow \limsup_{x \to x_0} |u_\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \epsilon .$$

PDE

جلسه بیست و شش ۹۹/۳/۲۶

روش زیر- فرا (Sub-Sup)

در این روش از اصل مقایسه (ماکسیمم) استفاده شده و دنباله‌ای صعودی از زیرجوابها ساخته می‌شود. حد این دنباله جواب مسأله است. به طور دقیق‌تر اگر $\underline{u}$ و $\bar{u}$ به ترتیب زیرجواب و فراجواب

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

باشند که $\underline{u} \le \bar{u}$، نشان می‌دهیم مسأله بالا جوابی دارد که $\underline{u} \le u \le \bar{u}$.

تعریف - $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ زیرجواب (فراجواب) ضعیف مسأله (1) است، اگر

$$(2)\quad \int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \underset{(\ge)}{\le} \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi \, dx \qquad \forall\ 0 \le \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

به وضوح اگر $\underline{u} \in H^2$ تعریف بالا معادل است با اینکه $-\Delta \underline{u} \underset{(\ge)}{\le} f(x,\underline{u})$.

قضیه- فرض کنید f روی $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ یک تابع C^1 باشد. اگر $\underline{u}$ و $\bar{u}$ به ترتیب زیرجواب ضعیف و زبرجواب ضعیف (1) باشند که

$$\underline{u}\leq 0\ ,\ \bar{u}\geq 0 \quad \text{on } \partial\Omega \ (\text{trace به معنای}) \quad , \quad \underline{u}\leq\bar{u} \quad \text{a.e. in } \Omega$$

آنگاه یک جواب ضعیف u از (1) وجود دارد به طوری که $\underline{u}\leq u\leq\bar{u}$ در Ω.

اثبات- قرار دهید $m=\inf\limits_{\Omega}\underline{u}$ و $M=\sup\limits_{\Omega}\bar{u}$ و مقدار $\lambda>0$ را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنید که

$$f_u(x,u)>-\lambda \qquad \forall\,(x,u)\in\bar{\Omega}\times[m,M].$$

حال دنباله $\{u_k\}$ را به صورت زیر می‌سازیم. $u_0=\underline{u}$ و $u_{k+1}\in H_0^1(\Omega)$ را جواب ضعیف و یکتای مسأله زیر قرار می‌دهیم.

$$(3)\begin{cases}-\Delta u_{k+1}+\lambda u_{k+1}=f(x,u_k)+\lambda u_k & \text{in } \Omega\\ u_{k+1}=0 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

ادعا می‌کنیم: $\quad \underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq \overline{u}$

برای اثبات این ادعا ابتدا (3) را برای $k=0$ در نظر بگیرید. بنابر تعریف جواب ضعیف

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi + \lambda u_1 \varphi \, dx = \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi + \lambda \underline{u}\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

اگر $0 \leq \varphi$ باشد، از (2) نتیجه می‌شود که

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - \underline{u}) \cdot \nabla \varphi + \lambda (u_1 - \underline{u})\varphi \, dx \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

حال در این رابطه قرار دهید $\varphi = (\underline{u} - u_1)_+$ ، نتیجه خواهد شد:

$$-\int_\Omega |\nabla(\underline{u} - u_1)_+|^2 + \lambda |(\underline{u} - u_1)_+|^2 \, dx \geq 0$$

بنابراین $(\underline{u} - u_1)_+ = 0$ و $\underline{u} \leq u_1$ تقریباً همه جا در Ω.

حال به صورت استقرایی فرض می‌کنیم رابطه $u_{k-1} \leq u_k$ را داریم و به طور مشابه از (3) خواهیم داشت:

$$\int_\Omega \nabla u_{k+1}\cdot\nabla\varphi + \lambda u_{k+1}\varphi \, dx = \int_\Omega \big(f(x,u_k)+\lambda u_k\big)\varphi \, dx \qquad \forall \varphi\in H_0^1(\Omega)$$

$$\int_\Omega \nabla u_{k}\cdot\nabla\varphi + \lambda u_{k}\varphi \, dx = \int_\Omega \big(f(x,u_{k-1})+\lambda u_{k-1}\big)\varphi \, dx$$

این دو رابطه را از هم کم کنید و قرار دهید $\varphi = (u_k - u_{k+1})_+$:

$$(4)\quad -\int |\nabla (u_k-u_{k+1})_+|^2 + \lambda |(u_k-u_{k+1})_+|^2 \, dx = \int \Big[\big(f(x,u_k)+\lambda u_k\big) - \big(f(x,u_{k-1})+\lambda u_{k-1}\big)\Big] \times (u_k-u_{k+1})_+ \, dx$$

از شرط $f_u > -\lambda$ و $u_{k-1} \le u_k$ نتیجه می‌شود که سمت راست عبارت بالا مثبت است. زیرا

$$f(x,u_k) - f(x,u_{k-1}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f\big(x, tu_k+(1-t)u_{k-1}\big)\, dt$$

$$= \int_0^1 f_u\big(x, tu_k+(1-t)u_{k-1}\big)\cdot (u_k-u_{k-1})\, dt$$

$$> \int_0^1 -\lambda (u_k-u_{k-1})\, dt = -\lambda(u_k-u_{k-1})$$

در نتیجه از (4) خواهیم داشت ، $(u_k - u_{k+1})_+ = 0$.

