PDE

جلسه یازدهم

۹۹/۱/۲۵

معادله حرارت

معادله همگن :
$$u_t - \Delta u = 0 \qquad (1)$$

معادله ناهمگن :
$$u_t - \Delta u = f$$

تعبیر این معادله را ارجاع می‌دهیم به جلسه پنجم. معمولاً این معادله همراه با یک شرط اولیه مثلاً در زمان صفر است ،

$$u(x,0) = g(x) \qquad (2)$$

و قرار است برای $t>0$ جواب $u(x,t)$ را پیدا کنیم. اگر معادله در $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ تعریف شده باشد و فرض کنیم به ازای هر $t>0$ ، تابع $u(\cdot,t)$ تبدیل فوریه داشته باشد (مثلاً $u(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$) از معادله (1) تبدیل فوریه می‌گیریم. جهت یادآوری تبدیل فوریه تابع $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$$

و دارای خواص زیر است :

(i) اگر f مشتق‌پذیر باشد، $\widehat{(D^\alpha f)}(\xi)=(2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$ به ازای هر اندیس چندگانه $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

(ii) $\widehat{(f*g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ که $(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$

(iii) $\left(e^{-\pi a|x|^2}\right)^\wedge = a^{-n/2} e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}$ برای هر $0<a$.

حال تعریف کنید
$$\hat{u}(\xi,t):=\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx$$
و از معادله (1) تبدیل فوریه بگیرید:
$$0=\int_{\mathbb{R}^n}(u_t-\Delta u)\,e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx$$
$$=\partial_t\hat{u}+4\pi^2|\xi|^2\,\hat{u} \qquad (3)$$

با این کار، PDE (1) به ODE، (3) تبدیل می‌شود. جواب (3) با توجه به شرط اولیه (2) به راحتی به دست می‌آید

$$\hat{u}(\xi,0)=\int_{\mathbb{R}^n} u(x,0)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx=\hat{g}(\xi)$$

(3) از رابطه $\Rightarrow \quad \hat{u}(\xi,t)=e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\,\hat{u}(\xi,0)=e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\,\hat{g}(\xi)$

به کمک خواص (ii) و (iii) خواهیم داشت : (در (iii) قرار دهید $a=\frac{1}{4\pi t}$)

$$\hat{u}(\xi,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\left(e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right)^{\wedge}\hat{g}(\xi)$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\left[e^{-\frac{|x|^2}{4t}} * g(x)\right]=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\,e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,g(y)\,dy \qquad (4)$$

محاسبات بالا نشان می‌دهد هر جواب (1) و (2) که تبدیل فوریه داشته باشد در رابطه (4) باید صدق کند. در ادامه

به این سؤال پاسخ خواهیم داد که اگر u با رابطه (4) تعریف شود در (1) و (2) صدق می‌کند.

تعریف - تابع $\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ که در $t>0$ تعریف شده است، جواب اساسی معادله گرما یا هسته گرمایی (Heat Kernel) نامیده می‌شود.

اگر $x \neq 0$ داریم $\lim_{t\to 0} \Phi(x,t) = 0$ ولی $\Phi(0,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \longrightarrow \infty$.

از طرفی برای هر $t>0$ داریم:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx = 1$$ زیرا

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}\,dz$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_i^2}\,dz_i = 1$$

با توضیحات بالا می‌توانیم $\Phi(x,0)$ را اندازه اتمی دیراک در مبدأ گرفت. لذا جواب اساسی در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \partial_t \Phi - \Delta \Phi = 0 & t>0 \\ \Phi(x,0) = \delta_0 \end{cases}$$

این مطلب توجیهی است برای این که

$$u(x,t) = \Phi * g = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy \qquad (5)$$

در (1) و (2) صدق می‌کند. اثبات دقیق آن در قضیه زیر می‌آید.

قضیه- فرض کنید $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ و تابع u با رابطه (5) تعریف شود. آنگاه

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

(ii) u در معادله (1) صدق می‌کند.

(iii) شرط اولیه (2) بدین معنا برقرار است که برای هر $x^0 \in \mathbb{R}^n$ داریم $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,\ t>0}} u(x,t) = g(x^0)$

اثبات- برای هر $\delta>0$ تابع $\Phi(x,t)$ در $t>\delta$ هموار و کران دار است. در نتیجه $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(\delta,\infty))$ و جابجایی مشتق و انتگرال مجاز است. در نتیجه

$$u_t-\Delta u=0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(\delta,\infty).$$

چون δ دلخواه است، (i) و (ii) اثبات می‌شود. برای اثبات (iii) نقطه $x^0\in\mathbb{R}^n$ و $\varepsilon>0$ را در نظر بگیرید. بنابر پیوستگی g مقدار $\delta>0$ وجود دارد که

$$|g(y)-g(x^0)|<\varepsilon \qquad \text{if} \quad |y-x^0|<\delta$$

حال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
|u(x,t)-g(x^0)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)\left[g(y)-g(x^0)\right]dy\right| \\
&\le \int_{B_\delta(x^0)}\Phi(x-y,t)\,|g(y)-g(x^0)|\,dy \\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x^0)}\Phi(x-y,t)\,|g(y)-g(x^0)|\,dy =: I+J
\end{aligned}$$

$$I \le \varepsilon \int_{B_\delta(x^0)} \Phi(x-y,t)\,dy \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,dy = \varepsilon \qquad (6)$$

$$J \le 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x^0)} \Phi(x-y,t)\,dy \le \frac{C}{t^{n/2}} \int_{|y-x^0|>\delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy$$

اگر x را به اندازه کافی نزدیکِ x^0 انتخاب کنیم به طوری که $|x-x^0|<\delta/2$ وقتی $|y-x^0|>\delta$ آنگاه

$$|y-x^0| \le |y-x| + |x-x^0| < |y-x| + \frac{\delta}{2} \le |y-x| + \frac{1}{2}|y-x^0|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|y-x^0| \le |y-x|$$

$$\Rightarrow J \le \frac{C}{t^{n/2}} \int_{|y-x^0|>\delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy \le \frac{C}{t^{n/2}} \int_{|y-x^0|>\delta} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}}\,dy = C\int_{|z|>\frac{\delta}{\sqrt{t}}} e^{-|z|^2/16}\,dz \xrightarrow[t\to 0]{\text{وقتی}} 0 \qquad (7)$$

با در نظر گرفتن (6) و (7) نتیجه می‌شود که $\limsup_{t\to 0^+} |u(x,t)-g(x^0)| \le \varepsilon$ برای $|x-x^0|<\delta/2$. دلخواه بودن ε اثبات (iii) را کامل می‌کند.

نکته - از فرمول (۵) نتیجه می‌شود که اگر $g \geq 0$ یک تابع مثبت غیرصفر باشد، آنگاه $u(x,t) > 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $t > 0$ (هرچند g تنها در یک ناحیه کوچکی ناصفر باشد.) این پدیده بدین صورت تفسیر می‌شود که سرعت پخش معادله نامتناهی است. یک اغتشاش کوچک در نزدیکی یک نقطه مثل مبدأ باعث می‌شود در همه زمانهای بعد از آن در همه جا اثرات اغتشاش دیده شود. به طور مثال اگر یک کوه یخ داشته باشید و یک سوزن داغ را در یک نقطه آن فرو کنید در همه جای این کوه یخ دما بالای صفر خواهد بود. البته دقت کنید هرچند دما در نقاط دور دست مثبت است ولی مقدار آن بسیار ناچیز است. در واقع اگر $\operatorname{Supp} g \subseteq B_R$ آنگاه برای $|x| \geq 2R$ تقریب زیر را داریم (چرا؟)

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_R} e^{-|x-y|^2/4t} |g(y)| \, dy \leq \frac{e^{-\frac{|x|^2}{16t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_R} |g(y)| \, dy$$

تمرین – به روش تبدیل فوریه نشان دهید جواب معادله ناهمگن

$$(8)\qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

نمایشی به صورت زیر دارد:

$$(9)\qquad u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds$$

نمایش (9) به اصل دوهامل معروف است. این اصل بیان می‌کند که جواب (8) مجموع (انتگرال) خانواده‌ای از معادلات همگن با شرط اولیه زیر است:

$$(10)\qquad \begin{cases} \partial_t u(x,t;s) - \Delta u(x,t;s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(x,s;s) = f(x,s) & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{cases}$$

دقت کنید جمله f در سمت راست (8) به عنوان واکنش سیستم یا به عبارتی نرخ رشد جمعیت تعبیر می‌شود که در لحظه s به مقدار $f(x,s)$ به کل جمعیت سیستم اضافه می‌شود. تأثیرات میزان جمعیت اضافه شده (یا کم شده) در لحظه s در زمان‌های بعد از آن با حل معادله (10)

دیده می‌شود. جمع همه این اثرات یکجا با معادله (8) بیان شده است، لذا باید جواب (8) برابر باشد با:

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)\,ds$$

که $u(x,t;s)$ جواب (10) است. به راحتی با فرمول نمایش معادلات همگن، رابطه (5)، می‌توان جواب (10) را بدست آورد و دید که انتگرال بالا همان فرمول (9) است.

تمرین - با فرض اینکه $f\in C^2$ تکیه‌گاه فشرده دارد، ثابت کنید تابع u که از رابطه (9) به دست می‌آید، مشتق‌پذیر است و در (8) صدق می‌کند.

نکته - ترکیب فرمولهای (5) و (9) و خاصیت خطی معادله گرما نتیجه می‌دهد که

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds$$

در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

PDE

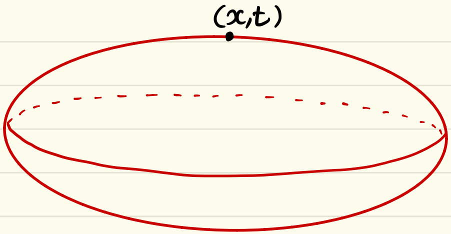
جلسه دوازدهم

۹۹/۱/۳۰

فرمول مقدار میانگین

شبیه توابع هارمونیک، جوابهای معادله حرارت دارای خاصیت مقدار میانگین هستند. مقدار یک تابع هارمونیک در نقطه x برابر میانگین خود در $B_r(x)$ است. کره به شعاع r، سطح تراز جواب اساسی معادله لاپلاس، $\Phi(x-y)$، است. برای معادله گرما سطوح تراز همین نقش را بازی می‌کند. مجموعه

$$E(x,t;r)=\left\{(y,s)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\ :\ s\leq t\ ,\ \Phi(x-y,t-s)\geq\frac{1}{r^n}\right\}$$



را گوی گرمایی (Heat-Ball) به شعاع r به مرکز نقطه (x,t) نامیده می‌شود و شکلی شبیه روبرو دارد.

نمادگذاری: اگر $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ مجموعه باز باشد،

$$\Omega_T=\Omega\times(0,T]$$

استوانه سهموی (parabolic cylinder) نامیده می‌شود و مرز سهموی آن را با

$$\Gamma_T=\bar{\Omega}_T\setminus\Omega_T=(\partial\Omega\times[0,T])\cup(\Omega\times\{t=0\})$$

نشان می‌دهیم.

فضای توابعی که روی Ω_T تعریف شده‌اند و نسبت به x، k بار مشتق پیوسته دارد و نسبت به t، l بار با $C^k_l(\Omega_T)$ نشان می‌دهیم.

قضیه (خاصیت مقدار میانگین): اگر $u \in C^2_1(\Omega_T)$ جواب معادله گرما باشد، آنگاه

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dy\, ds.$$

برای هر $E(x,t;r) \subseteq \Omega_T$.

