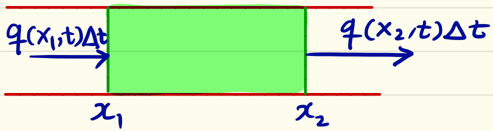
PDE

۹۸/۱۱/۱۹ جلسه اول

معادلات اصل بقا

$\rho(x,t)$ چگالی یک ماده که در یک لوله از سمت چپ به راست با شار $q(x,t)$ در حال حرکت است.



دو نقطه x_1 و x_2 را در نظر بگیرید. مقدار ماده‌ای که در زمان t در این بازه قرار دارد برابر است با:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\, dx$$

در نتیجه در فاصله زمانی t تا $t+\Delta t$ مقدار تغییرات جرم برابر است با:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t+\Delta t) - \rho(x,t)\, dx$$

از طرفی در این بازه زمانی به میزان $q(x_1,t)\Delta t$ جریان ورودی به بازه $[x_1,x_2]$ است و

$q(x_2,t)\Delta t$ جریان خروجی. اصل بقاء جرم نتیجه می‌دهد:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t+\Delta t)-\rho(x,t)\,dx = \left[q(x_1,t)-q(x_2,t)\right]\Delta t \tag{1}$$

رابطه بالا برای هر x_1، x_2، t و Δt درست است.

اگر تابع ρ نسبت به t مشتق‌پذیر باشد و ρ_t یک تابع انتگرال‌پذیر باشد آنگاه به شیوه دیگری از اصل بقاء می‌رسیم:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx\right] = q(x_1,t)-q(x_2,t) \tag{2}$$

با فرض مشتق‌پذیری q نسبت به x این رابطه به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\rho_t + q_x = 0$$

در اکثر مسائل فیزیکی شار q تابعی از چگالی است و می‌توان آن را به صورت

$$q(x,t) = F(\rho(x,t))$$

نوشت. به عنوان مثال در مدل ترافیک

$$q(x,t) = \rho(x,t)\, V(\rho(x,t))$$

است که $V(\rho)$ سرعت حرکت ماده با چگالی ρ است. مثلاً به دلیل گنجایش محدود محیط می‌توان فرض کرد که تابع $V(\rho)$ یک تابع نزولی است. (چگالی بیشتر سرعت محدودتر)

لذا معادله اصل تعادل را به صورت

$$\rho_t + \left(F(\rho)\right)_x = 0 \tag{3}$$

یا در ابعاد بالاتر

$$\rho_t + \operatorname{div}\left(F(\rho)\right) = 0$$

می‌نویسیم.

رابطه (3) یک PDE مرتبه اول است و منظور از یک جواب برای آن، تابع مشتق‌پذیر ρ است که در هر نقطه ای در رابطه (3) صدق کند. از طرفی شرط مشتق‌پذیری برای همه پدیده‌های فیزیکی یک شرط قوی است. لذا می‌توان بدون این فرض جواب معادله (3) را تابعی درنظر گرفت که در روابط (1) یا (2) صدق کند. این نوع جواب را جواب ضعیف می‌نامیم.

نکته - اگر با رابطه (2) کار کنیم، در واقع فرض کرده ایم که تابع ρ نسبت به t مشتق‌پذیر است ولی لزومی ندارد که نسبت به x مشتق‌پذیر باشد. رابطه (1) فرض جواب را ضعیف‌تر کرده و فرض مشتق‌پذیری نسبت به t را هم حذف می‌کند.

تمرین - اگر ρ جواب (2) باشد، یعنی به ازای هر x_1 و x_2 در رابطه (2) صدق کند، ثابت کنید رابطه زیر برای هر تابع مشتق‌پذیر $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ برقرار است:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_t(x,t)\,\varphi(x) - q(x,t)\,\varphi'(x)\,dx = 0 \qquad (4)$$

برعکس اگر ρ در رابطه (4) صدق کند، رابطه (2) برقرار است.

تمرین - مشابه تمرین قبل ابتدای رابطه (۱) و هر تابع $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ ثابت کنید:

$$(5) \qquad \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} \rho(x,t)\varphi_t + q(x,t)\varphi_x \, dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} \rho(x,0)\varphi(x,0)\,dx = 0$$

تعریف - توابعی که در رابطه (4) یا (5) صدق کنند را جواب ضعیف معادله اصل بقای (3) می‌نامیم. اگر تابع ρ مشتق‌پذیر باشد آنگاه در رابطه (3) در هر نقطه صدق کرده و جواب قوی (کلاسیک) معادله اصل بقای (3) است.

مثال - اگر $F(\rho)=\frac{1}{2}\rho^2$ قرار دهیم، معادله اصل بقای به

$$\rho_t + \rho\rho_x = 0 \qquad \text{(Burger معادله برگر)}$$

تبدیل می‌شود. با شرط اولیه $\rho(x,0) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$ تابع زیر یک جواب ضعیف است.

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 0 & x< t/2 \\ 1 & x\geq t/2 \end{cases}$$

برای بررسی آن باید رابطه (5) برای هر تابع $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ برقرار باشد یعنی:

$$\int_0^\infty \int_{t/2}^\infty \varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x \, dx\,dt + \int_0^\infty \varphi(x,0)\,dx = 0$$

برای اثبات این رابطه می‌توانیم محاسبات زیر را داشته باشیم:

$$\int_0^\infty \int_{t/2}^\infty \varphi_t \, dx\,dt = \int_0^\infty \int_0^{2x} \varphi_t \, dt\,dx = \int_0^\infty \varphi(x,2x)\,dx - \int_0^\infty \varphi(x,0)\,dx$$

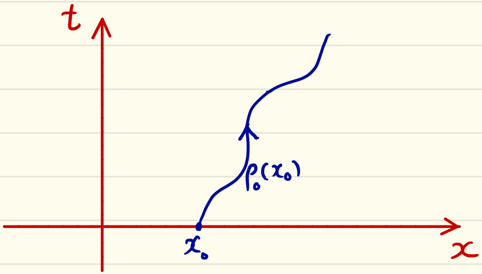
$$\int_0^\infty \int_{t/2}^\infty \frac{1}{2}\varphi_x \, dx\,dt = -\int_0^\infty \frac{1}{2}\varphi(t/2, t)\,dt = -\int_0^\infty \varphi(x,2x)\,dx$$