به طور مشابه می‌توانیم اثبات کنیم که $u_k \le \bar{u}$ تقریباً همه جا در Ω تا ادعای

$$\underline{u} \le u_1 \le u_2 \le \cdots \le \bar{u}$$

به طور کامل اثبات شود. حال قرار دهید $u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x)$. از قضیه همگرایی تسلطی لبگ نتیجه می‌شود

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

از طرف دیگر شرط $f_u > -\lambda$ تضمین می‌کند که $u \longmapsto f(x,u) + \lambda u$ صعودی باشد ، لذا سمت راست (3)

همیشه در رابطه زیر صدق می‌کند

$$f(x,\underline{u}) + \lambda \underline{u} \le f(x,u_k) + \lambda u_k \le f(x,\bar{u}) + \lambda \bar{u}$$

و در نتیجه به طور یکنواخت (مستقل از k) در $L^2(\Omega)$ کران‌دار است . در نتیجه جواب‌های (3) در $H^2(\Omega)$ به طور یکنواخت کران‌دار

هستند و زیردنباله $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ وجود دارد که در $H^2(\Omega)$ همگرای ضعیف است . اما باید

$$u_{k_j} \longrightarrow u \quad \text{in } H^1(\Omega)$$

و با حدگیری از (3) نتیجه می‌شود که u جواب ضعیف (1) است.

نکته ـ بنابر قضیه فوق برای اثبات وجود جواب (1) باید زیر و زبر جوابی که در شرایط قضیه صدق می‌کنند را پیدا کنیم. وقتی f یک تابع C^1 کران‌دار روی $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ باشد، به سادگی می‌توان دید که چنین زیر و زبر جواب‌هایی وجود دارند. اگر $M = \sup_{\Omega \times \mathbb{R}} |f|$ آنگاه جواب‌های

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} = -M & \text{in } \Omega \\ \underline{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} -\Delta \overline{u} = M & \text{in } \Omega \\ \overline{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

در شرایط مورد نظر صدق می‌کنند.

روش پیوستگی

در این روش با فرض اینکه معادله لاپلاس جواب دارد، نشان می‌دهیم که می‌توان وجود جواب یک عملگر دیفرانسیل بیضوی را اثبات کرد.

همچنین این روش را می‌توان برای عملگرهای غیرخطی توسعه داد، ولی چالش پیش رو پیدا کردن تخمین‌های پیشین برای جواب است.

قرار دهید:

$$Lu = -\sum_{i,j} a^{ij} \partial_{ij} u + \sum_i b^i \partial_i u + cu$$

$$\sum_{i,j} a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

قضیه - Ω یک دامنه $C^{2,\alpha}$ در $\mathbb{R}^n$ است و L عملگر دیفرانسیل تعریف شده در بالا، که در آن $c \geq 0$ و $a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$.

آنگاه برای هر $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ و $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$، مسأله دیریکله زیر دارای جواب (یکتا) $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ است.

$$(5) \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

برای اثبات این قضیه به دو پیش‌فرض زیر احتیاج است:

۱ـ مسأله دیریکله

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

برای هر $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ و $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ دارای جواب (یکتا) در $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ است.

۲ـ اگر $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ جواب (5) باشد، آنگاه تخمین زیر برقرار است:

$$(6) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|f\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} \right)$$

که ثابت C تنها به λ ، Ω و $\Lambda = \max(\|a^{ij}\|_{C^{\alpha}}, \|b^{i}\|_{C^{\alpha}}, \|c\|_{C^{\alpha}})$ وابسته است.

تخمین (6) به تخمین پیشین (perior estimate) معروف است.

اثبات. بدون کاسته شدن از کلیت قضیه، فرض می‌کنیم $\varphi = 0$. در غیر این صورت، کافی است جواب مسأله زیر را بیابیم:

$$\begin{cases} Lv = f - L\varphi & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ایده‌ی اثبات این است که خانواده معادلات

$$L_t u := tLu + (1-t)\Delta u = f$$

را برای $t \in [0,1]$ در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم اگر معادله بالا برای L_t جواب داشته باشد، برای مقادیر s به اندازه کافی نزدیک به t نیز، معادله $L_s u = f$ جواب دارد. ابتدا دقت کنید که عملگرهای

$$L_t u = -\sum_{i,j} \left(t a^{ij} + (1-t)\delta^{ij}\right) \partial_{ij} u + \sum_i t b^i \partial_i u + tcu$$

همگی بیضوی هستند با ثابت یکنواخت

$$\sum_{i,j} \left(t a^{ij} + (1-t)\delta^{ij}\right) \xi_i \xi_j \geq \left(t\lambda + (1-t)\right) |\xi|^2 \geq \min(\lambda, 1) |\xi|^2 .$$

به علاوه ثابت $\tilde{C}>0$ وابسته به ضرایب L و n و α وجود دارد که

$$\|L_t u\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} \leq \tilde{C}\,\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

همچنین قرار دهید:

$$X=\{u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) : u=0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

و

$I = \{ t\in[0,1]$: معادله $L_t u=f$ برای هر $f\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ جواب یکتا دارد $\}$

با پیش فرض قضیه می دانیم که $0\in I$.

اگر $t\in I$، آنگاه $L_t : X \longrightarrow C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ یک عملگر خطی یک به یک و پوشا است. در نتیجه از (6) خواهیم داشت:

$$\|L_t^{-1} f\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C\,\|f\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}$$

برای مقدار ثابت $C>0$ که مستقل از t است و تنها به ثابت‌های موجود در (5) وابسته است.