اثبات. برای سادگی فرض کنید $x=0$ و $t=0$ و $E(0,0;r)=E(r)$ و تعریف کنید

$$\phi(r) := \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = \iint_{E(1)} u(ry, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds.$$

مشابه خاصیت مقدار میانگین توابع هارمونیک از رابطه بالا مشتق می‌گیریم و نشان می‌دهیم $\phi(r)$ یک تابع ثابت است:

$$\phi'(r) = \iint_{E(1)} \left[\sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} u(ry, r^2 s) \cdot y_i + 2rs\, \partial_s u(ry, r^2 s) \right] \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[\sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} u(y,s) \cdot y_i + 2s\, \partial_s u(y,s) \right] \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds$$

$$=: A + B$$

حال تعریف کنید

$$\Psi(y,s) := -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log r$$

به راحتی می‌توان دید که روی مرز گوی گرمایی $E(r)$ داریم $\Psi = 0$، زیرا آنجا $\Phi(y,-s) = r^{-n}$. به علاوه داریم:

$$\partial_{y_i} \Psi = \frac{y_i}{2s}, \quad \partial_s \Psi = \frac{-n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}$$

در نتیجه:

$$B = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 2\partial_s u \frac{|y|^2}{s}\, dy\, ds = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4\partial_s u \sum_{i=1}^{n} y_i\, \partial_{y_i} \Psi\, dy\, ds$$

$$= \frac{-1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} (4\partial_s u \cdot y_i)\, \Psi\, dy\, ds$$

انتگرال‌گیری جزء به جزء (قضیه دیورژانس) و توجه به اینکه $\Psi = 0$ روی $\partial E(r)$

$$= \frac{-1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4n \partial_s u \cdot \Psi + \sum_{i=1}^{n} 4 \partial_{sy_i} u \cdot y_i \Psi \; dy ds$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n \Delta u \cdot \Psi + \sum_{i=1}^{n} 4 \partial_{y_i} u \cdot \partial_s (y_i \Psi) \; dy ds$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4n \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} u \cdot \partial_{y_i} \Psi + \sum_{i=1}^{n} 4 \partial_{y_i} u \cdot y_i \left[-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right] dy ds$$

$$= \frac{-1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} u \cdot y_i \frac{|y|^2}{s^2} \; dy ds = -A$$

$$\Rightarrow \phi'(r) = A + B = 0$$

بنابراین ϕ یک تابع ثابت است و

$$\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = u(0,0) \times \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^n} \iint_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = u(0,0) \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4 u(0,0)$$

اصل ماکسیمم :

قضیه : فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه بازکران دار و $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ جواب معادله گرما در Ω_T باشد. آنگاه

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u \qquad (i)$$

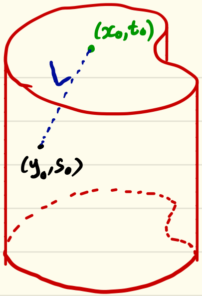
(ii) به علاوه اگر، Ω همبند باشد و u در نقطه $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ ماکسیمم خود را بگیرد، آنگاه u در $\overline{\Omega}_{t_0}$ ثابت است.

اثبات - گام اول: فرض کنید $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ و $M = u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u$ ، آنگاه برای هر r به اندازه کافی کوچک که

$E(x_0,t_0;r) \subseteq \Omega_T$ و بنابر فرمول مقدار میانگین داریم :

$$M = u(x_0,t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} u(y,s) \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, dy\,ds \leq \frac{M}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, dy\,ds = M$$

$$\Rightarrow \quad u(y,s) = M \qquad \forall (y,s) \in E(x_0,t_0;r)$$



گام دوم: برای هر نقطه دلخواه $(y_0,s_0)\in\Omega_T$ که $s_0<t_0$ و خط واصل بین آن و (x_0,t_0) که با L نشان می‌دهیم داخل Ω_T قرار می‌گیرد، ثابت می‌کنیم که u روی L برابر M است.

$$r_0 = \min\left\{ s_0\le s\le t_0 \ :\ u(x,t)=M \ \text{برای همه نقاط}\ (x,t)\in L \ \text{که}\ s\le t\le t_0 \right\}$$

بنابر پیوستگی u، می‌نیمم مجموعه بالا وجود دارد و اگر $s_0<r_0$ آنگاه $u(z_0,r_0)=M$ که $(z_0,r_0)\in L$ و بنابر گام اول $u\equiv M$ روی $E(z_0,r_0;r)$ برای یک مقدار کوچک r. دقت کنید که قسمت کوچکی از L داخل $E(z_0,r_0;r)$ قرار می‌گیرد که با فرض $s_0<r_0$ تناقض دارد.

گام سوم: برای هر نقطه دلخواه $x\in\Omega$، با توجه به همبندی Ω نقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m=x$ وجود دارند که پاره خط واصل بین x_{i-1} و x_i داخل Ω باشد. نقاط $t_0>t_1>\dots>t_m=t$ را به دلخواه انتخاب کنید، آنگاه پاره خط واصل بین (x_{i-1},t_{i-1}) و (x_i,t_i) در Ω_T قرار می‌گیرد و بنابر گام دوم $u\equiv M$ روی هر پاره خط. در نتیجه $u(x,t)=M$.

نکته - با جایگذاری $-u$ به جای u در قضیه قبل می‌توان اصل می‌نیمم را برای معادله گرما با تغییر max به min به دست آورد.

همچنین اصل ماکسیمم را برای $|u|$ نتیجه گرفت.

نکته - اصل ماکسیمم (می‌نیمم) معادله گرما بدین معنا است که ماکسیمم (می‌نیمم) تابع روی $\partial\Omega$ یا در لحظه $t=0$ به دست می‌آید.

و قسمت دوم قضیه که به اصل ماکسیمم قوی معروف است اگر u در نقطه درونی ماکسیمم (می‌نیمم) خود را بگیرد، آنگاه u در همه لحظات قبل یک تابع ثابت است. به کمک این اصل می‌توان نشان داد که چرا سرعت پخش در معادله گرما نامتناهی است. اگر u جواب مسأله زیر باشد:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega_T \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ u = g & \text{on} \quad \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

اگر $g \geq 0$ و در جایی مثبت باشد، آنگاه u همه جا مثبت است.

نتیجه (یکتایی جواب) : معادله گرما با شرایط اولیه و مرزی زیر حداکثر یک جواب $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ دارد.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in} \quad \Omega_T \\ u = h & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u = g & \text{on} \quad \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

اثبات - اگر u و $\tilde{u}$ دو جواب این مسأله باشند، $\omega = u - \tilde{u}$ در مسأله زیر صدق می کند.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega_T \\ u = 0 & \text{on} \quad \Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T) \cup \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

بنابر اصل ماکسیمم $\max\limits_{\overline{\Omega}_T} |\omega| = \max\limits_{\Gamma_T} |\omega| = 0$ و در نتیجه $\omega \equiv 0$.

PDE

جلسه سیزدهم ۹۹/۲/۱

نکته- اصل ماکسیمم معادله گرما همانند معادله لاپلاس در نواحی بیکران درست نیست. قضیه زیر با اضافه کردن شرط رشد روی جواب معادله اصل ماکسیمم را در $\mathbb{R}^n$ ثابت می‌کند.

قضیه - فرض کنید $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ در معادله زیر صدق کند

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

و در شرط رشد زیر برای ثابتهای $A, a > 0$ صدق کند.

$$u(x,t) \leq A e^{a|x|^2} \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T]$$

در این صورت

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

اثبات - ابتدا فرض کنید $4aT<1$ و $\varepsilon>0$ را در نظر بگیرید که $4a(T+\varepsilon)<1$. سپس برای هر نقطه ثابت $y\in\mathbb{R}^n$ و مقدار دلخواه $\mu>0$ قرار دهید:

$$\omega_\mu(x,t)=\frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}\,e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0$$

این تابع برای $0\le t\le T$ در معادله گرما صدق می‌کند. حال اصل ماکسیمم را برای تابع $v(x,t):=u(x,t)-\omega_\mu(x,t)$ در ناحیه $\Omega_T=B_r(y)\times(0,T]$ به کار می‌بریم.

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v = \max_{\Gamma_T} v \qquad \textcolor{red}{(1)}$$

از طرفی برای محاسبه ماکسیمم v روی $\Omega\times\{t=0\}\cup\partial\Omega\times(0,T)=\Gamma_T$ داریم:

$$v(x,0)=u(x,0)-\frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}}\,e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}}\le u(x,0)=g(x) \qquad \textcolor{red}{(2)}$$

و برای $x\in\partial\Omega$ یعنی $|x-y|=r$ داریم:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

$$\leq A e^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}$$

$$\leq A e^{a(|y|+r)^2} - \mu\left(4(a+\gamma)\right)^{n/2} e^{(a+\gamma)r^2} \qquad (3)$$

که $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a+\gamma$ برای $\gamma > 0$ (جهت یادآوری فرض کرده ام $4a(T+\varepsilon)<1$). بنابراین وقتی r به اندازه کافی بزرگ باشد، سمت راست (3) کوچکتر از $\sup_{\mathbb{R}^n} g$ خواهد بود. در نتیجه

وقتی $|x-y| = r$ ،
$$v(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

در مقایسه با (1) و (2) نتیجه می شود که

$$v(y,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

اکنون اجازه دهید $\mu \to 0$، نتیجه می‌شود (به شرط آنکه $4aT<1$)

$$u(y,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t \leq T$$

حال فرض کنید $4aT \geq 1$ و قرار دهید $T_1 = \frac{1}{8a}$. نتیجه بالا را در بازه‌های $[0,T_1]$، $[T_1,2T_1]$، ... تکرار کنید تا اثبات قضیه کامل شود.

نتیجه (یکتایی). مسأله زیر حداکثر یک جواب $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ دارد که در شرط رشد $|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$ برای ثابت‌های $A, a > 0$ صدق می‌کند:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

نکته - اگر شرط رشد را از قضیه قبل حذف کنیم، نتیجه درست نیست. مسأله

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

به غیر از جواب بدیهی $u \equiv 0$ بی‌نهایت جواب دیگر دارد که سرعت رشد آنها وقتی $|x| \to \infty$ بسیار زیاد است. به عنوان مثال

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \frac{d^k}{dt^k} e^{-1/t^2}$$

جواب دیگری از این مسأله است. این جوابها را جواب غیرفیزیکی می‌نامیم.

روشهای انرژی

به کمک روش انرژی اثبات دیگری برای یکتایی جواب ارائه می‌شود:

فرض کنید u و $\tilde{u}$ دو جواب معادله گرما با شرایط اولیه و مرزی باشد، آنگاه $w = u - \tilde{u}$ در مسأله زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{in } \Omega_T \\ w = 0 & \text{on } \Gamma_T \end{cases}$$

تعریف کنید:

$$e(t)=\int_\Omega |w(x,t)|^2\,dx$$

آنگاه

$$\dot e(t)=2\int_\Omega w\,w_t\,dx = 2\int_\Omega w\,\Delta w\,dx = -2\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \le 0$$

فرمول گرین با توجه به اینکه $w|_{\partial\Omega}=0$.

درنتیجه $e(t)$ تابع نزولی است و $e(t)\le e(0)=0$ برای هر $t\ge 0$. بنابراین $e(t)\equiv 0$ و $w\equiv 0$ در Ω_T.

یک سؤال مهم درخصوص معادله گرما، بررسی یکتایی برگشت در زمان (backward in time) است. فرض کنید u و $\tilde u$ دو جواب مسأله زیر باشند،

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=f & \text{in } \Omega_T\\ u=g & \text{on } \partial\Omega\times[0,T]\end{cases}$$

اگر این دو جواب در زمان T باهم برابر باشند، در ادامه نشان می‌دهیم که هردو در Ω_T برابر هستند. دقت کنید در مسأله بالا شرط اولیه برای $t=0$ نداریم.