PDE

۹۸/۱۱/۲۶ جلسه دوم

معادلات مرتبه اول : $F(Du, u, x) = 0$

معادله اصل بقاء : $(1) \begin{cases} \rho_t + f'(\rho)\rho_x = 0 \\ \rho(x,0) = \rho_0(x) \end{cases}$



انتظار داریم هم جهت با چگالی ρ_0 از نقطه x_0 همراه هم حرکت کنند. در واقع منحنی $\gamma(t)$ وجود دارد که می‌گوییم جمعیتی که در زمان $t=0$ در نقطه x_0 بوده اند، در زمان t در نقطه $\gamma(t)$ قرار گرفته اند. بنابراین باید

$$\rho(\gamma(t), t) = \rho(x_0, 0) = \rho_0(x_0)$$

$$\xrightarrow{d/dt} \quad \rho_t + \dot{\gamma}\rho_x = 0$$

از مقایسه با معادله (1) نتیجه می‌شود که یک انتخاب هوشمندانه برای منحنی γ از رابطه زیر می‌آید :

$$\dot{\gamma}(t) = f'(\rho) = f'(\rho_0(x_0))$$

باتوجه به شرط اولیه $\gamma(0) = x_0$ نتیجه می‌شود که

$$\gamma(t) = x_0 + t\, f'(\rho_0(x_0))$$

و به عبارتی دیگر:

$$(2) \qquad \rho(x_0 + t f'(\rho_0(x_0)), t) = \rho_0(x_0)$$

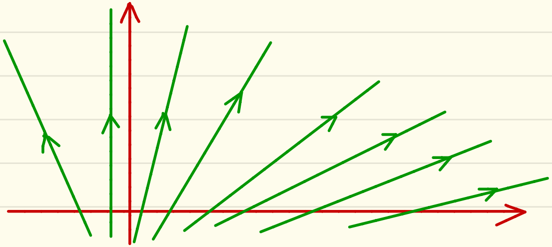
برای اینکه به یک فرمول صریح برای جواب معادله (1) برسیم باید مقدار ρ را در هر نقطه (x,t) برحسب x و t بنویسیم.

برای این کار از (2) کمک می‌گیریم و سعی می‌کنیم مقدار x_0 را برحسب x و t از رابطه زیر به دست بیاوریم:

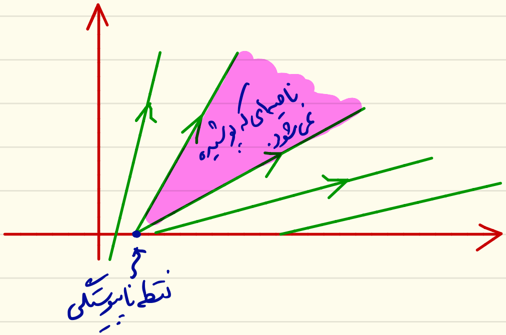
$$(3) \qquad \gamma(t) = x_0 + t\, f'(\rho_0(x_0)) = x$$

معادله (3) بدین معناست که برای هر نقطه (x,t) تعیین کنیم از کدام نقطه آغازین x_0 منحنی γ پس از t ثانیه به نقطه x می‌رسد. از طرفی منحنی‌های $\gamma(t)$ خطوط راست هستند، با شیب $\dfrac{1}{f'(\rho_0(x_0))}$.

اگر همه این خطوط را در صفحه (x,t) رسم کنیم، اتفاقات متفاوتی ممکن است رخ دهد. اگر تابع $x_0 \longmapsto f'(\rho_0(x_0))$ تابعی پیوسته صعودی باشد، این خطوط کل صفحه را می‌پوشانند.



اگر این تابع صعودی و ناپیوسته باشد، مثلاً در نقطه‌ای جهش داشته باشد، خطوط $\gamma(t)$ نمی‌توانند همه صفحه (x,t) را بپوشانند و لذا معادله (3) برای این نقاط جواب ندارد.



اگر این تابع در بازه‌ای نزولی باشد، این خطوط همدیگر را قطع می‌کنند و رابطه (3) جواب یکتا نخواهد داشت.

دو حالت آخر (ناپیوسته، نزولی) چالش جدی در حل معادله اصل بقاء هستند که بعداً به آن می‌پردازیم. ولی به نظر می‌آید حداقل این روش

با فرض پیوسته و صعودی بودن $x_0 \longmapsto f'(\rho_0(x_0))$ منجر به اثبات وجود جواب معادله اصل بقای (1) می‌شود.

تمرین - ثابت کنید با فرض پیوسته و صعودی بودن تابع $f'(\rho_0(x_0))$ تابع ρ که در بالا تعریف شده است جواب کلاسیک (1) است.

(راهنمایی - ρ در رابطه $\rho(x,t)=\rho_0(x-tf'(\rho))$ صدق می‌کند.)

اگر در سمت راست معادله (1) به جای صفر تابع $h(\rho)$ قرار دهیم، یعنی

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho_t + f'(\rho)\rho_x = h(\rho) \\ \rho(x,0) = \rho_0(x) \end{cases}$$

در واقع جریان ماده‌ای را نشان می‌دهد که با شار $f(\rho)$ در حال حرکت است و در هر لحظه متناسب با $h(\rho)$ تغییرات جهتی دارد. یعنی اگر

حرکت را در نظر نگیریم، جهت متناظر معادله

$$(5)\qquad \rho_t = h(\rho)$$

تغییر می‌کند. اگر بخواهیم ایده حل معادله (1) را برای (4) به کار بریم، دیگر نباید انتظار داشت که مقدار ρ روی خم‌های $\gamma(t)$

ثابت باشد، بلکه با توجه به تغییرات ذاتی جهت باید مقدار p روی $\gamma(t)$ از معادله (5) پیروی کند. قرار دهید:

$$u(t) := p(\gamma(t), t) \Longrightarrow \dot{u} = p_t + \dot{\gamma}\, p_x$$

با انتخاب هوشمندانه $\dot{\gamma} = f'(p(\gamma(t), t)) = f'(u(t))$ به دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی زیر می‌رسیم:

$$(6)\quad \begin{cases} \dot{\gamma} = f'(u) & \gamma(0) = x_0 \\ \dot{u} = h(u) & u(0) = p(x_0, 0) = p_0(x_0) \end{cases}$$

اگر $u(t, x_0)$ و $\gamma(t, x_0)$ جواب دستگاه بالا با شرط اولیه متناظر x_0 باشد، آنگاه جواب (4) در رابطه

$$p(\gamma(t, x_0), t) = u(t, x_0)$$

صدق می‌کند. برای اثبات وجود جواب (4) باید از رابطه $\gamma(t, x_0) = x$ مقدار x_0 را برحسب x, t محاسبه کنیم.