حال برای حل معادله $L_s u=f$، این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$L_s u = f \iff L_t u = f + (L_t - L_s)u = f + (t-s)(Lu - \Delta u)$$

$$\iff u = L_t^{-1}\Big(f + (t-s)(Lu - \Delta u)\Big) =: Tu$$

چون $t \in I$ نتیجه می‌گیریم $T: X \longrightarrow X$ خوش‌تعریف است. به‌علاوه

$$\|Tu - Tv\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = |t-s| \cdot \|L_s^{-1}\big(L(u-v) - \Delta(u-v)\big)\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

$$\leq C\,|t-s| \cdot \|(L-\Delta)(u-v)\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}$$

$$\leq C.\tilde{C}\,|t-s| \cdot \|u-v\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

اگر s به‌اندازه کافی نزدیک t باشد، به‌طوری‌که $C\tilde{C}|t-s| < 1$، آنگاه عملگر $T: X \longrightarrow X$ انقباضی است و

معادله $u = Tu$ برای $u \in X$ جواب یکتا دارد. به‌طور معادل $L_s u = f$ جواب یکتای $u \in X$ دارد و $s \in I$.

PDE

جلسه بیست و هفت ۹۹,۳,۳۱

روش نقطه ثابت

با نوشتن معادله دیفرانسیل به صورت نقطه ثابت یک عملگر و استفاده از قضایای نقطه ثابت روی فضاهای باناخ نامتناهی بعد، وجود جواب را اثبات می‌کنیم. ابتدا قضیه نقطه ثابت باناخ برای عملگرهای انقباضی به همراه یک مثال از کاربرد آن ارائه می‌شود. سپس به قضیه نقطه ثابت شادر می‌پردازیم.

قضیه (نقطه ثابت باناخ) فرض کنید X فضای باناخ و $A: X \longrightarrow X$ یک نگاشت (غیرخطی) باشد که

$$\|Ax - Ay\|_X \leq \gamma \|x-y\|_X \qquad \forall x,y \in X$$

برای مقدار ثابت $0<\gamma<1$. آنگاه A یک نقطه ثابت یکتا دارد.

اثبات ـ برای هر نقطه دلخواه $x_0 \in X$، دنباله بازگشتی $x_{n+1} = Ax_n$ کوشی است (چرا؟) و حد آن نقطه ثابت خواهد بود.

یکتایی نقطه ثابت نیز از خاصیت انقباضی T نتیجه می‌شود.

معادله سهموی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$(1)\quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0,T] \\ u = g & \text{on } \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع لیپ‌شیتز است. فضای باناخ $X = C([0,T]; L^2(\Omega))$ را در نظر بگیرید و عملگر $A: X \to X$ را با ضابطه $w = Au$ تعریف کنید که w جواب

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = f(u) & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0,T] \\ w = g & \text{on } \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

است. نشان می‌دهیم وقتی T به اندازه کافی کوچک باشد، A انقباضی است. $w = Au$ و $\tilde{w} = A\tilde{u}$ بگیرید، آنگاه

$$\int_\Omega \partial_t(w-\tilde{w}) \cdot (w-\tilde{w}) + |\nabla(w-\tilde{w})|^2 \, dx = \int_\Omega \big(f(u) - f(\tilde{u})\big) \cdot (w-\tilde{w}) \, dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w-\tilde{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(w-\tilde{w})\|^2_{L^2(\Omega)} \le \epsilon \|w-\tilde{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon}\|f(u)-f(\tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\underset{\text{Poincare inequality}}{\le} \epsilon C \|\nabla(w-\tilde{w})\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon}\|f(u)-f(\tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega)}$$

اگر ϵ را به اندازه کافی کوچک انتخاب کنیم و از خاصیت لیپشیتز بودن f بهره ببریم، نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt}\|w-\tilde{w}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{4\epsilon}\|f(u)-f(\tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|u-\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|w(t,\cdot)-\tilde{w}(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^t \|u(s,\cdot)-\tilde{u}(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds$$

$$\leq Ct\,\|u-\tilde{u}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}$$

$$\Rightarrow \|Au-A\tilde{u}\|_X \leq (CT)^{1/2}\|u-\tilde{u}\|_X$$

اگر $CT<1$، آنگاه A انقباضی است و مسأله (۱) جواب دارد. حال برای مقادیر بزرگتر T، ابتدا عدد T_1 را انتخاب کنید به گونه‌ای که $CT_1<1$ تا وجود جواب را در بازه $[0,T_1]$ اثبات کنید. همین سناریو را در بازه‌های $[T_1,2T_1]$، $[2T_1,3T_1]$ و ... تکرار کنید.

قضیه (نقطه ثابت شادر (Shauder)) : فرض کنید X یک فضای باناخ و $K\subseteq X$ فشرده و محدب باشد.
به علاوه $T:K\longrightarrow K$ پیوسته است. آنگاه T یک نقطه ثابت در K دارد.

اثبات ـ برای ثابت $\epsilon>0$ نقاط $x_1,\dots,x_{N_\epsilon}$ را انتخاب کنید به طوری که $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{N_\epsilon}B_\epsilon(x_i)$. اگر

$$K_\epsilon=\left\{\sum_{i=1}^{N_\epsilon}\lambda_i x_i\ :\ 0\le\lambda_i\le 1,\ \sum_{i=1}^{N_\epsilon}\lambda_i=1\right\}$$

پوش محدب $\{x_1,\dots,x_{N_\epsilon}\}$ باشد، عملگر $J_\epsilon:K\longrightarrow K_\epsilon$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$J_\epsilon(x):=\frac{\sum_{i=1}^{N_\epsilon}\mathrm{dist}(x,K-B_\epsilon(x_i))\,x_i}{\sum_{i=1}^{N_\epsilon}\mathrm{dist}(x,K-B_\epsilon(x_i))}$$