دوباره قرار دهید $\omega = u - \tilde{u}$ و تعریف کنید:

$$e(t) = \int_\Omega |\omega(x,t)|^2 \, dx$$

مشابه محاسبات قبل

$$\dot{e}(t) = -2\int_\Omega |\nabla \omega(x,t)|^2 \, dx$$

$$\ddot{e}(t) = -4\int_\Omega \nabla\omega \cdot \nabla\omega_t \, dx = 4\int_\Omega \Delta\omega \cdot \omega_t \, dx = 4\int_\Omega |\Delta\omega|^2 \, dx$$

$$\Rightarrow \left(\dot{e}(t)\right)^2 = 4\left[\int_\Omega |\nabla\omega|^2 dx\right]^2 = 4\left[-\int_\Omega \omega\,\Delta\omega \, dx\right]^2$$

$$\leq \left[\int_\Omega \omega^2 dx\right]\left[4\int_\Omega |\Delta\omega|^2 dx\right]$$

$$= e(t) \cdot \ddot{e}(t) \qquad (4)$$

اگر $e(t)=0$ برای $0 \leq t \leq T$ ، اثبات تمام است، در غیر این صورت بازه $[t_1,t_2] \subseteq [0,T]$ وجود دارد که

$$e(t_2) = 0 \,, \qquad e(t) > 0 \quad \text{for } t_1 \leq t < t_2 .$$

($e(T)=0$ دقت کنید)

اگر $f(t) = \log e(t)$ باشد، آنگاه

$$\ddot{f}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{e}}{e}\right) = \frac{\ddot{e}e-(\dot{e})^2}{e^2} \geq 0$$

بنابر (4)

در نتیجه f در بازه $t_1<t<t_2$ یک تابع محدب است و

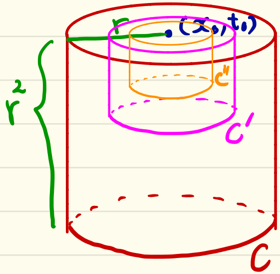
$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau) f(t_1) + \tau f(t) \qquad \forall\ 0\leq\tau\leq 1$$

$$\Rightarrow \quad e((1-\tau)t_1+\tau t) \leq e(t_1)^{1-\tau}\, e(t)^{\tau}$$

قرار دهید $t=t_2$. نتیجه می‌شود برای هر $0\leq\tau\leq 1$ ، $e((1-\tau)t_1+\tau t_2)=0$ یا $e(t)=0$ برای $t_1<t<t_2$.

نظم جواب معادله گرما:

قضیه- اگر $u\in C_1^2(\Omega_T)$ جواب معادله گرما باشد، آنگاه $u\in C^\infty(\Omega_T)$.



اثبات- $C = C(x_0,t_0;r)=\{(y,s) : |y-x_0|\le r \,,\, t_0-r^2\le s\le t_0\}$

$$C''=C(x_0,t_0;\tfrac{r}{2}) \quad , \quad C'=C(x_0,t_0;\tfrac{3r}{4})$$

تابع هموار $\zeta=\zeta(x,t)$ را در نظر بگیرید به گونه‌ای که $0\le\zeta\le 1$ و $\zeta\equiv 1$ روی C' به علاوه در $\mathbb{R}^n\times[0,t_0]-C$ ، $\zeta\equiv 0$. حال قرار دهید $v=\zeta u$ آنگاه

$$(5)\begin{cases} v_t-\Delta v=\zeta(\underbrace{u_t-\Delta u}_{=0})+[\zeta_t u-2\nabla\zeta\cdot\nabla u-u\Delta\zeta]=:\tilde{f}(x,t) \quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,t_0) \\ v(x,0)=0 \end{cases}$$

به علاوه اگر r به اندازه کافی کوچک باشد،

قضیهٔ یکتایی جواب در $\mathbb{R}^n$ تضمین می‌کند که $\tilde{v} = v$.

بنابر نمایش جواب معادله گرما (جلسه 11) می‌دانیم

$$\tilde{v}(x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s)\, \tilde{f}(y,s)\, dy\, ds$$

نیز در معادله (5) صدق می‌کند. از طرفی $\tilde{f}$ یک تابع کران‌دار است (یک تابع پیوسته با تکیه‌گاه در C). بنابراین $\tilde{v}$ نیز کران‌دار است (چرا؟)

هم‌چنین تابع $v = u\zeta$ نیز کران‌دار است $(\operatorname{Supp} v \subseteq C)$. v و $\tilde{v}$ دو جواب کران‌دار (5) هستند و قضیهٔ یکتایی جواب در $\mathbb{R}^n$ با رشد $Ae^{a|x|^2}$ (در اینجا می‌توان قرار داد $a=0$) تضمین می‌کند که $v = \tilde{v}$. در نتیجه

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s) \left[\zeta_t u - 2 \nabla\zeta \cdot \nabla u - u \Delta\zeta \right] dy\, ds$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\underbrace{\Phi(x-y, t-s)(\zeta_t - \Delta\zeta) + 2\,\mathrm{div}_y\big(\Phi(x-y, t-s)\nabla\zeta\big)}_{K(x,y,t,s)} \Big] u(y,s)\, dy\, ds$$

$$= \iint_C K(x,y,t,s)\, u(y,s)\, dy\, ds$$

خارج از C داریم $\zeta = 0$

از طرفی $\zeta \equiv 1$ روی C' ، بنابراین

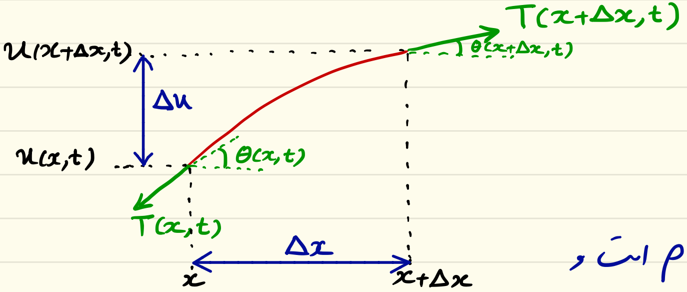
$$(6) \quad u(x,t) = \iint_{C} K(x,y,t,s)\, u(y,s)\, dy\, ds \qquad \forall (x,t) \in C'$$

از فرمول (6) می‌توانیم نتیجه بگیریم که $u \in C^\infty$ به شرط آنکه K و مشتقات آن انتگرال‌پذیر باشند. از طرفی $K \equiv 0$ روی C' چون در آنجا $\zeta \equiv 1$ و اگر $(x,t) \in C''$ تابع $(y,s) \longmapsto \Phi(x-y, t-s)$ و مشتقات آن در $C \setminus C'$ انتگرال‌پذیر است. در نتیجه تابع K و مشتقات آن وقتی $(x,t) \in C''$ انتگرال‌پذیر است و $u \in C^\infty$ روی مجموعه C'' .

PDE

۹۹,۲,۶ جلسه چهاردهم

معادله موج



مدل ارتعاش یک سیم :

یک سیم را در نظر بگیرید که در نقطه x دارای چگالی $\rho(x)$ است و در حال ارتعاش است. فرض می‌کنیم سیم تنها به صورت عمودی ارتعاش می‌کند و در راستای افقی (راستای سیم) جابجایی نداشته باشد.

$u(x,t)$ مکان نقطه x در زمان t نسبت به یک مبدأ را نشان می‌دهد و $T(x,t)$ نیروی کششی سیم در نقطه x است.

یک قطعه کوچک آن را در فاصله x تا $x+\Delta x$ را در نظر می‌گیریم.

نیروی افقی در راستای سیم $= |T(x+\Delta x,t)| \cos\theta(x+\Delta x,t) - |T(x,t)| \cos\theta(x,t) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(|T(x,t)| \cos\theta(x,t)\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \quad |T(x,t)| \cos\theta(x,t) = \tau(t)$$

$$\text{نیروی عمودی به سیم در } [x, x+\Delta x] = |T(x+\Delta x, t)| \sin\theta(x+\Delta x, t) - |T(x,t)| \sin\theta(x,t)$$

$$= \underbrace{\rho(x) \cdot \Delta x}_{\text{جرم}} \; \underset{\text{شتاب عمودی}}{\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)}} \qquad (1)$$

(هرچند تحت کشش سیم طول تغییر می‌کند، در واقع $\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta x)^2}$ است، ولی تحت کشش چگالی نیز تغییر می‌کند. در هر صورت جرم ثابت است.)

$$\Longrightarrow \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(|T(x,t)| \sin\theta(x,t)\Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\big(\tau(t) \tan\theta(x,t)\big)$$

از طرفی داریم:

$$\tan\theta(x,t) = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \partial_x u$$

$$\Longrightarrow \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos\theta \cdot \tau(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

و به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

به‌علاوه اگر نیروی عمودی $f(x,t)$ بر واحد جرم نیز به سیم وارد شود، در معادله برهم‌کنش نیروها در رابطه (1) باید جمله

$$\rho(x)\,\Delta x\, f(x,t)$$

به سمت چپ اضافه شود، که در نهایت به معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

می‌رسیم که نسخه ناهمگن معادله موج (2) است.

نکته ـ اگر بخواهیم نیروی اصطکاک را نیز در نظر بگیریم، در سمت چپ (1) باید

ضریب اصطکاک   سرعت

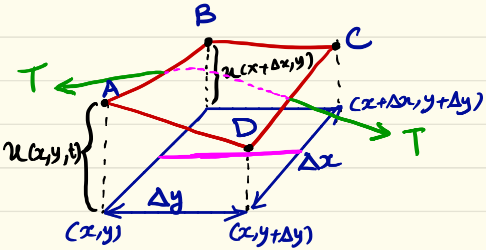
$-K\rho(x)\,\Delta x\,\partial_t u$ را اضافه کنیم

که در نهایت شکل معادله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K\,\partial_t u = 0$$

ثابت K ضریب damping نامیده می‌شود.

موج دوبعدی: یک پوسته در حال ارتعاش را در نظر بگیرید،
مانند یک طبل که تنها در راستای عمود بر سطح در حال ارتعاش است.



برهم‌کنش نیروهای افقی در هر قطعه $[x, x+\Delta x]\times[y, y+\Delta y]$ از این پوسته صفر است
و تنها نیروی عمود باعث جابجایی $u(x,y,t)$ در نقطه (x,y) در زمان t می‌شود.

$T(x,y,t)$ نیروی کشش در هر نقطه (x,y) است. برای محاسبه مؤلفه عمودی نیروی کشش T،
مثلاً در شکل بالا روی ضلع CD نقطه $(x_1, y+\Delta y)$ را در نظر بگیرید که $x \le x_1 \le x+\Delta x$. پاره خط واصل بین
(x_1, y) و $(x_1, y+\Delta y)$ یک منحنی روی پوسته نشان می‌دهد (خط‌چین صورتی). امتداد این منحنی راستای نیروی
کشش $T(x_1, y+\Delta y, t)$ است. در نتیجه مؤلفه عمودی T برابر است با $|T|\sin\theta$ که

$$\tan\theta = \partial_y u(x_1, y+\Delta y, t)$$

فرض می‌کنیم در یک محیط الاستیک هستیم و تغییرات آن قدر زیاد نیست که باعث تغییر شکل شود. لذا می‌توانیم فرض کنیم θ نزدیک صفر است و

$\sin\theta \approx \tan\theta$. درنتیجه برآیند مؤلفه عمودی نیروهای وارده بر ضلع CD برابر است با :

$$\int_{x}^{x+\Delta x} |T| \tan\theta(x_1, y+\Delta y, t)\, dx_1 = |T|\, \partial_y u(x_1^*, y+\Delta y, t) \cdot \Delta x$$

به طور مشابه مؤلفه عمودی نیروی وارده بر ضلع AB برابر است با

$$|T|\, \partial_y u(x_2^*, y, t) \cdot \Delta x$$

بر ضلع AD و BC نیز به ترتیب $|T|\,\partial_x u(x, y_1^*, t)\,\Delta y$ و $|T|\,\partial_x u(x+\Delta x, y_2^*, t)\,\Delta y$.