باتوجه به شرط اولیهِ (6) این رابطه برای $t=0$ به $\gamma(0,x_0)=x$ یا $x_0=x$ منجر می‌شود.

از طرفی بنا بر قضیهِ تابع ضمنی اگر $\left.\frac{d}{dx_0}\gamma\right|_{t=0}\neq 0$ در همسایگی $t=0$ تابع مشتق‌پذیرِ $X_0(x,t)$ وجود دارد که $x_0=X_0(x,t)$ در رابطه $\gamma(t,x_0)=x$ صدق می‌کند. بنا بر نظریهِ معادلات دیفرانسیلِ عادی جواب (6) نسبت به شرط اولیهِ x_0 مشتق‌پذیر است اگر h و f' مشتق‌پذیر باشند.

(از رابطه $\gamma(0,x_0)=x_0$ نتیجه می‌شود که $\left.\frac{d}{dx_0}\gamma\right|_{t=0}=1$)

در نتیجه جواب (4) عبارتست از

$$\rho(x,t)=u(t,X_0(x,t)) \qquad (7)$$

تمرینِ - ثابت کنیدِ تابع ρ که در رابطه (7) صدق می‌کند، جواب (4) است.

تمرینِ - اگر در سمت راست معادله (4) فرض کنیم تابع h به x و t نیز وابسته است، یعنی $h(x,t,\rho)$ روش بالا را تکرار کرده و نشان دهیدِ معادله جواب دارد.

نکته - با روش بالا وجود جواب معادله (4) را تنها به صورت موضعی (برای مقادیر کوچک t) می‌توان اثبات کرد.

در ادامه این روش را که به روش مشخصه‌ها معروف است برای حل معادلات مرتبه اول در ابعاد بالاتر به کار می‌بریم.

معادله مرتبه اول خطی :

$$(8)\begin{cases} F(Du,u,x)=\vec{a}(x)\cdot Du+b(x)u+c(x)=0 & x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n \\ u=g \quad \text{on} \quad \Gamma\subseteq\partial\Omega \end{cases}$$

خم $\gamma(t)$ را با نقطه شروع $\gamma(0)=x_0\in\Gamma$ در نظر می‌گیریم که به آن خم مشخصه می‌گوییم و

$$z(t)=u(\gamma(t)) \Rightarrow \dot{z}=Du\cdot\dot{\gamma}$$

انتخاب هوشمندانه، $\dot{\gamma}=\vec{a}(\gamma(t))$ است. درنتیجه

$$\dot{z}=-b(x)u-c(x)=-b(\gamma(t))z(t)-c(\gamma(t))$$

(γ, z) در معادله دیفرانسیل عادی زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \vec{a}(\gamma) & \gamma(0) = x_0 \\ \dot{z} = -b(\gamma)z - c(\gamma) & z(0) = g(x_0) \end{cases}$$

برای رسیدن به جواب (8) باید ابتدا معادله $\gamma(t, x_0) = x$ را حل کنیم. برای این منظور از قضیه تابع وارون برای تابع $\gamma: \mathbb{R} \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ استفاده می‌کنیم. با انتخاب یک تغییر مناسب در همسایگی نقطه x_0 می‌توانیم فرض کنیم $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. در این تغییر ماتریس مشتق γ در نقطه $(0, x_0)$ عبارت است از:

$$D\gamma = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

شرط وارون پذیری آن عبارت است از اینکه $\dot{\gamma} \cdot e_n \neq 0$. در واقع این رابطه معادل این است که

$$(9) \qquad \vec{a}(x_0) \cdot \vec{\nu}(x_0) \neq 0$$

که $\vec{\nu}$ بردار عمود بر Γ است. شرط (9) به اینکه رویه Γ غیر مشخصه است تعبیر می‌شود.

در نتیجه به شرط آنکه Γ غیر مشخصه باشد، توابع $x_0 = X_0(x)$, $t = T(x)$ وجود دارند که $\gamma(T(x), X_0(x)) = x$ و

و در نتیجه تابع $u(x) = z(t, x_0) = z(T(x), X_0(x))$

جواب (8) باشد. (تمرین - اثبات کنید u یک تابع مشتق پذیر است که در معادله (8) صدق می کند.)

نکته - شرط غیر مشخصه بودن یک رویه نسبت به معادله تعریف می شود. در واقع این شرط تضمین می کند که خم های مشخصه بر Γ مماس نمی شوند.

مثال -
$$\begin{cases} x u_y - y u_x = u \\ u(x,0) = g \end{cases}$$

$$\vec{a}(x,y) = (-y, x), \quad b(x) = -1, \quad \vec{\nu}(x,0) = (0,1)$$

شرط غیر مشخصه بودن: $\vec{a}\cdot\vec{\nu} = x$ به غیر از $(0,0)$ در بقیه نقاط غیر مشخصه است.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = x & y(0) = 0 \\ \dot{z} = z & z(0) = g(x_0) \end{cases} \Rightarrow z(t) = e^t g(x_0), \quad x(t) = x_0 \cos t, \quad y(t) = x_0 \sin t$$

$$x_0 = \pm\sqrt{x^2+y^2}, \quad t = \tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$$u(x,y) = \exp\left[\tan^{-1}\frac{x}{y}\right] g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

مثال-

$$\begin{cases} xu_x + 2yu_y = 3u \\ u(x, x^3) = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = 2y & y(0) = x_0^3 \\ \dot{u} = 3u & u(0) = x_0^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 e^{t} \\ y(t) = x_0^3 e^{2t} \\ z(t) = (x_0^2+1) e^{3t} \end{cases}$$

خم‌های مشخصه تنها ربع اول و سوم را می‌پوشاند. بنابراین وقتی $xy > 0$ داریم:

$$x_0 = y/x^2 \quad , \quad t = \ln \frac{x^3}{y}$$

$$u(x,y) = \left(\frac{y^2}{x^4} + 1\right) \frac{x^9}{y^3}$$

هرچند خم‌های مشخصه فقط ربع اول و سوم را می‌پوشاند ولی جواب بالا در $y \neq 0$ معتبر است و در معادله صدق می‌کند.