دقت کنید که مخرج این کسر، هیچگاه صفر نمی‌شود. (زیرا $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{N_\epsilon}B_\epsilon(x_i)$) به علاوه واضح است که J_ϵ پیوسته است و

$$\|J_\epsilon(x)-x\|\le\frac{\sum_{i=1}^{N_\epsilon}\mathrm{dist}(x,K-B_\epsilon(x_i))\,\|x_i-x\|}{\sum_{i=1}^{N_\epsilon}\mathrm{dist}(x,K-B_\epsilon(x_i))}\le\epsilon$$

نگاشت $K_\epsilon \longrightarrow K_\epsilon$: $J_\epsilon \circ T$ دارای یک نقطه ثابت است بنابر قضیه نقطه ثابت براور. (دقت کنید K_ϵ همئومورف با

گوی واحد در یک فضای بعد متناهی است.) اگر $J_\epsilon \circ T(x_\epsilon) = x_\epsilon$. بنابر فشردگی K و با انتخاب یک زیردنباله

داریم $x \in K$ $x_{\epsilon_i} \longrightarrow$.

$$\| x_{\epsilon_i} - T(x_{\epsilon_i}) \| = \| J_\epsilon \circ T(x_{\epsilon_i}) - T(x_{\epsilon_i}) \| \leq \epsilon_i$$

و بنابر پیوستگی T نتیجه می‌شود $Tx = x$.

نتیجه - فرض کنید K زیرمجموعه بسته و محدب فضای باناخ X باشد. اگر $T : K \longrightarrow K$ پیوسته باشد و $\overline{T(K)}$ فشرده،

آنگاه T یک نقطه ثابت در K دارد. (برای اثبات A را بستار پوشش محدب $T(K)$ قرار دهید. A فشرده و محدب است و قضیه نقطه ثابت

شادر را برای $T : A \longrightarrow A$ به کار برید.)

قضیه زیر یک نسخه دیگری از قضیه نقطه ثابت شادر ارائه می‌کند که به جهت کاربرد مفیدتر است.

قضیه (نقطه ثابت Schaefer) فرض کنید $T: X \to X$ یک نگاشت پیوسته و فشرده روی فضای باناخ X باشد. به علاوه مجموعه

$$\{x \in X : x = \sigma T(x) \text{ for some } 0 \le \sigma \le 1\}$$

در X کران دار است. در این صورت T یک نقطه ثابت دارد.

نکته - در قضیه بالا، T لزوما خطی نیست و فشردگی بدین معناست که برای هر دنباله کران دار $\{x_n\}$ در X، $\{Tx_n\}$ زیردنباله ای همگرا دارد.

اثبات - فرض کنید هر عضو مجموعه بالا در رابطه $\|x\| < M$ صدق کند. حال نگاشت T^* را بدین صورت تعریف کنید

$$T^*(x) := \begin{cases} T(x) & \text{if } \|T(x)\| \le M \\ M\dfrac{T(x)}{\|T(x)\|} & \text{if } \|T(x)\| \ge M \end{cases}$$

نگاشت T^* از گوی $\overline{B_M(0)}$ به $\overline{B_M(0)}$ تعریف شده است و چون $\overline{T(\overline{B_M(0)})}$ فشرده است، نتیجه می شود که $\overline{T^*(\overline{B_M(0)})}$ نیز فشرده است. بنابر نتیجه قضیه نقطه ثابت شادر، T^* نقطه ثابت دارد. فرض کنید $T^*(x) = x$.

اگر $\|T(x)\| \geq M$ ، آنگاه $Tx = \sigma T x$. $x = T^*(x) = \frac{M}{\|Tx\|} Tx$ که $\sigma = \frac{M}{\|Tx\|} \leq 1$. بنابر فرض ابد $\|x\| < M$.

اما $\|x\| = \|T^* x\| = M$ که تناقض است. پس $\|Tx\| < M$ و در نتیجه $x = T^* x = Tx$.

به عنوان مثال نشان می‌دهیم مسأله شبه‌خطی زیر وقتی $\mu > 0$ به اندازه کافی بزرگ است، جواب دارد

$$(2)\quad \begin{cases} -\Delta u + b(\nabla u) + \mu u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

که $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ هموار است و در شرط رشد زیر صدق می‌کند:

$$|b(p)| \leq C(|p| + 1) \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

برای هر تابع $u \in H_0^1(\Omega)$ قرار دهید $f = -b(\nabla u) \in L^2(\Omega)$ و $\omega = Tu$ را جواب مسأله زیر بگیرید:

$$(3)\quad \begin{cases} -\Delta \omega + \mu \omega = f & \text{in } \Omega \\ \omega = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

می‌دانیم که $\|\omega\|_{H^2(\Omega)} \leq c\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$.

و بنا بر شرط رشد تابع b، خواهیم داشت:

$$(4) \quad \|Tu\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + 1\right)$$

برای اینکه نشان دهیم (2) جواب دارد، کافی است اثبات کنیم T نقطه ثابت دارد. و به این منظور به کمک قضیه نقطه ثابت schaefer کافی است نشان دهیم:

(i) $T: H_0^1 \longrightarrow H_0^1$ پیوسته و فشرده است.

(ii) مجموعه $\{u \in H_0^1 : u = \sigma T u \text{ for some } \sigma \in [0,1]\}$ در H_0^1 کران‌دار است.