درمجموع بنابر قانون دوم نیوتن داریم :

$$\underbrace{\rho\, \Delta x\, \Delta y}_{\text{جرم}} \cdot \underbrace{\partial_t^2 u}_{\text{شتاب عمودی}} = |T| \left[\partial_y u(x_1^*, y+\Delta y, t) - \partial_y u(x_2^*, y, t) \right] \Delta x$$
$$+ |T| \left[\partial_x u(x+\Delta x, y_2^*, t) - \partial_x u(x, y_1^*, t) \right] \Delta y$$

$$\Rightarrow \quad \rho\, \partial_t^2 u = |T| \left[\frac{\partial_y u(x_1^*, y+\Delta y, t) - \partial_y u(x_2^*, y, t)}{\Delta y} + \frac{\partial_x u(x+\Delta x, y_2^*, t) - \partial_x u(x, y_1^*, t)}{\Delta x} \right]$$

وقتی $\Delta x, \Delta y \to 0$ نتیجه می‌شود که

$$\partial_t^2 u = \frac{T}{\rho}\left[\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right] = \frac{T}{\rho}\Delta u$$

حل موج یک بعدی - روش دالامبر:

$$(3)\quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases}$$

تغییر متغیر $\xi = x+ct$ ، $\eta = x-ct$ را در نظر بگیرید، آنگاه

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi + u_\eta \Rightarrow u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_t = u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \cdot \eta_t = c(u_\xi - u_\eta) \Rightarrow u_{tt} = c^2\left[u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right]$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \implies u_{\xi\eta} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

با جایگذاری شرایط اولیه خواهیم داشت :

$$g(x) = u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x)$$

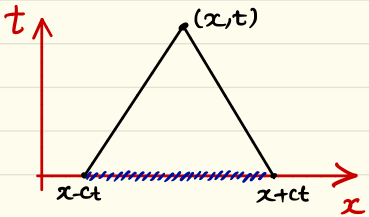
$$h(x) = u_t(x,0) = c\left[\varphi'(x) - \psi'(x)\right] \Rightarrow \varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c}\int_0^x h(s)\,ds + \varphi(0) - \psi(0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x h(s)\,ds + \frac{1}{2}\left[\varphi(0) - \psi(0)\right] \\ \psi(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x h(s)\,ds - \frac{1}{2}\left[\varphi(0) - \psi(0)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\,ds} \qquad (4)$$

فرمول دالامبر

از فرمول دالامبر دیده می‌شود که مقدار $u(x,t)$ تنها به شرایط اولیه در بازه $[x-ct, x+ct]$ وابسته است و اگر در شرط اولیه در نقطه x_0 تغییری حاصل شود، در زمان t تنها در نقاطی که در بازه $[x_0-ct, x_0+ct]$ وارد می‌کنند، اثر می‌گذارد. در واقع تغییرات با سرعت c در دامنه پخش می‌شوند.

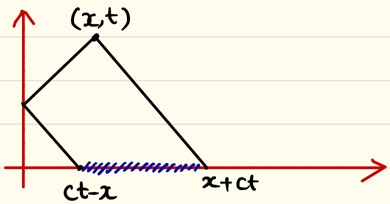


به همین دلیل ضریب c در معادله موج $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ سرعت موج نامیده می‌شود و سرعت پخش تغییرات متناهی است. (در مقایسه با معادله گرما)

تمرین- اگر $g\in C^2$ و $h\in C^1$ نشان دهید تابع u که با فرمول دالامبر (4) تعریف می‌شود در معادله با شرایط اولیه (3) صدق می‌کند.

اگر سیمی را در نظر بگیریم که یک طرف آن حرکت نمی‌کند، معادله موج برای آن بدین صورت خواهد بود:

$$(5)\quad \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & x>0,\ t>0 \\ u(x,0)=g(x) \\ u_t(x,0)=h(x) \\ u(0,t)=0 \end{cases}$$



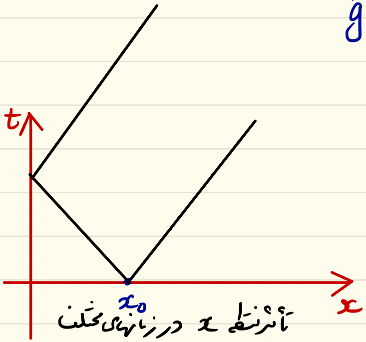
برای حل این مسئله، با انعکاس دامنه تابع را به $\mathbb{R}$ توسعه می‌دهیم.

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & x>0 \\ -u(-x,t) & x<0 \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x>0 \\ -g(-x) & x<0 \end{cases} \qquad \tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x>0 \\ -h(-x) & x<0 \end{cases}$$

آنگاه به سادگی می‌توان دید که

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0 & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{g}(x), \quad \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{h}(x) \end{cases}$$



و به کمک فرمول دالامبر (4) برای $\tilde{u}$ خواهیم داشت:

$$(6) \qquad u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\,ds & x \geq ct > 0 \\ \frac{1}{2}\left[g(x+ct) - g(ct-x)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} h(s)\,ds & ct \geq x > 0 \end{cases}$$

حل معادله موج در ابعاد بالاتر:

$$(7)\quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u = g,\ u_t = h & t = 0 \end{cases}$$

قرار دهید:

$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, dS_y$$

$$G(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\, dS_y$$

$$H(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} h(y)\, dS_y$$

ایده اصلی حل (7) این است که وقتی $n=3$ برای هر نقطه $x \in \mathbb{R}^3$ تابع $\tilde{U} = rU$ در معادله موج زیر صدق می‌کند.

$$(8)\quad \begin{cases} \tilde{U}_{tt} - c^2 \tilde{U}_{rr} = 0 & t, r > 0 \\ \tilde{U} = \tilde{G} = rG,\ \tilde{U}_t = \tilde{H} = rH & t = 0 \\ \tilde{U}(0,t) = 0 \end{cases}$$

و سپس به کمک فرمول (6)، $\tilde{U}$ و از آن تابع u را به دست آوریم.

گام اول:

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2\left[U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r\right] & t, r > 0 \\ U = G \;,\; U_t = H & t = 0 \end{cases}$$

تمرین- رابطه بالا را اثبات کنید.

گام دوم- برای $n=3$ ، معادله (8) برقرار است. (تمرین)

گام سوم- بنابر (6) برای $r \leq ct$ داریم:

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(x;r+ct) - \tilde{G}(x;ct-r)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{r+ct} \tilde{H}(x;s)\,ds$$

گام چهارم-

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} U(x;r,t) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0^+}\left(\frac{\tilde{G}(x;r+ct) - \tilde{G}(x;ct-r)}{2r} + \frac{1}{2cr}\int_{ct-r}^{ct+r} \tilde{H}(x;s)\,ds\right)$$

$$= \tilde{G}'(x;ct) + \frac{1}{c}\tilde{H}(x;ct)$$

از طرفی داریم :

$$\tilde{G}'(r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\, dS_y\right) = \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\, dS_y + r\frac{\partial}{\partial r}\fint_{\partial B(0,1)} g(x+rz)\, dS_z$$

$$= \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\, dS_y + r \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+rz)\cdot z\, dS_z$$

$$= \fint_{\partial B(x,r)} g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\, dS_y$$

در نتیجه

$$\boxed{u(x,t) = \fint_{\partial B(x,ct)} th(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\, dS_y} \qquad (9)$$

Kirchhoff فرمول

جواب برای $n=2$: هیچ تغییر متغیری روی تابع U نداریم که به معادله موج (8) برسیم. درعوض جواب برای $n=2$ را به کمک جواب موج سه‌بعدی به دست می‌آوریم. تابع $u\in C^2(\mathbb{R}^2\times[0,\infty))$ که جواب معادله موج (7) برای $n=2$ است را درنظر بگیرید و آن را به $\mathbb{R}^3$ توسعه می‌دهیم به گونه‌ای که در معادله موج نیز صدق کند.

$$\bar{u}(x_1,x_2,x_3,t)=u(x_1,x_2,t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{u}_{tt}-c^2\Delta\bar{u}=0 & t>0 \\ \bar{u}=\bar{g}\ ,\ \bar{u}_t=\bar{h} & t=0 \end{cases}$$

که $\bar{h}(x_1,x_2,x_3)=h(x_1,x_2)$, $\bar{g}(x_1,x_2,x_3)=g(x_1,x_2)$.

برای سادگی با نماد $x=(x_1,x_2)$ و $\bar{x}=(x_1,x_2,0)$ کار می‌کنیم. بنابر فرمول (9) داریم:

$$u(x,t)=\bar{u}(\bar{x},t)=\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},ct)} t\bar{h}(y)+\bar{g}(y)+D\bar{g}(y)\cdot(y-\bar{x})\,dS_y$$

$\bar{B}(\bar{x},ct)$ گوی به شعاع ct به مرکز $\bar{x}$ در $\mathbb{R}^3$ است. برای محاسبه عبارت بالا، انتگرال را به صورت انتگرال روی سطح درنظر می‌گیریم.

در این صورت عبارت داخل انتگرال بالا را $f(y)$ می‌گیریم، آنگاه

$$\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},ct)} f(y)\,ds = \frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_{\partial\bar{B}(\bar{x},ct)} f(y)\,ds = \frac{2}{4\pi c^2t^2}\int_{B(x,ct)} f(y)\left(1+|D\gamma(y)|^2\right)^{1/2} dy$$

که $\gamma(y) = \left(c^2t^2-|y-x|^2\right)^{1/2}$ و فرمول بالا بازنویسی انتگرال روی سطح $\partial\bar{B}(\bar{x},ct)$ به عنوان گراف تابع γ است.

عامل 2 هم به علت در نظر گرفتن دو نیم کره شمالی و جنوبی $\partial\bar{B}$ است. $B(x,ct)$ نیز گوی به شعاع ct در $\mathbb{R}^2$ است.

به علاوه داریم: $\left(1+|D\gamma|^2\right)^{1/2} = ct\left(c^2t^2-|y-x|^2\right)^{-1/2}$ ، در نهایت:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{ct}{2}\fint_{B(x,ct)} \frac{th(y)+g(y)+Dg(y)\cdot(y-x)}{\left(c^2t^2-|y-x|^2\right)^{1/2}}\,dy} \qquad (10)$$

فرمول Poisson

نکته- جواب های معادله موج در بعد $\underline{3}$ تنها به مقادیر اولیه روی سطح کره به شعاع ct وابسته هستند (فرمول (9)) درحالیکه در بعد $\underline{2}$ اطلاعات مقادیر اولیه روی توپ $B(x,ct)$ تأثیر دارند. برعکس اگر در نقطه x_0 در شرایط اولیه تغییری ایجاد شود، این تغییر در زمان t در بعد $\underline{3}$ تنها روی $\partial B(x_0,ct)$ اثرگذار است، درحالیکه در بعد $\underline{2}$ در تمام نقاط $B(x_0,ct)$. به عبارت دیگر تغییر

در نقطه x_0، در نقطه y تنها در زمان $\frac{|y-x_0|}{c}$ قابل درک است در بعد سه (اصل Huygens) ولی در بعد دو در همه زمان‌های بعد از $\frac{|y-x_0|}{c}$ نیز درک

می‌شود. این رفتار برای همه جواب‌های معادله موج در ابعاد بالاتر از 3 نیز بسته به اینکه بعد فضا زوج باشد یا فرد مشابه بعد <u>2</u> یا <u>3</u> است.

PDE

۹۹/۲/۲۰ جلسه جهجهم

معادلات دیفرانسیل بیضوی خطی مرتبه دو

در جلسه پنجم دیدیم که حالت‌های تعادل (جواب‌های مستقل از زمان) یک معادله واکنش - انتشاری در معادله‌ای به صورت زیر صدق می‌کنند:

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f(x,u)$$

اگر درایه‌های ماتریس $A(x)=[a^{ij}(x)]_{1\le i,j\le n}$ مشتق‌پذیر باشد، یک نسخه خطی این معادلات به عملگر دیفرانسیلی زیر می‌رسد:

$$(1) \qquad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b^{i}\partial_{i}u + cu$$

که در واقع $b^{i} = -\sum_{j=1}^{n}\partial_{j}a^{ij}$ و $f(u)=-cu$. L یک عملگر دیفرانسیل خطی است. برای سادگی فرض می‌کنیم $a^{ij}=a^{ji}$.