PDE

۹۸/۱۱/۲۸ جلسه ۳

معادله مرتبه اول شبه خطی :

$$(10)\quad \begin{cases} F(Du,u,x) = \vec{a}(x,u)\cdot Du + b(x,u) = 0 & x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n \\ u = g \quad \text{on} \quad \Gamma\subseteq\partial\Omega \end{cases}$$

مشابه حالت خطی به دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \vec{a}(\gamma,z), & \gamma(0)=x_0\in\Gamma \\ \dot{z} = -b(\gamma,z), & z(0)=g(x_0) \end{cases}$$

به طور مشابه به شرط غیرمشخصه بودن Γ ، یعنی

$$\vec{a}(x,g(x))\cdot\vec{\nu}(x)\neq 0, \qquad x\in\Gamma$$

معادله (10) در همسایگی Γ دارای جواب است .

مثال -
$$\begin{cases}(y+u)u_x + y u_y = x-y \\ u(x,1) = x+1\end{cases}$$

$\Gamma = \mathbb{R}\times\{1\}$ و شرط غیرمشخصه بودن عبارت است از $(y+u, y)\cdot e_2 = y \neq 0$ که روی Γ همیشه برقرار است.

معادلات مشخصه عبارتند از:
$$\begin{cases}\dot{x} = y+u & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = x & y(0) = 1 \\ \dot{u} = x-y & u(0) = x_0+1\end{cases}$$

مثال -
$$\begin{cases}u_t + u u_x = 0 \\ u(x,0) = \sin x\end{cases}$$

$\Gamma = \mathbb{R}\times\{0\}$ و شرط غیرمشخصه بودن $(u,1)\cdot e_2 = 1 \neq 0$ است. معادلات مشخصه عبارتند از:

$$\begin{cases}\dot{t} = 1, & t(0)=0 \\ \dot{x} = u, & x(0)=x_0 \\ \dot{u} = 0, & u(0)=\sin x_0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}t(s) = s \\ x(s) = s\cdot\sin x_0 + x_0 \\ u(s) = \sin x_0\end{cases} \Longrightarrow u(t\sin x_0 + x_0, t) = \sin x_0$$

معادله مرتبه اول غیرخطی :

$$(11)\quad \begin{cases} F(Du, u, x) = 0 & \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = g & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

در این حالت به غیر از $\gamma(t)$ و $z(t) = u(\gamma(t))$ بردار $p(t) = Du(\gamma(t))$ را هم در نظر می‌گیریم.

$$(12)\quad \dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\partial_i u(\gamma(t))\right) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} u \cdot \dot{\gamma}_j$$

اگر از معادله (11) نسبت به x_i مشتق بگیریم :

$$(13)\quad \sum_{j=1}^{n} \partial_{p_j} F \, \partial_{ij} u + \partial_z F \cdot \partial_i u + \partial_{x_i} F = 0$$

اگر قرار دهیم

$$\dot{\gamma}_j = \partial_{p_j} F(p, z, \gamma)$$

آنگاه از مقایسه (12) و (13) خواهیم داشت :

$$\dot{p}_i = -\partial_{x_i} F - \partial_z F \cdot p_i$$

همچنین:

$$\dot{z} = Du(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma} = p\cdot D_pF(p,z,\gamma)$$

به طور خلاصه دستگاه معادلات مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$(14)\quad \begin{cases} \dot{\gamma} = D_pF(p,z,\gamma) \\ \dot{z} = p\cdot D_pF(p,z,\gamma) \\ \dot{p} = -D_xF(p,z,\gamma) - D_zF(p,z,\gamma)\,p \end{cases}$$

که یک دستگاه $(2n+1)$ بعدی است. شرایط اولیه این دستگاه $\gamma(0)=x_0$ و $z(0)=g(x_0)$ است و باید مقدار $p(0)$ را تعیین کنیم. با فرض اینکه $p\subseteq \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ سطح است و شرط مرزی $u(x)=g(x)$ روی Γ نتیجه می‌شود که $\partial_i u(x) = \partial_i g(x)$ برای $1\leq i\leq n-1$. و در نتیجه می‌توان فرض کرد

$$p_i(0) = \partial_i g(x_0) \qquad 1\leq i\leq n-1.$$

تنها باید مقدار $p_n(0)$ را مشخص کنیم. برای این کار از معادله (11) باید بتوانیم مقدار $p_n(0)$ را به دست آوریم.

در واقع داریم: $F(p(t), z(t), \gamma(t)) = 0$ و بنابر قضیه تابع ضمنی اگر $F_{p_n} \neq 0$ می‌توانیم مقدار p_n را برحسب بقیه پارامترها بدست آوریم و چون $\gamma(0)$ ، $z(0)$ و $(p_1(0), \dots, p_{n-1}(0))$ برحسب x_0 بیان می‌شوند می‌توان $p_n(0)$ را برحسب x_0 به طور یکتا تعیین کرد. درحالتی که Γ مسطح نباشد، این شرط به صورت

$$(15) \quad D_p F \cdot \vec{v} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma$$

بیان می‌شود که همان شرط غیرمشخصه بودن Γ است. بدین ترتیب برای هر $x_0 \in \Gamma$ دستگاه (14) دارای جواب $\gamma(t, x_0)$ ، $z(t, x_0)$ و $p(t, x_0)$ است. برای پیدا کردن جواب مسئله جالب قبل باید $\gamma(t, x_0) = x$ را برای هر $x \in \Omega$ حل کنیم. دقیقاً مشابه قبل شرط استفاده از قضیه تابع وارون

$$\dot{\gamma} \cdot \vec{v} = D_p F \cdot \vec{v} \neq 0$$

همان شرط غیرمشخصه (15) است.

تذکر ـ تابع $u(x) = z(T(x), X_0(x))$ جواب کلاسیک (11) است که T و X_0 در رابطه $\gamma(T(x), X_0(x)) = x$ صدق می‌کند.

اثبات ـ ابتدا توجه کنید که از نظریه معادلات دیفرانسیل عادی می‌دانیم توابع X_0 و T مشتق‌پذیر هستند. در نتیجه u یک تابع مشتق‌پذیر است.