برای اثبات (i) اگر $u_n \to u$ در H_0^1 آنگاه بنا بر (4) دنباله $\omega_n = Tu_n$ در H^2 کران‌دار است و زیردنباله‌ای دارد که

$$\omega_{n_i} \longrightarrow \omega \quad \text{in } H_0^1$$

از (3) می‌دانیم که برای هر $v\in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla w_{n_i}\cdot\nabla v+\mu w_{n_i} v\,dx=-\int_\Omega b(\nabla u_{n_i})\,v\,dx$$

و با حدگیری نتیجه می‌شود که

$$\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v+\mu w v\,dx=-\int_\Omega b(\nabla u)\,v\,dx$$

یعنی $w=Tu$ و در نتیجه T پیوسته است. اثبات فشردگی نیز مشابه است. هرگاه $\{u_n\}$ یک دنباله کران‌دار در H_0^1 باشد، $w_n=Tu_n$ در H^2 کران‌دار است و بنابر فشردگی نشاندن $H^2\hookrightarrow H^1$ یک زیردنباله همگرا در H_0^1 دارد.

برای اثبات (ii) فرض کنید $u=\sigma Tu$ بنابراین باید داشته باشیم:

$$-\Delta u+\mu u=-\sigma b(\nabla u)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2+\mu u^2\,dx=-\sigma\int_\Omega b(\nabla u)\,u\,dx\le C\int(|\nabla u|+1)\,|u|\,dx$$

$$\le \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2\,dx+C\int(|u|^2+1)\,dx$$

لذا اگر μ به اندازه کافی بزرگ باشد باید $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le C$ برای یک ثابت $C>0$ مستقل از $0\le\sigma\le1$.

روش عملگرهای یکنوا

معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$(5)\quad \begin{cases} -\operatorname{div} \vec{a}(\nabla u) + b(x,u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

که $a:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $b:\Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ توابع داده شده هستند. یک جواب ضعیف برای آن، تابع $u\in H_0^1(\Omega)$ است که

$$(6)\quad \int_\Omega \vec{a}(\nabla u)\cdot\nabla v + b(x,u)\,v\,dx = \int_\Omega f v\,dx \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

رابطه بالا یک فرم خطی نسبت به v ارائه می‌کند. در حقیقت اگر سمت چپ را با نماد $B[u,v]$ نشان دهیم، به ازای هر $u\in H_0^1(\Omega)$، $v\longmapsto B[u,v]$ یک تابعک خطی روی $H_0^1(\Omega)$ ارائه می‌کند. این تابعک خطی را با Au نشان می‌دهیم. بدین ترتیب عملگر (غیرخطی) A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A: H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

$$\langle Au, v\rangle = B[u,v] \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

اگر سمت راست معادله (6) را با نماد $\langle f, v\rangle$ نشان دهیم که $f \in H^{-1}(\Omega)$، آنگاه معادله (5) به صورت

$$(7) \quad Au = f$$

خواهد بود. در حالتی که (5) یک معادله خطی باشد، A عملگری خطی است و وجود (و یکتایی) جواب (7) از قضیه لکس-میلگرام نتیجه می‌شود. روش عملگرهای یکنوا تعمیمی از لکس-میلگرام به عملگرهای غیرخطی است، نظیر آنچه در بالا اشاره شد.

تعریف- اگر V یک فضای باناخ باشد و V' دوگان آن، عملگر $A: V \longrightarrow V'$ را یکنوا می‌نامیم هرگاه

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \geq 0 \qquad \forall u_1, u_2 \in V$$

به علاوه آن را یکنوای اکید گوییم اگر در نامساوی بالا، تساوی تنها برای $u_1 = u_2$ اتفاق بیفتد. همچنین A را به طور قوی یکنوا گوییم هرگاه ثابت $\beta > 0$، وجود داشته باشد که

$$\langle Au_1 - Au_2 , u_1 - u_2 \rangle \geq \beta \|u_1 - u_2\|_V^2$$

درضمن A را تراکمی (Coercive) گوییم اگر $\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_V} \longrightarrow \infty$ وقتی $\|u\|_V \longrightarrow \infty$.

از تعریف واضح است که هر عملگر به طور قوی یکنوا، تراکمی است.

عملگر A شبه پیوسته است، اگر تابع حقیقی $\varphi(t) := \langle A(u+tv), w\rangle$ برای هر $u, v, w \in V$ نسبت به $t \in [0,1]$ پیوسته باشد.

قضیه زیر تعمیم قضیه لکس - میلگرام برای عملگرهای غیرخطی است.

قضیه - اگر H فضای هیلبرت جداپذیر باشد و $A : H \longrightarrow H'$ یکنوا، تراکمی و شبه پیوسته باشد، آنگاه معادله $Au = f$ برای هر $f \in H'$ دارای لااقل یک جواب $u \in H$ است. مجموعه همه جوابها، بسته، کران دار و محدب است. به علاوه اگر A یکنوای اکید باشد، جواب معادله یکتا است. اگر A به طور قوی یکنوا باشد، آنگاه A وارون پذیر است و وارون آن لیپ شیتز است.

لم - فرض کنید $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری پیوسته‌ای باشد که برای یک مقدار $R>0$ ،

$$F(x)\cdot x \geq 0 \qquad \forall\ |x|=R.$$

در این صورت نقطه $x_0 \in B_R(0)$ وجود دارد که $F(x_0)=0$.