(وقتی $u\in C^{2}$ است، این شرط محدودکننده نیست) هدف بررسی جواب‌های معادله دیفرانسیل $Lu=f$ است. این معادله را به صورت دیگری می‌توان نوشت که فرم دیورژانسی نامیده می‌شود و عموماً مورد استفاده است:

(2) $$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \vec{b}(x)\cdot\nabla u + c(x)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j \left[a^{ij}\partial_i u\right] + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i u + cu$$

در اینجا ماتریس A را متقارن فرض می‌کنیم (یعنی $a^{ij} = a^{ji}$) که در شرط بیضوی صدق می‌کند:

شرط بیضوی بودن عملگر $\mathcal{L}$: ثابت $0<\theta$ وجود دارد که برای هر $x\in\Omega$ و هر $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \theta\,|\xi|^2$$

در واقع این شرط تضمین می‌کند که مقادیر ویژه ماتریس متقارن A همگی از θ بزرگتر هستند.

به علاوه فرض می‌کنیم

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega)$$

که $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ باز کران دار است.

یک حالت خاص عملگر دیفرانسیل بیضوی $\mathcal{L}$ وقتی است که $b^i = 0, c = 0$ و $A = I$ ماتریس همانی است. در این حالت $\mathcal{L}u = -\Delta u$ عملگر لاپلاس است.

معنای معادله $\mathcal{L}u=f$ در ناحیه باز $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ (وقتی $\mathcal{L}$ به فرم دیورژانسی (2) است)

جواب کلاسیک: اگر $u\in H^2(\Omega)$، آنگاه به وضوح $\mathcal{L}u\in L^2(\Omega)$ است و تساوی

$$\mathcal{L}u(x)=f(x)$$

به صورت نقطه‌ای (تقریباً هر $x\in\Omega$) معنا دارد. برای این منظور باید $f\in L^2(\Omega)$ باشد و تساوی بالا به معنای تساوی دو تابع L^2 در Ω است. در این صورت u را جواب کلاسیک می‌نامیم.

جواب ضعیف:

تساوی $\mathcal{L}u=f$ به معنای توزیعی یعنی که رابطه زیر برای هر تابع آزمون $\varphi\in D(\Omega)$ برقرار باشد:

(3) $$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\,\partial_i u\,\partial_j\varphi+\sum_{i=1}^n b^i\,\partial_i u\,\varphi+cu\varphi\;dx=\int_\Omega f\varphi\,dx$$

اگر $u\in H^1(\Omega)$ در رابطه (3) صدق کند، آن را جواب ضعیف معادله $\mathcal{L}u=f$ در Ω می‌نامیم.

درچنین حالتی با گرفتن حد از رابطه (3) برای توابع آزمون مختلف می‌توان دید که (3) برای هر $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ نیز برقرار است.

لذا می‌توان رابطه (3) را به صورت یک فرم دوخطی $B[\cdot,\cdot]$ درنظر گرفت:

$$B: H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$B[u,v] = \int_\Omega \sum_{i,j} a^{ij} \partial_i u \, \partial_j v + \sum_i b^i \partial_i u \, v + c u v \, dx$$

و تساوی $\mathcal{L}u = f$ را به صورت زیر معنا کرد:

$$(4) \qquad \mathcal{L}u = f \ \text{ in } \Omega \iff B[u,v] = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

برای هر $u \in H^1(\Omega)$ ثابت، $v \longmapsto B[u,v]$ یک تابعک خطی پیوسته روی $H_0^1(\Omega)$ است. لذا باید سمت راست تساوی $B[u,v] = \langle f, v \rangle$ یک تابعک خطی پیوسته روی $H_0^1(\Omega)$ باشد. یعنی $f \in H^{-1}(\Omega)$.

می‌دانیم که نمایش اعضای فضای دوگان $H^{-1}(\Omega)$ به صورت زیر هستند:

$$f = f^0 - \sum_{i=1}^n \partial_i f^i \qquad\qquad f^0, f^1, \dots, f^n \in L^2(\Omega)$$

در نتیجه سؤال اینکه آیا $u\in H^1(\Omega)$ جواب ضعیف معادله دیفرانسیل $Lu=f$ است وقتی که f به صورت بالا باشد.

به همین دلیل می‌گوییم عملگر بیضوی L فضای $H^1(\Omega)$ را به $H^{-1}(\Omega)$ تصویر می‌کند:

$$L: H^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

در واقع برای هر $u\in H^1(\Omega)$ باید $Lu\in H^{-1}(\Omega)$ یک تابعک خطی پیوسته روی $H_0^1(\Omega)$ باشد که رابطه (4) آن را ارائه می‌کند:

$$\langle Lu, v\rangle = B[u,v] \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

تمرین ـ نشان دهید اگر بخواهیم جواب ضعیف در کلاس $W^{1,p}(\Omega)$ باشد، آنگاه باید $f\in W^{-1,p}(\Omega)$.

جواب خیلی ضعیف:

برای معادله $Lu=f$ می‌توان شرط $u\in H^1$ را برداشت و یک تعبیر (به اصطلاح) خیلی ضعیف از جواب ارائه داد.

برای این منظور رابطه (3) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_\Omega -u \sum_{i,j} \partial_i (a^{ij} \partial_j \varphi) - \sum_i u\, \partial_i (b^i \varphi) + c u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

یا به عبارت دیگر $\langle u, L^* \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ که

$$L^* \varphi = -\sum_{i,j} \partial_i (a^{ij} \partial_j \varphi) - \sum_i \partial_i (b^i \varphi) + c\varphi .$$

البته برای اینکه رابطه $(3)'$ معنادار باشد، هرچند از فرض نظم اولیه u کم می‌کنیم باید به نظم ضرایب a^{ij} و b^i اضافه کرد.

مثلاً اگر بخواهیم جواب خیلی ضعیف را در کلاس $u \in L^2(\Omega)$ بگیریم، برای اینکه $(3)'$ معنادار باشد باید $\partial_i (a^{ij} \partial_j \varphi) \in L^2$ باشد برای هر $\varphi \in D(\Omega)$. به طور معادل باید $a^{ij} \in H^1$. (همچنین $b^i \in H^1$). با این فرض رابطه $(3)'$ را در حالت حدی به صورت $\langle u, L^* \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ می‌توان نوشت که $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ دلخواه است. (چرا؟) این تساوی وقتی معنادار است که $f \in H^{-2}$ باشد. دقت کنید $H^{-1} \subseteq H^{-2}$ و بدین ترتیب جواب‌هایی برای $Lu = f$ پیدا می‌کنیم که لزوماً در کلاس H^1 نیستند.

درنتیجه عملگر دیفرانسیل خطی $\mathcal{L} : L^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$ خوش تعریف است.

سؤال - اگر بخواهیم جواب ضعیفِ ضعیف $\mathcal{L}u=f$ را در کلاس $\mathcal{L}'(\Omega)$ تعریف کنیم، چه شرایط همواری برای ضرایب $\mathcal{L}$ باید فرض کنیم؟

نکته - اگر جواب $\mathcal{L}u=f$ را فقط به عنوان توزیع درنظر بگیریم، یعنی $u \in D'(\Omega)$، آنگاه باید $\mathcal{L}^* : D(\Omega) \to D(\Omega)$ خوش تعریف باشد. برای این منظور باید $a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\Omega)$.

بررسی شرایط مرزی:

۱- شرایط مرزی دیریکله: $u=g \quad \text{on } \partial\Omega$

وقتی جواب ضعیف $u \in H^1(\Omega)$ را برای معادله $\mathcal{L}u=f$ درنظر می‌گیریم، رابطه بالا به معنای trace باید برقرار باشد.

دراین حالت باید $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ باشد. از آنجاکه عملگر اثر (trace) وارون راست دارد، تابع $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ وجود دارد که

$\gamma\tilde{u}=g$. ($\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ عملگر اثر است.) با توجه به خوش تعریفی $\mathcal{L} : H^1 \to H^{-1}$ داریم $\mathcal{L}\tilde{u} \in H^{-1}(\Omega)$

و رابطه $\mathcal{L}u=f$ را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$\mathcal{L}(u-\tilde{u}) = f - \mathcal{L}\tilde{u} \quad \text{in } \Omega$$

اگر قرار دهیم $\bar{u} = u-\tilde{u}$ آنگاه باید $\gamma\bar{u}=0$ روی $\partial\Omega$ یا به عبارتی $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$. لذا مسأله دیریکله

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

معادل است با مسأله

$$(5) \quad \begin{cases} \mathcal{L}\bar{u} = \bar{f} := f - \mathcal{L}\tilde{u} & \text{in } \Omega \\ \bar{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

و به عبارتی کافی است $\mathcal{L}\bar{u} = \bar{f}$ را در $H_0^1(\Omega)$ حل کنیم. درواقع عملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$ را به جای $H^1(\Omega)$ به $H_0^1(\Omega)$ تحدید می‌کنیم $\mathcal{L}: H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ و برای $\bar{f} \in H^{-1}(\Omega)$ مشخص به دنبال $v \in H_0^1(\Omega)$ می‌گردیم که $\mathcal{L}\bar{u} = \bar{f}$ باشد.

تعبیر دیگر این حرف به زبان فرم‌های دوخطی، این است که فرم دوخطی $B[\cdot,\cdot]$ متناظر $\mathcal{L}$ که در (4) تعریف شده است را به $H_0^1 \times H_0^1$

تحدید کنیم

$$B : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

و به دنبال $\bar{u} \in H^1_0(\Omega)$ بگردیم که $B[\bar{u}, v] = \langle f, v \rangle$ برای هر $v \in H^1_0(\Omega)$.

در ادامه خواهیم دید که خواص بیضوی بودن عملگر $\mathcal{L}$ کمک می‌کند که فرم دوخطی B شبیه ضرب داخلی روی H^1_0 عمل می‌کند و به کمک آن می‌توان وجود جواب (5) را اثبات کرد. قبل از آن به تبیین شرط مرزی نیومن می‌پردازیم.

۲- شرط مرزی نیومن :

وقتی عملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$ به فرم دیورژانس (2) را در نظر می‌گیریم، عبارت $A(x)\nabla u$ بردار شار حرکتی سیال (ماده) را نشان می‌دهد.

اگر $\vec{n}$ بردار عمود رو به بیرون $\partial\Omega$ باشد، $\partial_A u = A(x)\nabla u \cdot \vec{n}$ میزان شار خروجی جهت از مرز ناحیه Ω را نشان می‌دهد.

لذا در خیلی از مسائل شرط مرزی با عبارت $\partial_A u = h$ بیان می‌شود. اگر قرار باشد جواب ضعیف $\mathcal{L}u = f$ را با این شرط مرزی در کلاس $H^1(\Omega)$ تعریف کنیم، یک ابهام جدی برای تعریف این شرط مرزی وجود دارد. چرا که در این صورت $\nabla u \in \mathcal{L}^2$ است و برای تعریف $\partial_A u$ باید از تابع $A(x)\nabla u \cdot \vec{n}$ که در کلاس $\mathcal{L}^2$ است، اثر (trace) بگیریم. می‌دانیم که عملگر اثر

روی $H^1(\Omega)$ تعریف می‌شود و نه $L^2(\Omega)$! البته اگر جواب کلاسیک را در کلاس $H^2(\Omega)$ در نظر بگیریم، به وضوح تساوی $\partial_A u = h$ به معنای اثر ابهامی نخواهد داشت. ولی فرض H^2 برای جواب زیاد به نظر می‌رسد چرا که در این صورت به ناچار باید $f \in L^2(\Omega)$ باشد و امکان حل معادله وقتی $f \in H^{-1}(\Omega)$ است را نخواهیم داشت. در ادامه خواهیم دید چگونه بر این مشکل غلبه کنیم.

$$(6)\quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ \partial_A u = h & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

مسأله نویمن

اگر $u \in H^2(\Omega)$ باشد، در تساوی $Lu = f$ (که در L^2 معنا دارد) تابع آزمون $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ را ضرب کنید و انتگرال جزء به جزء بگیرید. (دقت کنید لزوماً φ روی $\partial\Omega$ صفر نیست) به جای رابطه (3) تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u\,\partial_j\varphi + \sum_i b^i\partial_i u\,\varphi + cu\varphi\,dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u\, n_j}_{\partial_A u}\varphi\,d\sigma = \int_\Omega f\varphi\,dx$$

حال اگر بخواهیم شرط مرزی $\partial_A u = h$ را داشته باشیم باید رابطه زیر برقرار باشد

$$B[u,\varphi] = \int_{\partial\Omega} h\varphi\, d\sigma + \langle f,\varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

که با جایگذاری از توابع هموار φ به یک تابع دلخواه $v \in H^1(\Omega)$ می رسیم که در این صورت برای اینکه عبارت $\int_{\partial\Omega} h v\, d\sigma$ معنی داشته باشد باید $h \in H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))'$ باشد. (دقت کنید وقتی از توابع هموار $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ به تابع $v \in H^1(\Omega)$ می رویم عبارت $v|_{\partial\Omega}$ به معنی اثر (trace) معنا دارد و عضو $H^{1/2}(\partial\Omega)$ است.)