گام اول ـ ثابت می‌کنیم:

$$F(p(t,x_0), z(t,x_0), \gamma(t,x_0)) = 0 \qquad (16)$$

این رابطه برای $t=0$ با توجه به انتخاب شرایط اولیه درست است. اگر از (16) نسبت به t مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$D_pF \cdot \dot{p} + D_zF \cdot \dot{z} + D_xF \cdot \dot{\gamma} = -D_pF \cdot (D_xF + D_zF \cdot p) + D_zF(p \cdot D_pF) + D_xF \cdot D_pF = 0$$

در نتیجه رابطه (16) برای هر t برقرار است.

گام دوم ـ نشان می‌دهیم $p(t,x_0) = Du(x)$ یا به طور معادل $p \cdot D\gamma = Dz$

از (14) نتیجه می‌شود که $\partial_t z = p\cdot\partial_t \gamma$. به‌علاوه برای هر $1\le i\le n-1$ و با توجه به شرایط اولیه (14) می‌دانیم که

$\partial_{x_i} z(0) = p\cdot\partial_{x_i}\gamma(0) = \partial_{x_i} g$. همچنین از مشتق (14) نسبت به x_i داریم:

$$\frac{d}{dt}\left[\partial_{x_i} z(t) - p\cdot\partial_{x_i}\gamma(t)\right] = \partial_{x_i} p \cdot D_pF(p,z,\gamma) + (D_xF + D_zF\cdot p)\cdot\partial_{x_i}\gamma$$

حال از (16) نسبت به x_i مشتق بگیرید. نتیجه می‌شود:

$$\partial_{x_i} p \cdot D_pF + \partial_{x_i} z\cdot D_zF + \partial_{x_i}\gamma\cdot D_xF = 0$$

و در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\partial_{x_i} z(t) - p\cdot\partial_{x_i}\gamma(t)}_{r(t)}\Big] = -D_zF\,\Big[\underbrace{\partial_{x_i} z - p\cdot\partial_{x_i}\gamma}_{r(t)}\Big]$$

دقت کنید که $r(0)=0$ در نتیجه $r(t)\equiv 0$.

مثال -

$$\begin{cases} u_x^2 + u_y + u = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

$$F(p_1, p_2, z, x, y) = p_1^2 + p_2 + z$$

شرط غیرمشخصه بودن $(2p_1, 1)\cdot(0,1) \neq 0$ است. معادلات مشخصه عبارتند از:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2p_1 & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = 1 & y(0) = 0 \\ \dot{z} = 2p_1^2 + p_2 & z(0) = x_0 \\ \dot{p}_1 = -p_1 & p_1(0) = 1 \\ \dot{p}_2 = -p_2 & p_2(0) = -1 - x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + 2 - 2e^{-t} \\ y(t) = t \\ z(t) = (1+x_0)e^{-t} - e^{-2t} \\ p_1(t) = e^{-t} \\ p_2(t) = -(1+x_0)e^{-t} \end{cases}$$

از حل معادله $F(p_1(0), p_2(0), z(0), x(0), y(0)) = 0$ بدست می‌آید.

$$\begin{cases} x_0 + 2 - 2e^{-t} = x \\ t = y \end{cases} \Rightarrow x_0 = x + 2e^{-y} - 2 \Rightarrow u(x,y) = (x + 2e^{-y} - 1)e^{-y} - e^{-2y}$$

مثال -

$$\begin{cases} u_x u_y = u \\ u(0,y) = y^2 \end{cases}$$

$$F(p_1, p_2, z, x, y) = p_1 p_2 - z$$

شرط غیرمشخصه :
$$D_pF \cdot \vec{v} = (p_2, p_1)\cdot(1,0) = p_2 = 2y$$

روی $\Gamma = \{0\}\times\mathbb{R}$

به‌جز $(0,0)$ در بقیه نقاط غیرمشخصه است.

$$\begin{cases} \dot{x} = p_2, & x(0) = 0 \\ \dot{y} = p_1, & y(0) = y_0 \\ \dot{z} = 2p_1p_2, & z(0) = y_0^2 \\ \dot{p}_1 = p_1, & p_1(0) = y_0/2 \\ \dot{p}_2 = p_2, & p_2(0) = 2y_0 \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{c} F(p_1(0), p_2(0), z(0), x(0), y(0)) = 0 \\ \| \\ 2y_0 p_1(0) - y_0^2 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow\ p_1(t) = \tfrac{y_0}{2}e^t,\quad p_2(t) = 2y_0e^t,\quad x(t) = 2y_0(e^t - 1),\quad y(t) = \frac{y_0}{2}(e^t + 1),\quad z(t) = y_0^2 e^{2t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x \\ y(t) = y \end{array}\right\} \Rightarrow y_0 = y - x/4,\quad t = \ln\frac{4y+x}{4y-x} \Rightarrow u(x,y) = (y - x/4)^2\cdot\left(\frac{4y+x}{4y-x}\right)^2 = \frac{1}{16}(4y+x)^2$$

این رابطه همه جا معتبر نیست ولی جواب نهایی سرتاسری است.

PDE

جلسه چهارم ۹۸/۱۲/۳

جوابهای ضعیف معادلات اصل بقاء

$$(1)\quad \begin{cases} \rho_t + \left(F(\rho)\right)_x = 0 \\ \rho(x,0) = \rho_0(x) \end{cases}$$

درجلسه دوم دیدیم که اگر تابع $F'(\rho(x))$ غیرنزولی باشد، جواب سرتاسری قوی وجود دارد.

مثال زیر حالتی را نشان می‌دهد که معادله نمی‌تواند جواب پیوسته داشته باشد.

مثال-

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

مقدار جواب معادله باید روی خطهای مشخصه $\gamma(t) = x + t\,u_0(x)$ ثابت باشد.

تقاطع خطهای مختلف نشان می‌دهد که این معادله نمی‌تواند جواب قوی داشته باشد.

هر جواب ضعیف (۱) باید در رابطه زیر صدق کند.

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\,\varphi_t + F(\rho)\,\varphi_x \,dx\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^{\infty}([0,\infty)\times\mathbb{R})$$

به‌علاوه رابطه (2) در حالت اول با شرایط قوی‌تری روی تابع ρ می‌توان جواب ضعیف را به عنوان تابعی که در رابطه زیر صدق می‌کند.