اثبات - اگر چنین نقطه‌ای وجود نداشته باشد، می‌توان نگاشت $G: B_R(0) \longrightarrow \partial B_R(0)$ را با ضابطه

$$G(x) = -R\,\frac{F(x)}{|F(x)|}$$

تعریف کرد. بنابر قضیه نقطه ثابت براور، یک نقطه ثابت برای G وجود دارد.

$$\exists\ y \in \partial B_R(0) \ \text{s.th.}\ G(y)=y \implies F(y) = -\frac{y}{R}\,|F(y)|$$

$$\implies 0 \leq F(y)\cdot y = -R\,|F(y)| \implies F(y)=0 \ \times.$$

اثبات قضیه ـ گام اول: $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ را پایه متعامد یکه H می‌گیریم. ابتدا برای هر n نشان می‌دهیم تقریبی از جواب $Au=f$ در زیرفضای

هم‌متناهی تولید شده توسط $\{\omega_k\}_{k=1}^{n}$ به معنای زیر وجود دارد.

$$(8) \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} d_k^n \omega_k \quad \text{s.th.} \quad \langle Au_n, \omega_k \rangle = \langle f, \omega_k \rangle \quad \text{for} \quad 1 \le k \le n$$

برای اثبات وجود u_n میدان برداری $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطه زیر تعریف کنید $F = (F_1, \ldots, F_n)$

$$F_k(d_1, \ldots, d_n) = \langle A(\sum_{k=1}^{n} d_k \omega_k), \omega_k \rangle - \langle f, \omega_k \rangle \qquad 1 \le k \le n$$

از خاصیت شبه‌پیوستگی و تراکمی ثابت می‌شود که $F(\vec{d}) \cdot \vec{d} \ge 0$ برای $|\vec{d}| = R$ به اندازه کافی بزرگ. (چرا؟)

و بنابر لم قبل وجود u_n اثبات می‌شود.

گام دوم: دنباله $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ در H کراندار است. زیرا از (8) نتیجه می‌شود که

$$\langle Au_n, u_n \rangle = \langle f, u_n \rangle$$

و اگر $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله بی‌کران داشته باشد (برای سادگی همان u_n را بگیرید که $\|u_n\| \to \infty$) آنگاه بنابر خاصیت تراکمی خواهیم داشت:

$$\frac{\langle Au_n,u_n\rangle}{\|u_n\|} = \frac{\langle f,u_n\rangle}{\|u_n\|} \longrightarrow \infty$$

که با توجه به رابطه $|\langle f,u_n\rangle| \le \|f\|_H \, \|u_n\|_H$ به تناقض می‌رسیم.

گام سوم: $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای دارد که در H همگرای ضعیف است. (دوباره برای سادگی همان دنباله $\{u_n\}$ را بگیرید)

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } H$$

از (8) نتیجه می‌شود که $Au_n \xrightarrow{*} f$ in H'. همچنین

$$\langle Au_n,u_n\rangle = \langle f,u_n\rangle \longrightarrow \langle f,u\rangle$$

از این روابط نتیجه می‌شود که

$$0 \overset{\text{خاصیت یکنوایی}}{\le} \langle Au_n - Av,\, u_n - v\rangle = \langle Au_n,u_n\rangle - \langle Au_n, v\rangle - \langle Av,\, u_n - v\rangle$$

$$\longrightarrow \langle f,u\rangle - \langle f,v\rangle - \langle Av,\, u - v\rangle$$

$$= \langle f - Av,\, u - v\rangle \qquad \forall v \in H$$

از این رابطه آخر نتیجه می‌شود که $Au=f$. برای این منظور قرار دهید $v = u + tw$ که $t\in[0,1]$ و $w \in H$ دلخواه، آنگاه بنابر خاصیت شبه‌پیوستگی داریم:

$$0 \le \langle f - A(u+tw), -tw \rangle \Rightarrow \langle f - A(u+tw), w \rangle \le 0$$

$$\xRightarrow{t \to 0} \quad \langle f - Au, w \rangle \le 0$$

چون $w \in H$ دلخواه است، پس $Au = f$.

گام چهارم - حال اگر A یکنوای اکید باشد و دو جواب $Au = Av = f$ داشته باشیم، آنگاه $\langle Au - Av, u - v \rangle = 0$ پس

باید $u = v$ و بدین ترتیب یکتایی جواب برقرار است.

گام پنجم - اگر A به طور قوی یکنوا باشد و $\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \ge \beta \|u_1 - u_2\|_H^2$. به علاوه اگر $Au_2 = f_2$, $Au_1 = f_1$

$$\Rightarrow \quad \beta \|u_1 - u_2\|_H \le \|f_1 - f_2\|_{H'}$$

$$\Rightarrow \quad \|A^{-1} f_1 - A^{-1} f_2\|_H \le \frac{1}{\beta} \|f_1 - f_2\|_{H'}$$

که نشان می‌دهد، A^{-1} لیپشیتز است.

حال برگردیم به حل مسأله (5) یا صورت معادل آن (7). برای وجود باید A یکنوا، تراگی و شبه پیوسته باشد.

- شرط یکنوایی A:

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle = \int_\Omega \left(\vec{a}(\nabla u_1) - \vec{a}(\nabla u_2)\right)\cdot \nabla(u_1 - u_2) + \left(b(x,u_1) - b(x,u_2)\right)\cdot(u_1 - u_2)\, dx$$

اگر شرایط زیر برقرار باشد، A یکنوا خواهد بود:

$$\left(\vec{a}(p) - \vec{a}(q)\right)\cdot(p-q) \geq 0 \qquad \forall p,q \in \mathbb{R}^n \qquad (H1)$$

(H2) برای تقریباً هر $x\in\Omega$، $u \longmapsto b(x,u)$ صعودی است.

فرض‌های مشابهی می‌توان گذاشت که A یکنوای اکید یا به طور قوی یکنوا باشد.