به طور خلاصه معنی جواب ضعیف مسأله نیومن (6) وقتی $f \in (H^1(\Omega))'$ و $h \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ است، تابع $u \in H^1(\Omega)$ که برای هر $v \in H^1(\Omega)$ داشته باشیم:

$$B[u,v] = \langle f,v\rangle_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} + \langle h,v\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

در سمت راست تساوی بالا زوج $\langle f,v\rangle$ به معنی عمل تابعک $f \in (H^1(\Omega))'$ روی $v \in H^1(\Omega)$ است و زوج $\langle h,v\rangle$ به معنای

دوگانی $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ و $H^{1/2}(\partial\Omega)$ روی مرز است. در واقع سمت راست $v \mapsto \langle f, v\rangle_\Omega + \langle h, v\rangle_{\partial\Omega}$

یکِ عضو فضای دوگان $(H^1(\Omega))'$ را نشان می‌دهد. به عبارتی دیگر برای حل مسأله نوین (۶) باید فرم دوخطی

$$B : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

با دامنه‌ای متفاوت از مسأله دیریکله (در آنجا دامنه آن $H^1_0 \times H^1_0$ بود) در نظر گرفت و معادله

$$B[u,v] = \langle F, v\rangle \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

را حل کرد که $F \in (H^1(\Omega))'$.

نکته- رویکردِ بالا نشان می‌دهد چگونه می‌توان از یک تابع $u \in H^1(\Omega)$، اثر مشتق آن، $\partial_A u$، روی مرز را تعریف کرد. در واقع $\partial_A u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ به عنوان یک عضو فضای دوگان روی اعضای $H^{1/2}(\partial\Omega)$ به صورت زیر عمل می‌کند.

$$\langle \partial_A u, \gamma v\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} := B[u,v] - \langle f, v\rangle_{(H^1)'\times H^1}$$

تمرین- برای اینکه در رابطه بالا $\partial_A u$ خوش‌تعریف باشد، نشان دهید اگر $\gamma v_1 = \gamma v_2$ روی $\partial\Omega$ آنگاه $B[u, v_1 - v_2] = \langle f, v_1 - v_2\rangle$.

همان طور که ملاحظه می‌کنید، این تعریفِ مستقل از $Lu=f$ نیست. دقت کنید f به عنوان فضای دوگان $(H^1)'$ باید عمل آن روی $H^1(\Omega)$ دیده شود. وقتی $v \in H^1_0(\Omega)$ است، تساوی

$$\langle f, v \rangle = B[u,v]$$

را داریم. یعنی وقتی از روی u می‌خواهیم $Lu=f$ را حساب کنیم، تأثیرِ $f: H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ به طور یکتا از روی u مشخص می‌شود. بنابر قضیهٔ هان-باناخ می‌توانیم f را به کل $H^1(\Omega)$ توسعه دهیم. اما این توسعه یکتا نیست. هر توسعه‌ای از f منجر به یک تعریفِ متفاوت از $\partial_A u$ خواهد شد. به همین دلیل می‌نویسیم

$$(H^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

تمرین - بررسی کنید اگر $u \in L^2(\Omega)$ جواب خیلی ضعیفِ مسأله دیریکله

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

باشد، شرط مرزی $u=g$ را چگونه باید معنا کنیم؟

PDE

۹۹/۲/۲۲ جلسه نوزدهم

وجود جواب ضعیف

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j (a^{ij} \partial_i u) + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i u + cu$$

$$a^{ij} = a^{ji}$$

L یک عملگر بیضوی است. می‌خواهیم مسأله دیریکله را حل کنیم.

$$(1) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

در جلسه قبل دیدیم که متناظر این مسأله فرم دوخطی

$$B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

تعریف می‌شود و $u \in H_0^1(\Omega)$ جواب ضعیف (1) است، هرگاه

$$(2) \qquad B[u,v] = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ایدهٔ اثبات، این است که نشان می‌دهیم فرم دوخطی B شبه ضرب داخلی روی فضای هیلبرت H_0^1 عمل می‌کند و لذا هر تابعک خطی پیوسته روی H_0^1 مثل f، از ضرب داخلی می‌آید. متناظر f باید $u \in H_0^1$ وجود داشته باشد که (2) برقرار باشد.

قضیهٔ زیر در این راستا است:

قضیهٔ (Lax-Milgram) فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $B: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرم دوخطی است.

به علاوه ثابت‌های $\alpha, \beta > 0$ وجود داشته باشند به طوری که

(پیوستگی) (i) $\quad |B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall\, u, v \in H$

(Coercivity) (ii) $\quad \beta \|u\|^2 \leq B[u,u] \qquad \forall\, u \in H$ (ترالی)

آنگاه برای هر $f \in H'$ عنصر یکتای $u \in H$ وجود دارد که

$$B[u,v] = \langle f, v \rangle \qquad \forall\, v \in H$$

برای اثبات قضیه فوق به کتاب مراجعه کنید. قابل توجه است که اگر B یک فرم متقارن باشد، یعنی

$$B[u,v] = B[v,u]$$

آنگاه یک ضرب داخلی جدید روی H تعریف می‌کند که نرم متناظر آن، $\sqrt{B[u,u]}$، هم ارز نرم H است.

$$\beta \|u\|^2 \le B[u,u] \le \alpha \|u\|^2$$

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که فرم دوخطی متناظر عملگر بیضوی L در شرایط قضیه Lax-Milgram صدق می‌کند.

$$B[u,v] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \, \partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u \, v + c u v$$

جهت یادآوری تکرار می‌کنیم ضرایب عملگر توابع کران‌دار هستند،

(3) $$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega)$$

و ثابت $\theta > 0$ وجود دارد که

(4) $$\xi^t A(x) \xi = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \ge \theta |\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

قضیه - تحت شرایط (3) و (4) ثابت‌های $\alpha, \beta > 0$ و $\gamma \geq 0$ وجود دارند به طوری که

$$(i) \qquad |B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$(ii) \qquad \beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

اثبات -

$$|B[u,v]| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla v| \, dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u| \cdot |v| \, dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u| \cdot |v| \, dx$$

کوشی - شوارتز $\leftarrow$

$$\leq \left[\sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty}\right] \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} + \left[\sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty}\right] \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty} \cdot \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$\leq \underbrace{\left[\sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}\right]}_{\alpha :=} \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1}$$

برای اثبات (iii) به کمک (4) خواهیم داشت:

$$\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \, \partial_j u \, dx = B[u,u] - \int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u \, u + c u^2 \, dx$$

$$\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u| \cdot |u| \, dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega u^2 \, dx$$

از طرفی بنابر نامساوی $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ برای هر $\varepsilon > 0$ داریم:

$$\int_\Omega |\nabla u||u| \, dx \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega u^2 \, dx$$

ε را به اندازه کافی کوچک انتخاب کنید که $\varepsilon \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} < \theta/2$. در نتیجه

(5) $$\frac{\theta}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq B[u,u] + \left[\|c\|_{L^\infty} + \frac{1}{4\varepsilon} \right] \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2}\|u\|^2_{H^1_0} \le B[u,u] + \left[\|c\|_{L^\infty} + \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{\theta}{2}\right]\|u\|^2_{L^2}.$$

نکته- وقتی $\gamma > 0$ باشد، شرایط قضیه Lax-Milgram به طور کامل برآورده نمی‌شود. اما در حالتی که $b^i = 0$ و $c \ge 0$، از اثبات قضیه فوق نتیجه می‌شود که به جای (5) خواهیم داشت:

$$\frac{\theta}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \le B[u,u]$$

اگر از نامساوی پوانکاره استفاده کنیم، برای هر $u \in H^1_0(\Omega)$ خواهیم داشت:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

و در نتیجه

$$\frac{\theta}{2(C^2+1)}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le B[u,u]$$

و قضیه Lax-Milgram وجود جواب (1) را برای عملگر بیضوی $Lu = -\sum \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + cu$ وقتی $c \ge 0$ است، اثبات می‌کند.

قضیه ۱: ثابت $\gamma \geq 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $\mu \geq \gamma$ و هر $f \in H^{-1}$ مسأله زیر دارای جواب یکتا $u \in H_0^1(\Omega)$ است.

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

به علاوه

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_{H^{-1}}$$

که ثابت $\beta > 0$، مقدار مشخص شده در قضیه قبل است.

اثبات ـ γ را ثابت مشخص شده در قضیه قبل می‌گیریم. آنگاه فرم دوخطی متناظر عملگر $L_\mu := L + \mu I$ عبارتست از

$$B_\mu[u,v] = B[u,v] + \mu(u,v)_{L^2}$$

و در شرایط قضیه Lax-Milgram صدق می‌کند. درنتیجه $u \in H_0^1(\Omega)$ (منحصربفرد) وجود دارد که

$$B_\mu[u,v] = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{6}$$

یعنی u جواب ضعیف مسأله بالا است. در رابطه (6) قرار دهید $v = u$، خواهیم داشت:

$$\beta \|u\|^2_{H^1_0} \leq B[u,u] = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_{H^{-1}} \cdot \|u\|_{H^1_0}$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{H^1_0} \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_{H^{-1}}$$

نکته- قضیه فوق نشان می دهد که عملگر

$$L_\mu = L + \mu I : H^1_0(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

وارون پذیر است . (وارون پیوسته دارد) [وجود و یکتایی جواب معادله نشان می دهد L_μ^{-1} خوش تعریف است و نامساوی

$\|u\|_{H^1_0} \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_{H^{-1}}$ پیوستگی L_μ^{-1} را اثبات می کند.]

قضیه (Fredholm alternative) اگر H فضای هیلبرت و $K : H \longrightarrow H$ یک عملگر فشرده باشد، آنگاه

(1) $Nul(I-K)$ بعد متناهی دارد.

(2) $Im(I-K)$ زیرفضای بسته است.

(3) $Im(I-K) = Nul(I-K^*)^\perp$

(4) $\dim Nul(I-K) = \dim Nul(I-K^*)$

نکته- در صورت قضیه قبل، منظور از K^* عملگر الحاقی متناظر K است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$(K^* u, v) = (u, Kv) \qquad \forall u, v \in H$$

و منظور از $(\cdot,\cdot)$ ضرب داخلی H است. همچنین وقتی A یک زیرفضای H باشد، منظور از $A^\perp$ زیرفضای متعامد A است.

$$A^\perp = \{ u \in H : (u, v) = 0 \quad \forall v \in A \}$$

قضیه Fredholm alternative برای حل معادله $(I-K)u = f$ به کار می‌رود. بدیهی است که این معادله برای هر $f \in Im(I-K)$ جواب دارد و مجموعه جوابهای این معادله یک فضای آفین (زیرفضای انتقال یافته) در H است با بعد $\dim Nul(I-K)$. حکم (1) در این قضیه می‌گوید بعد این فضا متناهی است و بنابر (3) برای هر $f \in Nul(I-K^*)^\perp$ این معادله جواب دارد. اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای جوابهای معادله همگن $(I-K^*)v = 0$ باشد، شرط وجود جواب عبارتست از:

$$(f, v_i) = 0 \qquad 1 \le i \le n$$

اکنون می‌خواهیم قضیه Fredholm alternative را برای عملگر دیفرانسیل بیضوی L و حل معادله $Lu=f$ استفاده کنیم.