(2) $$\frac{d}{dt}\left[\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx\right] = F(\rho(x_1,t)) - F(\rho(x_2,t))$$

اگر $x_1 < \sigma(t) < x_2$ آن‌گاه

$$F(\rho(x_1,t)) - F(\rho(x_2,t)) = \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\int_{x_1}^{\sigma(t)} \rho\,dx + \int_{\sigma(t)}^{x_2} \rho\,dx\right]$$

$$= \dot{\sigma}\left[\rho(\sigma(t)^-,t) - \rho(\sigma(t)^+,t)\right] +$$

$$\int_{x_1}^{\sigma(t)} \rho_t\,dx + \int_{\sigma(t)}^{x_2} \rho_t\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_l &:= \rho(\sigma(t)^-, t)\\ \rho_r &:= \rho(\sigma(t)^+, t)\end{aligned}}$$

$$= \dot{\sigma}[\rho_l - \rho_r] - F(\rho(\sigma(t)^-, t)) + F(\rho(x_1, t))$$

$$- F(\rho(x_2, t)) + F(\rho(\sigma(t)^+, t))$$

$$\Longrightarrow \quad F(\rho_l) - F(\rho_r) = \dot{\sigma}[\rho_l - \rho_r]$$

$$[\rho] := \rho_l - \rho_r \quad , \quad [F(\rho)] := F(\rho_l) - F(\rho_r)$$

شرط رانکین-هوگونیو : (Rankine-Hugoniot)

$$\dot{\sigma} = \frac{[F(\rho)]}{[\rho]}$$

اینگونه جواب ناپیوسته را شوک (shock) گوییم.

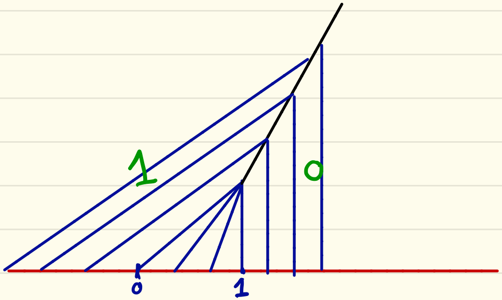
مثال- معادله برگر $\rho_t + \rho\rho_x = 0$ با شرط اولیه $\rho(x,0)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x\geq 0\end{cases}$ را درنظر بگیرید. فرض کنیم جواب به صورت زیر باشد:

$$\rho(x,t)=\begin{cases}1 & x<\sigma(t)\\ 0 & x>\sigma(t)\end{cases}$$

درنتیجه باید

$$\dot{\sigma}=\tfrac{1}{2}$$

و برای $t=0$ داریم $\sigma(0)=0$. درنتیجه $\sigma(t)=t/2$ که به جواب $\rho(x,t)=\begin{cases}1 & x<t/2\\ 0 & x>t/2\end{cases}$ می‌رسیم.



مثال- معادله برگر با شرط اولیه $\rho(x,0)=\begin{cases}1 & x\leq 0\\ 1-x & 0\leq x\leq 1\\ 0 & x\geq 1\end{cases}$.

خط‌های مشخصه تا $t\leq 1$ همدیگر را قطع نمی‌کنند. درنتیجه تا $t\leq 1$ جواب به طور یکتا تعریف می‌شود.

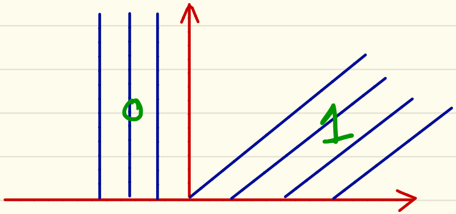
برای $t \leq 1$ جواب بدین صورت است :

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 1 & x \leq t \,, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1-x}{1-t} & t \leq x \leq 1 \,, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \,, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

برای $t \geq 1$ ، خم شوک $\sigma(t)$ باید در رابطهٔ $\dot{\sigma} = 1/2$ صدق کند و $\sigma(1) = 1$. یعنی

$$\sigma(t) = \frac{1+t}{2}$$

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 0 & x \geq \frac{1+t}{2} \,, \quad t \geq 1 \\ 1 & x < \frac{1+t}{2} \,, \quad t \geq 1 \end{cases}$$



مثال - معادله ترابرد با شرط اولیه

$$p(x,0)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

در این حالت جهت مشخصه کل فضا را نمی‌پوشاند ولی می‌توان نتیجه گرفت که

$$p(x,t)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & t<x\end{cases}$$

اگر جواب در ناحیه $0<x<t$ ناپیوسته باشد به طوری که سمت چپ منحنی ناپیوستگی $p=0$ و در سمت راست $p=1$.

در این صورت مبنای شرط رانکین-هوگونیو باید $\sigma=1/2$ و در نتیجه $\sigma(t)=t/2$ ، در این صورت جواب

$$p(x,t)=\begin{cases}0 & x<t/2\\ 1 & x>t/2\end{cases}$$

اما می‌توان جواب پیوسته زیر را نیز در نظر گرفت

$$p(x,t)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{t} & 0<x<t\\ 1 & t<x\end{cases}$$

سؤال مهم این است که کدام یک از این دو جواب، جواب واقعی (فیزیکی) مسأله اصل بقاء است. قبل از آن که به این سؤال پاسخ دهیم بررسی کنید که همه توابع زیر برای هر پارامتر $1 \geq \gamma \geq 0$ جواب معادله با شرط اولیه داده شده هستند:

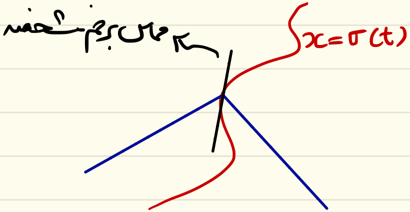
$$p(x,t) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{t} & 0<x<\gamma t \\ \gamma & \gamma t<x<\frac{\gamma+1}{2}t \\ 1 & \frac{\gamma+1}{2}t<x \end{cases}$$

این جوابها روی خط $x=\frac{\gamma+1}{2}t$ ناپیوسته است و شرط رانکین-هوگونیو برای آنها برقرار است.

برای اینکه از بین این جوابها، جواب فیزیکی را پیدا کنیم، شرطی به جواب معادله اضافه می‌کنیم به نام شرط آنتروپی.