- شرط تراگی A:

$$\langle Au, u\rangle = \int_\Omega \vec{a}(\nabla u)\cdot\nabla u + b(x,u)\,u\, dx$$
$$\geq \int_\Omega \vec{a}(\nabla u)\cdot\nabla u + b(x,0)\,u\, dx$$

تمرین - نشان دهید اگر (H3) برقرار باشد، A تراگی است.

$$\exists \alpha>0,\ \beta\ge 0 \qquad \vec{a}(p)\cdot p \ge \alpha|p|^2-\beta \qquad \forall p\in\mathbb{R}^n \qquad (H3)$$

- شرط شبه‌پیوستگی A : باید عبارت زیر نسبت به t پیوسته باشد که $u,v,w\in H_0^1$ ثابت هستند.

$$t \longmapsto \int_\Omega \vec{a}(\nabla u + t\nabla v)\cdot\nabla w + b(x,u+tv)\cdot w\,dx$$

با فرض‌های زیر می‌توان این مطلب را اثبات کرد. (تمرین)

$$\exists C>0 \qquad |\vec{a}(p)| \le C(1+|p|) \qquad \forall p\in\mathbb{R}^n \qquad (H4)$$

$$\exists M>0 \qquad |b(x,u)|\le M \qquad \forall (x,u)\in\Omega\times\mathbb{R} \qquad (H5)$$

نکته - فرض‌های (H1-5) وجود جواب (5) را اثبات می‌کند. البته برای وجود جواب فرض (H5) را می‌توان تقلیل داد به کران‌داری موضعی.

یعنی تابع $b(x,u)$ روی $\Omega\times[-K,K]$ به ازای هر $K>0$ کران‌دار است.

PDE

جلسه بیست و هشت ۹۹/۴/۱

روش پتانسیل‌های لایه‌ای

مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = h & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

اگر

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log|x| & n=2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \dfrac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

جواب اساسی معادله لاپلاس باشد، آنگاه

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial n}\Phi(x-y) - \frac{\partial}{\partial n}u(y)\, \Phi(x-y)\, dS_y$$

حال تعریف کنید:

Single-layer potential: $$S(f)(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)\, \Phi(x-y)\, dS_y$$

Double-layer potential: $$D(f)(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)\, \frac{\partial}{\partial n}\Phi(x-y)\, dS_y$$

$$S : H^{-1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega^\pm)$$

$$D : H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega^\pm)$$

که $\Omega^+ = \Omega$ و $\Omega^- = \overline{\Omega}^c$ خارج ناحیهٔ Ω است.

با این تعاریف داریم: $u(x) = D(u) - S\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$.

به راحتی می‌توان دید که

$$-\Delta S(f)(x) = -\Delta D(f)(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$$

لذا برای حل مسأله (1) هر ترکیب $u = D(g) - S(f)$ که $f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ یک تابع هارمونیک است و در نتیجه تنها کافی است شرط مرزی $u = h$ را چک کنیم. یا به عبارت دیگر توابع f و g را پیدا کنیم که trace تابع u برابر h شود. بدین منظور روابط زیر اهمیت دارند.

عملگرهای $\gamma_\pm : H^1(\Omega^\pm) \longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ trace درنظر بگیرید که در داخل و خارج Ω تعریف شده‌اند. آنگاه

$$\gamma_+ S(f) = \gamma_- S(f), \qquad \gamma_+ D(f) - \gamma_- D(f) = f$$

به علاوه اگر $\partial_n^\pm$ را مشتق نرمال روی مرز $\partial\Omega$ از داخل و خارج تعریف کنیم (در جلسه ۱۸ خوش‌تعریفی آن روی کلاس $H^1(\Omega)$ بیان شد) خواهیم داشت

$$\partial_n^+ S(f) - \partial_n^- S(f) = -f, \qquad \partial_n^+ D(f) = \partial_n^- D(f)$$

گزاره- اگر قرار دهیم

$$Tf := \frac{1}{2}\left(\gamma_+ D(f) + \gamma_- D(f)\right) : H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$$

آنگاه T یک عملگر فشرده است و

$$\gamma_\pm D = \pm \frac{1}{2} I + T$$

$$Tf(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}\Phi(x-y)\, f(y)\, ds_y \qquad x \in \partial\Omega$$

اگر مطالب جلسه قبل را در خصوص توابع گرین مرور کنید، جواب مسأله (۱) به صورت

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x,y)\, h(y)\, dS_y$$

است که K هسته پواسون است. برای ناحیه $\Omega = \mathbb{R}^n_+$، هسته پواسون برابر است با

$$K(x,y) = \partial_n \Phi(y-x) - \partial_n \Phi(y-\tilde{x})$$

که $\tilde{x}$ انعکاس نقطه x نسبت به ابرصفحه $\mathbb{R}^{n-1}$ است. در آنجا دیدیم که $\gamma_+ u = h$. این مطلب توجیه رابطه

$\gamma_+ Df - \gamma_- Df = f$ است.

اثبات - ابتدا ثابت می‌کنیم T فشرده است. برای این منظور کافی است آن را با عملگرهای فشرده تقریب بزنیم.

اگر $K_N(x,y) = \mathrm{Sign}\left(\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x-y)\right).\min\left\{N, \left|\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x-y)\right|\right\}$ و

$$T_N f(x) := \int_{\partial\Omega} K_N(x,y)\, f(y)\, dS_y$$

K_N یک تابع پیوسته روی $\partial\Omega \times \partial\Omega$ است. در نتیجه $T_N : C(\partial\Omega) \longrightarrow C(\partial\Omega)$ فشرده است و

$$\|T_N f\|_\infty \le \underbrace{\left(\max_{x\in\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |K_N(x-y)|\, dy \right)}_{\text{کران مستقل از } N \text{ دارد}} \|f\|_\infty$$

در کران داری عبارت بالا از فرض C^2 بودن $\partial\Omega$ و در نتیجه نامساوی زیر استفاده شده است.

$$\left| \frac{\partial}{\partial n(y)} \Phi(x-y) \right| \le \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{|(x-y)\cdot \vec{n}_y|}{|x-y|^n} \le c\,|x-y|^{2-n}$$

همچنین به وضوح نتیجه می‌شود که $\|T_N - T\| \longrightarrow 0$. بنابراین T نیز فشرده است.