ابتدا عملگر الحاقی L^* را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید $L: H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ تعریف می‌شود. آنگاه عملگر الحاقی به صورت

$$L^*: (H^{-1})' \longrightarrow (H_0^1)' = H^{-1}$$

تعریف می‌شود که با یکی کردن $(H^{-1})'$ و H_0^1 باید در رابطه زیر صدق کند:

$$\langle L^* u, v \rangle = \langle Lv, u \rangle \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

که منظور از $\langle \cdot , \cdot \rangle$ دوتایی H^{-1} و H_0^1 است. درنتیجه

$$\langle L^* u, v \rangle = \langle Lv, u \rangle = B[v,u] = \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i v \, \partial_j u + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i v \, u + c v u$$

$$\Rightarrow L^* u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a^{ij} \partial_j u) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i (b^i u) + c u$$

و فرم دوخطی متناظر L^* در رابطه

$$B^*[u,v] = B[v,u]$$

صدق می‌کند.

قضیه ۲ (وجود جواب ضعیف):

(۱) دقیقاً یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

(α) برای هر $f \in H^{-1}(\Omega)$ معادله (1) دارای جواب یکتا در $H_0^1(\Omega)$ است.

(β) معادله همگن

$$(7)\quad \begin{cases} Lu=0 & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

دارای جواب غیربدیهی $u \neq 0$ است.

(2) در حالت (β) بعد زیرفضای $N \subset H_0^1(\Omega)$ از جوابهای ضعیف (7) متناهی است و برابر بعد زیرفضای $N^* \subset H_0^1(\Omega)$ از جوابهای ضعیف معادله همگن الحاقی زیر است.

$$\begin{cases} L^*u=0 & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(3) مسأله (1) جواب ضعیف دارد اگر و تنها اگر

$$\langle f, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in N^*$$

اثبات. می‌دانیم $L_\gamma := L + \gamma I$ برای مقدار ثابت $\gamma \geq 0$ وارون پیوسته دارد. در نتیجه جواب معادله $Lu = f$ متناظر این است که

$$Lu + \gamma u = f + \gamma u \Rightarrow u = L_\gamma^{-1}(f + \gamma u)$$

$$\Rightarrow \left(I - \gamma L_\gamma^{-1}\right) u = L_\gamma^{-1} f$$

در قضیه Fredholm alternative قرار دهید $K = \gamma L_\gamma^{-1} : H^{-1} \longrightarrow H_0^1$. نشاندن پیوسته و فشرده

$$H_0^1 \subseteq L^2 \subseteq H^{-1}$$

نشان می‌دهد که $K : H_0^1 \longrightarrow H_0^1$ فشرده است.

ادامه اثبات به عنوان تمرین خواهد بود.

نکته- اگر γ مقدار مشخص شده در قضیه ۱ باشد و $\mu \geq \gamma$، آنگاه عملگر $H^{-1} \longrightarrow H_0^1 : L_\mu = L + \mu I$ وارون پذیر است و حالت (α) در قضیه ۲ اتفاق می‌افتد. برای مقادیر $\mu < \gamma$ یا حالت (α) اتفاق می‌افتد و L_μ وارون پذیر است یا اینکه مسأله همگن $L_\mu u = 0$ تعداد متناهی جواب مستقل خطی دارد. در این صورت $-\mu$ را مقدار ویژه عملگر L می‌نامیم و جوابهای $L_\mu u = 0$ توابع ویژه متناظر آن نامیده می‌شود.

تعریف- اگر X یک فضای برداری نرم‌دار روی میدان $\mathbb{C}$ باشد و $A : X \longrightarrow X$ عملگر خطی پیوسته، آنگاه مجموعه حلال (resolvent) متناظر A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{پیوسته است } (A - \lambda I)^{-1} \}$$

همچنین طیف (Spectrum) عملگر A عبارتست از

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

بنابر قضیه نگاشت باز، $\lambda \in \rho(A)$ اگر و تنها اگر $(A - \lambda I)$ یک به یک و پوشا باشد. یا به عبارتی معادله

$$Au - \lambda u = f$$

به ازای هر $f \in X$ جواب یکتا داشته باشد.

درنتیجه $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_{ess}(A)$ که σ_p شامل همه مقادیرِ λ است که $A-\lambda I$ یک به یک نیست. یعنی

$$\exists\, 0\neq u\in X \quad \text{s.th.} \quad Au=\lambda u$$

$\sigma_p(A)$ را مقادیرویژه‌ی A می‌نامیم. درمقابل σ_{ess} که به طیف اساسی (یاپیوسته) معروف است شامل مقادیرِ λ است که $A-\lambda I$ یک به یک است ولی پوشا نیست.

می‌توان دیدکه اگر X فضای باناخ باشد، $\sigma(A)$ ناتهی و فشرده است. به علاوه اگر X فضای هیلبرت و A یک عملگرخودالحاق باشد، یعنی $A=A^*$، آنگاه طیف آن فقط شامل اعداد حقیقی است و $\sigma(A)\subseteq[-\|A\|,\|A\|]$.

اگر $K:X\longrightarrow X$ عملگرفشرده باشد، آنگاه درخصوص طیف آن مطالب زیردرست است:

i) $0\in\sigma(K)$ اگر $\dim X=\infty$.

ii) $\sigma_{ess}(K)\subseteq\{0\}$ یا به عبارت دیگر $\sigma(K)-\{0\}=\sigma_p(K)-\{0\}$.

iii) $\sigma(K)-\{0\}$ یا یک مجموعه متناهی است یا یک دنباله همگرا به صفراست.

حال با این توضیحات اگر قرار دهیم

$$A = (L+\gamma I)^{-1} : H_0^1 \longrightarrow H_0^1$$

که در جلسه قبل دیدیم یک عملگر فشرده است. (γ ثابت تعریف شده در قضیه ۱) دقت کنید در اینجا A یک به یک است ولی پوشا نیست

و در نتیجه $0 \in \sigma_{ess}(A)$. ($(L+\gamma I)^{-1} : H^{-1} \longrightarrow H_0^1$ یک به یک و پوشا است و وقتی دامنه آن به H_0^1 محدود می‌شود، دیگر پوشا نخواهد بود)

بنابر خواص طیف عملگرهای فشرده نتیجه طیف، مقادیر ویژه A هستند. با یک محاسبه ساده می‌توان دید که $0 \neq \lambda \in \sigma_p(A)$ اگر و تنها اگر

$\gamma - \frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه عملگر L باشد. در این حالت $L + (\gamma - 1/\lambda) I : H_0^1 \longrightarrow H^{-1}$ یک به یک نیست و حالت (β)

در قضیه ۲ رخ می‌دهد. در نتیجه به جز یک مجموعه حداکثر شمارا (که اگر نامتناهی باشد به $+\infty$ واگرا است) برای مقادیر دیگر μ،

$L-\mu I$ وارون پذیر است و معادله $Lu - \mu u = f$ جواب یکتا دارد. برای مقادیر دیگر μ که $L-\mu I$ وارون پذیر نیست،

μ مقدار ویژه است و تابع $u \neq 0$ وجود دارد که

$$\begin{cases} Lu = \mu u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

اگر L خودالحاق باشد، یعنی $L = L^*$ یا به عبارتی $b^i = 0$، آنگاه طیف عملگر $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} -\partial_i(a^{ij}\partial_j u) + cu$

یک دنباله شمارا از اعداد حقیقی $\{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots\}$ است که $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty$.

PDE

جلسه بیستم ۹۹/۲/۲۷

نظم جوابها:

اگر $u \in H_0^1(\Omega)$ جواب ضعیفِ معادله بیضوی زیر باشد،

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega$$

به دنبال آن هستیم که ببینیم تحت چه شرایطی u جواب کلاسیکِ است. اصولاً دو رویکرد در بررسی نظم جواب وجود دارد.

(۱) L^p-theory: اگر $f \in L^p$ برای $1<p<\infty$، آنگاه $u \in W^{2,p}$ است. (Calderon-Zygmund)

در اینصورت u جواب کلاسیکِ است و تساوی $Lu=f$ به عنوان تساوی دو تابع در فضای L^p برقرار است.

اگر $f \in W^{m,p}$، آنگاه $u \in W^{m+2,p}$. البته برای هرکدام از این نتایج باید روی دامنه Ω و ضرایب عملگر L

فرضهایی از نوع نظم (regularity) گذاشت.

(۲) Shauder estimates: اگر $f \in C^{0,\alpha}$ آنگاه $u \in C^{2,\alpha}$ وقتی $0<\alpha<1$ (برای این نتیجه باید ضرایب L در کلاس $C^{0,\alpha}$

باشند.) یا نظم بیشتر جواب درحالتی که $f \in C^{k,\alpha}$ تحت شرایط مناسب روی دامنه و ضرایب L، خواهیم داشت $u \in C^{k+2,\alpha}$.

قبل از اثبات نتایج بالا باید اشاره کنیم که وقتی $\alpha \in \{0,1\}$ یا $p \in \{1,\infty\}$ نتایج بالا درست نمی‌باشند.

مثال نقض: قرار دهید $u(x,y) = xy\,|\log(x^2+y^2)|^a$. تحقیق کنید وقتی $0<a\le 1$، داریم $u \notin C^{1,1}(B_1)$.

(در واقع $\partial^2_{xy}u$ کران‌دار نیست.) اما برای $x^2+y^2<1$ داریم:

$$\partial_x^2 u = \left[\frac{-2axy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]|\log(x^2+y^2)|^{a-1} + \frac{4a(a-1)x^3y}{(x^2+y^2)^2}|\log(x^2+y^2)|^{a-2}$$

و $\partial_y^2 u$ به طور مشابه با جابه‌جایی x و y به دست می‌آید. در نتیجه

$$\Delta u = \frac{-8axy}{x^2+y^2}\,|\log(x^2+y^2)|^{a-1} + \frac{4a(a-1)xy}{x^2+y^2}\,|\log(x^2+y^2)|^{a-2}$$

اگر $a=1$، آنگاه $\Delta u = \frac{-8xy}{x^2+y^2} \in L^\infty$ که مثال نقض برای $p=\infty$ در نظریهٔ L^p است.

اگر $0<a<1$، آنگاه $\Delta u \in C^0$ و یک مثال نقض برای $\alpha=0$ در تخمین‌های شاودر است.

برای حالت $p=1$ در نظریه L^p مثال نقض زیر ارائه می‌شود:

$$u(x,y) = \log\log\frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{in} \quad B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

با استفاده از مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = -\frac{\log r + 1}{r^2(\log r)^2} + \frac{1}{r^2 \log r} = -\frac{1}{r^2(\log r)^2} \in L^1(B_{1/2})$$

$$\int_{B_{1/2}} |\Delta u|\, dx = \int_0^{1/2} \frac{2\pi}{r(\log r)^2}\, dr = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{2\pi}{t^2}\, dt = \frac{2\pi}{\ln 2}$$

از طرفی با یک محاسبه ساده می‌توان دید که $\partial_x^2 u$ انتگرال‌پذیر نیست، در نتیجه $u \notin W^{2,1}$.

نظریه L^p :

در اینجا برای حالت $p=2$ قضایا را اثبات می‌کنیم. قرار دهید

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x+he_k) - u(x)}{h}.$$

لم زیر در اثبات نظم جواب کاربرد دارد.