این شرط بیان می‌کند که هرگونه ناپیوستگی جواب باید از برخورد خمهای مشخصه به دست بیاید. چرا که چگالی جمعیتی از هر نقطه x در لحظه $t=0$، روی خم مشخصه‌ای که از نقطه x شروع می‌شود حرکت می‌کند. اگر دو خم مشخصه همدیگر را قطع نکنند، دلیلی ندارد که در لحظه $t>0$، ناپیوستگی ایجاد شود.

معنای ریاضی این شرط این است که اگر جواب ناپیوسته باشد و $x=\sigma(t)$ خم ناپیوستگی. در همسایگی نقطه x شیب خم‌های مشخصه سمت چپ بزرگتر از شیب مماس بر خم ناپیوستگی در آن نقطه و برعکس شیب خم مشخصه سمت راست کوچکتر از شیب مماس بر خم ناپیوستگی است.



$$\text{شیب خم مشخصه سمت چپ} = \frac{1}{f'(\rho_l)}$$

$$\text{شیب خم مشخصه سمت راست} = \frac{1}{f'(\rho_r)}$$

$$\text{شیب مماس خم ناپیوستگی} = \frac{1}{\dot{\sigma}(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f'(\rho_l)} \leq \frac{1}{\dot{\sigma}} \leq \frac{1}{f'(\rho_r)}$$

و با توجه به شرط رانکین ـ هوگونیو خواهیم داشت:

شرط آنتروپی:

$$\boxed{f'(\rho_l) \leq \frac{f(\rho_l)-f(\rho_r)}{\rho_l-\rho_r} \leq f'(\rho_r)}$$

اگر f تابعی محدب باشد این شرط معادل این است که $\rho_r < \rho_l$ و اگر f مقعر باشد برعکس شرط آنتروپی به $\rho_l < \rho_r$ تبدیل می‌شود.

مثال- در مثال قبل، معادله برگر با شرط اولیه $\rho(x,0)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ شرط آنتروپی برای جواب ناپیوسته برقرار نیست. زیرا با گرفتن $f(\rho)=\frac{1}{2}\rho^2$ که یک تابع محدب است باید $\rho_r < \rho_l$ باشد. هرچند این سؤال هنوز مطرح است که چرا جواب پیوسته ای که تعریف کردیم، جواب فیزیکی مسأله است.

برای پاسخ به سؤال بالا شرط آنتروپی را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

اگر تابع f محدب باشد، جواب $\rho(x,t)$ از معادله اصل بقای $\rho_t+(f(\rho))_x=0$ جواب آنتروپی است هرگاه

ثابت $E>0$ وجود داشته باشد که

$$\rho(x+z,t)-\rho(x,t)\leq \frac{E}{t}z \qquad \forall t>0,\ z>0,\ x\in\mathbb{R}$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که تابع $x\longmapsto \rho(x,t)-\frac{E}{t}x$ غیرصعودی است و در نتیجه در نقاط ناپیوستگی باید شرط $\rho_l\geq\rho_r$ برقرار باشد. اگر f مقعر باشد نامساوی بالا برعکس خواهد بود.

قضیه: اگر تابع f محدب (یا مقعر) و هموار باشد، آنگاه حداکثر یک جواب آنتروپی (به مفهوم بالا) برای معادله اصل بقاء وجود دارد.

اثبات - به قضیهٔ 3 در بخش 3.4 کتاب Evans مراجعه شود.

تمرین — جواب آنتروپی مسأله ترافیک را پیدا کنید. در این مسأله فرض می‌شود سرعت حرکت تابعی نزولی از چگالی است.

در حالت ساده $V(\rho)=1-\rho$ سرعت حرکت است. با حداکثر سرعت یک و وقتی چگالی $\rho=1$ است، مانع ترافیکی است

وکسی حرکت نمی‌کند. با فرض حرکت به سمت راست، شرط اولیه $\rho(x,0)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x>0\end{cases}$ مدل ایستادن پشت چراغ قرمز را نشان می‌دهد.

در ادامه یک توصیه دیگر برای شرط آنتروپی بیان می‌شود.

اگر معادله اصل بقاء (1) را دچار اختلال کرده و به عنوان تقریبی از معادله زیر در نظر بگیریم:

$$(3) \qquad u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx}$$

(در این معادله ذرات علاوه بر جابجایی با شار $f(u)$ دارای حرکات میکروسکوپی به صورت جابجایی تصادفی هستند. این پدیده را به صورت دقیق‌تر در جلسه بعد خواهیم دید)

جواب (3) را با $u^{\varepsilon}(x,t)$ در نظر می‌گیریم. در واقع انتظار داریم جواب (1)، ρ حد u^{ε} باشد وقتی $\varepsilon\to 0$.

در همسایگی نقطه ناپیوستگی ρ، نقطه $x=\sigma(t)$، می‌توانیم به عنوان اولین تقریب جواب فرض کنیم که تابع ρ روی خطوط $x-st=$ ثابت مقدار ثابتی می‌گیرد (برای یک مقدار ثابت s). لذا فرض می‌کنیم جواب (3) به صورت

$$u^{\varepsilon}(x,t) = w(x-st)$$

باشد. اینگونه جوابها را موج رونده می‌نامیم. اگر $\xi = x-st$ آنگاه $w(\xi)$ باید در معادله زیر صدق کند.

$$(4) \quad -s\frac{dw}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(f(w)) = \varepsilon\frac{d^2w}{d\xi^2}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید جواب (4) به ε وابسته است. ولی با تغییر متغیر $\varsigma = \xi/\varepsilon$ با توجه به رابطه $\frac{dw}{d\varsigma} = \varepsilon\frac{dw}{d\xi}$ تابع w جواب معادله زیر است:

$$(5) \quad -sw' + (f(w))' = w''$$

که در آن $w' = \frac{dw}{d\varsigma}$. در نتیجه w به عنوان تابعی ς مستقل از ε است. در حقیقت مثل این است که فرض کنیم

$$u^{\varepsilon}(x,t) = w\left(\frac{x-st}{\varepsilon}\right)$$

این رابطه بیانگر حرکت جهت با سرعت s است. به علاوه فرض می‌کنیم تابع $w(\varsigma)$ در $+\infty$ برابر P_r و در $-\infty$ برابر P_l باشد. (صدارت وجهت تابع P در نقطه ناپیوستگی $(x=\sigma(t))$ دقت کنید وقتی $\varepsilon \to 0$ داریم $|\varsigma| \to +\infty$ و این فرض برای اینکه