اگر $x_0 \in \partial\Omega$ و $x_n \in \Omega$ که $x_n \to x_0$ نشان می‌دهیم:

$$\mathcal{D}f(x_n) \longrightarrow \frac{1}{2} f(x_0) + Tf(x_0)$$

اگر $x_0 \notin \operatorname{Supp} f$، آنگاه انتگرال‌های مرزی در خارج یک همسایگی x_0 محاسبه شده و هسته‌های انتگرال کران دار هستند. لذا به سادگی ادعای گفته شده برقرار است. (دقت کنید $f(x_0)=0$)

حال اگر $x_0 \in \operatorname{Supp} f$ اما $f(x_0)=0$ ، آنگاه دنباله $f_k \in C(\partial\Omega)$ را بگونه‌ای بگیرید که $x_0 \notin \operatorname{Supp} f_k$ و $\|f_k - f\|_\infty \to 0$

$$
\begin{aligned}
|Df(x_n) - Tf(x_0)| &\le |D(f-f_k)(x_n) - T(f-f_k)(x_0)| \\
&\quad + |Df_k(x_n) - Tf_k(x_0)| \\
&\le C\|f-f_k\|_\infty + |Df_k(x_n) - Tf_k(x_0)|
\end{aligned}
$$

حال ابتدا اجازه دهید $n \to \infty$ و سپس $k \to \infty$ تا ادعا در این حالت نیز اثبات شود.

و برای تکمیل اثبات کافی است حالت $f \equiv 1$ را اثبات کنیم. برای هر نقطه $x \in \Omega$ و استفاده از قضیه دیورژانس در $\Omega \setminus B_\delta(x)$ نتیجه می‌شود (تمرین - جزئیات محاسبه را انجام دهید.)

$$
\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} \Phi(x-y)\, dy = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 1/2 & x \in \partial\Omega \end{cases}
$$

و بنابراین رابطه

$$
1 = Df(x_n) \longrightarrow \frac{1}{2} f(x_0) + Tf(x_0) = 1
$$

برقرار است.

حال برگردیم به حل مسأله (1) و $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $u = Dg$. واضح است که $-\Delta u = 0$ در Ω و برای شرط مرزی باید داشته باشیم:

$$h = \left(\tfrac{1}{2}I + T\right)g \qquad (2)$$

بنابراین کافی است برای $h \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ داده شده معادله بالا را حل کنیم. عملگر $\frac{1}{2}I + T$ یک به یک است، زیرا اگر $\left(\frac{1}{2}I + T\right)g = 0$، آنگاه $u^+ = Dg$ جواب مسأله

$$\begin{cases} -\Delta u^+ = 0 & \text{in } \Omega \\ u^+ = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

است و در نتیجه باید $u^+ = 0$ در Ω. از طرفی $u^- = Dg$ در Ω^c نیز یک تابع هارمونیک است که از رابطه $\partial_n^+ Dg = \partial_n^- Dg$ نتیجه می‌شود که $\partial_n u^- = \partial_n u^+ = 0$. لذا داریم

$$\begin{cases} -\Delta u^- = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n u^- = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

و باید u^- یک تابع ثابت باشد. از طرفی

$$\gamma u^- = \left(-\tfrac{1}{2}I + T\right)g = -g \quad \text{on } \partial\Omega$$

ودرنتیجه g یک تابع ثابت است و $u^- = g$ در Ω^c . لذا باید

$$0 = u^+(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}\Phi(x-y)\, g(y)\, ds_y = g\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}\Phi(x-y)\, ds_y = g$$

که نشان می‌دهد $\frac{1}{2} I + T$ یک به یک است. T فشرده است بنابراین $\frac{1}{2} I + T^*$ پوشا است (قضیه alternative Fredholm).

که $T^*: H^{-1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ عملگر الحاقی T است که

$$\langle T^* g, f \rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}} = \langle g, Tf \rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}}$$

اگر f و g پیوسته باشند، با یک محاسبه ساده خواهیم دید که:

$$T^* g(x) = \int_{\partial\Omega} \nabla\Phi(y-x)\cdot\vec{n}(x)\, g(y)\, ds_y$$

با اثباتی مشابه گزاره قبل روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\partial_n^+ S(f) = \left(-\tfrac{1}{2} I + T^*\right) f$$

$$\partial_n^- S(f) = \left(\tfrac{1}{2} I + T^*\right) f$$

همچنین به طور مشابه $\pm \frac{1}{2}I + T^*$ یک به یک است که در نتیجه $\pm \frac{1}{2}I + T$ پوشا خواهد بود. لذا معادله (2) جواب یکتا دارد.

بدین ترتیب اگر بخواهیم جواب مسأله نیومن را داشته باشیم:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n u = h & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

با قرار دادن $u = S(f)$، مسأله بالا به معادله

$$\left(-\frac{1}{2}I + T^*\right) f = h$$

تبدیل می‌شود که جواب یکتا دارد.

نکته ـ روش پتانسیل‌های لایه‌ای را می‌توان به هر عملگر خطی بیضوی به جای لاپلاس تعمیم داد. به جای Φ باید جواب اساسی آن عملگر را در تعریف پتانسیل‌های لایه‌ای قرار دهیم. این روش علی‌رغم کاربرد در وجود اثبات جواب، به عنوان یک روش عددی برای حل معادله دیفرانسیل سودمند است. زیرا که معادله دیفرانسیل پاره‌ای (1) را به یک معادله انتگرالی به صورت (2) تبدیل می‌کند.