لم - (۱) اگر $\partial_k u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ، آنگاه

$$\|D_k^h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\partial_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

برای هر $h \in \mathbb{R}$ و داریم

$$\|D_k^h u - \partial_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad h \to 0.$$

(۲) اگر مقدار ثابت M وجود داشته باشد که $\|D_k^h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq M$ برای هر $h \in \mathbb{R}$ به اندازه کافی کوچک، آنگاه

$$\partial_k u \in L^2 \text{ و } \|\partial_k u\|_{L^2} \leq M.$$

اثبات - (۱)

$$D_k^h u(x) = \int_0^1 \partial_k u(x+the_k)\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |D_k^h u(x)|^2\, dx \le \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_k u(x+the_k)|^2\, dx\, dt = \|\partial_k u\|_{L^2}^2$$

اگر $u_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ که $\|\partial_k u - \partial_k u_\epsilon\|_{L^2} < \epsilon$ ، آنگاه

$$\|D_k^h u - \partial_k u\|_{L^2} \le \|D_k^h(u-u_\epsilon)\|_{L^2} + \|D_k^h u_\epsilon - \partial_k u_\epsilon\|_{L^2} + \|\partial_k u_\epsilon - \partial_k u\|_{L^2}$$

$$\le \|\partial_k(u-u_\epsilon)\|_{L^2} + \|D_k^h u_\epsilon - \partial_k u_\epsilon\|_{L^2} + \|\partial_k(u_\epsilon - u)\|_{L^2}$$

← بنابر قسمت اول اثبات

$$< 2\epsilon + \|D_k^h u_\epsilon - \partial_k u_\epsilon\|_{L^2}$$

حال اگر $h \to 0$ ، خواهیم داشت:

$$\limsup_{h\to 0} \|D_k^h u - \partial_k u\|_{L^2} \le 2\epsilon$$

که با توجه به دلخواه بودن ϵ ، اثبات (۱) کامل می‌شود.

(2) $\{D_k^h u\}_{h>0}$ در $L^2(\mathbb{R}^n)$ کران‌دار است و در نتیجه یک زیردنباله همگرای ضعیف دارد.

$$D_k^{h_i} u \rightharpoonup v \quad \text{in } L^2 \quad \text{as } h_i \to 0$$

نشان می‌دهیم v همان مشتق $\partial_k u$ است. برای هر $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ داریم:

$$\langle v, \varphi \rangle = \lim_{h_i \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} D_k^{h_i} u(x)\, \varphi(x)\, dx = \lim_{h_i \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \frac{\varphi(x - he_k) - \varphi(x)}{h}\, dx$$

$$= \lim_{h_i \to 0} \langle u, -D_k^{-h_i} \varphi \rangle = \langle u, -\partial_k \varphi \rangle = \langle \partial_k u, \varphi \rangle$$

قضیه (نظم درونی) : اگر L عملگر بیضوی باشد و $u\in H^1(\Omega_2)$ جواب ضعیف معادله

$$Lu=f \quad \text{in } \Omega_2$$

باشد، به طوری که $f\in H^m(\Omega_2)$ که $m\geq 0$ یک عدد صحیح است. اگر Ω_1 ناحیه‌ای باز باشد که $\Omega_2 \subset \overline{\Omega_1}$ و

ضرایب L متعلق به کلاس $C^{m,1}(\Omega_2)$ باشند، آنگاه $u\in H^{m+2}(\Omega_1)$ و

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega_1)} \leq C\left(\|u\|_{H^1(\Omega_2)} + \|f\|_{H^m(\Omega_2)}\right)$$

که ثابت $C>0$ تنها به L، Ω_1 و Ω_2 وابسته است.

اثبات ـ ابتدا حالت $m=0$ را ثابت می‌کنیم. تابع برشی $\chi\in C_0^\infty(\Omega_2)$ را در نظر بگیرید که $\chi|_{\Omega_1}\equiv 1$ و $\chi|_{\Omega_2\setminus\Omega'}\equiv 0$ برای یک ناحیه دلخواه

Ω' که $\Omega_1 \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega_2$. به علاوه $0\leq\chi\leq 1$. از آنجا که u جواب معادله است نتیجه می‌شود

$$B[u,v] = \langle f, v\rangle \qquad \forall\, v\in H_0^1(\Omega_2)$$

قصد داریم در این رابطه قرار دهیم

$$v = D_k^{-h}\left(D_k^h(\chi u)\right)$$

برای مقادیر کوچک $h>0$ و جهت استفاده از لم قبل نشان دهیم $\|D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega_1)}$ کران دار است. دقت کنید با توجه به انتخاب x،
$v\in H_0^1(\Omega_2)$ است. اگر $0<h<\frac{1}{2}\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\omega, \partial\Omega_2)$ آنگاه داریم:

$$B[u, D_k^{-h} w] = \int_{\Omega_2} \sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u\, \partial_j (D_k^{-h} w) + \sum_i b^i \partial_i u\, D_k^{-h} w + cu\, D_k^{-h} w \, dx$$

$$= \int_{\Omega_2} - \sum_{i,j} D_k^h (a^{ij}\partial_i u)\, \partial_j w - \sum_i D_k^h (b^i \partial_i u)\, w - D_k^h (cu)\, w \, dx$$

در تساوی بالا از رابطه $(u, D_k^{-h} v) = -(D_k^h u, v)$ استفاده کردیم. همچنین اگر از رابطه

$$D_k^h (au) = D_k^h a\, u(x+he_k) + a\, D_k^h u$$

استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$B[D_k^h u, \omega] + B[u, D_k^{-h} w] = \int_{\Omega_2} -\sum_{i,j} D_k^h a^{ij}\cdot \partial_i u(x+he_k)\, \partial_j w(x)$$
$$-\sum_i D_k^h b^i \cdot \partial_i u(x+he_k)\, \omega(x) - D_k^h c\cdot u(x+he_k)\omega\, dx$$

دقت کنید در انتگرال بالا هر چند ممکن است در حالت کلی $x+he_k \notin \Omega_2$ و $u(x+he_k)$ تعریف نشده باشد، اما انتخاب

کوچک و اینکه $h>0$ $\operatorname{Supp}\omega$ از $\partial\Omega_2$ فاصله دارد، نتیجه می‌دهد انتگرال بالا معنادارد. لذا باتوجه به فرض لیپشیتز

بودن ضرایب a^{ij}، b^i و c می‌دانیم که $|D_k^h a^{ij}|$، $|D_k^h b^i|$ و $|D_k^h c|$ کران دار هستند. در نتیجه

$$(1) \qquad B[D_k^h u, \omega] + B[u, D_k^{-h}\omega] \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_2)} \cdot \|\omega\|_{H^1(\Omega_2)}$$

اکنون در رابطه بالا به جای u قرار دهیم χu و به جای ω قرار دهیم $D_k^h(\chi u)$.

$$B[\chi u, v] = \int_{\Omega_2} \sum a^{ij}\partial_i(\chi u)\partial_j v + \sum b^i \partial_i(\chi u) v + c(\chi u) v \, dx$$

$$= \int_{\Omega_2} \sum a^{ij}\partial_i u . \partial_j(\chi v) + \sum b^i \partial_i u (\chi v) + cu(\chi v)\, dx$$

$$+ \int_{\Omega_2} \sum_{i,j} a^{ij}[\partial_i \chi \, u \, \partial_j v - \partial_j \chi . \partial_i u . v] + \sum_i b^i \partial_i \chi . u v \, dx$$

$$= B[u,\chi v] + \int_{\Omega_2} \Big[-\sum_{i,j} \big(\partial_j (a^{ij} \partial_i \chi \cdot u) + \partial_j \chi \cdot \partial_i u\big) + \sum_i b^i \partial_i \chi \cdot u \Big] v \, dx$$

$$= \int_{\Omega_2} \Big[\underbrace{f\chi - \sum_{i,j} \big(\partial_j (a^{ij} \partial_i \chi \cdot u) + \partial_j \chi \cdot \partial_i u\big) + \sum_i b^i \partial_i \chi \cdot u}_{\tilde{f} \in L^2(\Omega_2)} \Big] v \, dx = \langle \tilde{f}, v \rangle$$

به‌علاوه داریم :

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C\big[\|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{H^1(\Omega_2)}\big]$$

درنتیجه از رابطه (۱) نتیجه می‌شود :

$$B[D_k^h(\chi u), D_k^h(\chi u)] + \langle \tilde{f}, D_k^{-h}(D_k^h \chi u) \rangle \leq C \|\chi u\|_{H^1(\Omega_2)} \cdot \|D_k^h(\chi u)\|_{H^1(\Omega_2)}$$

و با توجه به خواص بیضوی عملگر L یا فرم دوخطی B خواهیم داشت :

$$\beta \|D_k^h(\chi u)\|^2_{H^1(\Omega_2)} \leq C \|\chi u\|_{H^1(\Omega_2)} \cdot \|D_k^h(\chi u)\|_{H^1(\Omega_2)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega_2)} \cdot \|D_k^{-h}(D_k^h \chi u)\|_{L^2(\Omega_2)} + \gamma \|D_k^h(\chi u)\|^2_{L^2(\Omega_2)}$$

$$\le C\left(\|u\|_{H^1(\Omega_2)} + \|f\|_{L^2(\Omega_2)}\right)\cdot\|D_k^h(\chi u)\|_{H^1(\Omega_2)} + C\|u\|^2_{H^1(\Omega_2)}$$

$$\le \epsilon\|D_k^h(\chi u)\|^2_{H^1(\Omega_2)} + \frac{C^2}{4\epsilon^2}\left(\|u\|_{H^1(\Omega_2)} + \|f\|_{L^2(\Omega_2)}\right)^2 + C\|u\|^2_{H^1(\Omega_2)}$$

$$\Rightarrow \quad \|D_k^h(\chi u)\|^2_{H^1(\Omega_2)} \le C\left[\|u\|^2_{H^1(\Omega_2)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_2)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \chi u \in H^2(\Omega_2) \quad \Rightarrow \quad u \in H^2(\Omega_1).$$

حال برای تکمیل اثبات قضیه و نظم های بالاتر، با استقراء و با فرض اینکه قضیه برای $0 \le m$ اثبات شده باشد، اگر داشته باشیم

$$Lu = f \quad \text{in} \quad \Omega_2$$

که $f \in H^{m+1}(\Omega_2)$ و با توجه به فرض ها که روی ضرایب L از معادله بالا $m+1$ بار مشتق بگیرید. توجه کنید بنابه فرض استقراء

$u\in H^{m+2}(\tilde\Omega_2)$ که $\Omega_1 \subset\subset \tilde\Omega_2 \subset\subset \Omega_2$. درنتیجه معادله $Lu=f$ در $\tilde\Omega_2$ نقطه‌وار معنادار و مساوی

معادله در $H^m(\tilde\Omega_2)$ برقرار است. لذا اگر در $\tilde\Omega_2$ از معادله $m+1$ بار مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$L(\partial_k^{m+1}u) = \partial_k^{m+1} f + \text{عبارات دیگر شامل مشتق ضرایب } L \text{ و مشتقات حداکثر تا مرتبه } m \text{ از تابع } u \in L^2(\tilde\Omega_2)$$

در این حالت $\partial_k^{m+1}u\in H^1(\tilde\Omega_2)$ جواب ضعیف معادله بالا است و بنابر قسمت اول اثبات $\partial_k^{m+1}u\in H^1(\Omega_1)$ و

$$\|\partial_k^{m+1}u\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C\left(\|\partial_k^{m+1}f\|_{L^2(\tilde\Omega_2)} + \|u\|_{H^m(\tilde\Omega_2)}\right)$$

$$\leq C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega_2)} + \|u\|_{H^1(\Omega_2)}\right)$$

فرض استقراء و تخمین نرم $\|u\|_{H^m}$

نکته- در قضیه قبل حالت $m=0$، می‌توان شرایط با شرایط عملگر L را محدودتر کرد. در کتاب $a^{ij}\in C^{0,1}$ و $b^i, c\in L^\infty$ قضیه را اثبات کرده است. هرچند نتیجه با فرض تنها پیوستگی a^{ij} درست است. این مطلب به عنوان قضیه Calderon-Zygmund معروف است.

نتیجه- اگر ضرایب عملگر بیضوی L در $C^\infty(\Omega)$ باشند و $f\in C^\infty(\Omega)$. به علاوه $u\in H^1(\Omega)$ جواب ضعیف

$$Lu=f \quad \text{in } \Omega$$

باشد، آنگاه

$$u\in C^\infty(\Omega).$$