تابع ρ حد u^ε باشد طبیعی است (چرا؟) با در نظر گرفتن $\omega(+\infty)=\rho_r$ و $\omega(-\infty)=\rho_l$ معادله (5) را حل می‌کنیم:

$$(6) \qquad \omega'(\xi) = f(\omega) - s\omega + c$$

برای یک مقدار ثابت c. در شرایط حدی $\xi \to \pm\infty$ خواهیم داشت:

$$f(\rho_l) - s\rho_l + c = f(\rho_r) - s\rho_r + c = 0$$

$$\Rightarrow \qquad s = \frac{f(\rho_r) - f(\rho_l)}{\rho_r - \rho_l}$$

همچنین با جایگذاری مقدار c در (6) خواهیم داشت:

$$(7) \qquad \omega' = f(\omega) - f(\rho_l) - s(\omega - \rho_l) := \phi(\omega)$$

می‌دانیم که $\phi(\rho_l)=\phi(\rho_r)=0$ و ρ_l و ρ_r نقاط بحرانی ODE (7) هستند. اگر به دنبال جوابی باشیم که در شرایط حدی

معادله (7) با $\omega(-\infty)=\rho_l$ و $\omega(+\infty)=\rho_r$ نباید نقطه بحرانی دیگری بین ρ_l و ρ_r داشته باشد. به علاوه اگر $\rho_l > \rho_r$ باید $\phi(\omega) < 0$ برای $\rho_r < \omega < \rho_l$ که بیانگر این است که $\omega' < 0$. (برعکس برای $\rho_l > \rho_r$ باید $\phi(\omega) > 0$)

در نتیجه $\phi'(\rho_l) \leq 0 \leq \phi'(\rho_r)$ و به طور معادل

$$f'(\rho_r) \leq s \leq f'(\rho_l)$$

با جایگذاری مقدار s همان شرط آنتروپی باید برقرار باشد:

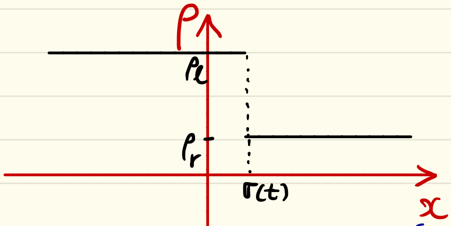
$$f'(\rho_r) \leq \frac{f(\rho_l)-f(\rho_r)}{\rho_l-\rho_r} \leq f'(\rho_l) \tag{8}$$

تمرین - نشان دهید برای حالت $\rho_r > \rho_l$ نیز باید رابطه بالا برقرار باشد.

جمع‌بندی: برای اینکه جواب (1) در همسایگی نقطهٔ ناپیوستگی به صورت حد جواب‌های موج رونده (3) باشد، باید در نقطهٔ ناپیوستگی در شرط (8) صدق کند. اگر $u^{\varepsilon}(x,t) = \omega\left(\frac{x-st}{\varepsilon}\right)$ و

نمودار ω به صورت روبرو باشد، با رسم نمودار تابع $u^{\varepsilon}(x,t)$ برای مقادیر مختلف t مشاهده شد که توزیع چگالی جمعیت مانند نمودار روبرو است که با سرعت s در حالت حرکت به سمت راست است.

وقتی $\varepsilon \to 0$ به تابع $\rho(x,t)$ می‌رسیم که دارای ناپیوستگی در نقطهٔ $\sigma(t)$ است و نمودارش در زمان t به صورت زیر است:



این توزیع جمعیتی باید با سرعت

$$s = \frac{f(\rho_l) - f(\rho_r)}{\rho_l - \rho_r}$$

به سمت راست حرکت کند. با توجه به شرط رانکین-هوگونیو، $s = \dot{\sigma}(t)$ است و حرکت توزیع جمعیتی بالا با سرعت s توجیه‌پذیر است.

PDE

۹۸/۱۲/۱۰ جلسه پنجم

پخش (Diffusion)

در جلسه اول دیدیم که اگر $\rho(x,t)$ چگالی یک ماده در حال حرکت با شار $q(x,t)$ را نشان دهد، معادله زیر برقرار است:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(q(x,t)) = 0$$

و اگر این ماده در نقطه x و زمان t با نرخ $\sigma(x,t)$ تغییر جمعیت (زاد و ولد یا مرگ و میر) داشته باشد، معادله بالا به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(q(x,t)) = \sigma(x,t)$$

در اکثر مسائل σ تابعی از چگالی است، یعنی می‌توانیم فرض کنیم $\sigma(x,t) = f(\rho(x,t))$ و این جمله را واکنش (Reaction) سیستم مورد بررسی می‌نامیم. از طرفی شار q محصول دو پدیده است:

$$q = J_c + J_D$$

۱- جریان همرفت (Convection) : تحت اثر نیرو یا انرژی خارج از سیستم ذرات با سرعت $V(x,t)$ در حال حرکت هستند و

در نتیجه :

$$J_c = \rho(x,t)\, V(x,t)$$

البته سرعت می‌تواند تابعی از چگالی، $\rho(x,t)$، باشد. در طبقات قبل مدل‌های مورد بررسی تنها پدیده همرفتی را در نظر می‌گرفت.

۲- پخش (Diffusion) : جابجایی درون سیستم که نتیجه تغییرات تصادفی مولکولی است. هر مولکول به صورت تصادفی (برخورد با مولکول‌های دیگر) جابجا می‌شود. نتیجه این حرکت‌ها، شاری برای سیستم به دست می‌آید که به آن پخش (یا انتشار) می‌گوییم. این شار با قاعده فیک (Fick) به صورت زیر بیان می‌شود :

Fick's law: " جهت از نقاط با چگالی جمعیتی بالا به سمت نقاطی که کمترین چگالی را دارد، حرکت می‌کند. "

اگر قرار باشد، این جمله را به زبان ریاضی بیان کنیم، این خواهد بود که شار حرکتی در راستای $-\nabla\rho(x,t)$ خواهد بود.

زیرا $-\nabla\rho$ راستایی است که تابع چگالی، ρ، بیشترین کاهش را دارد. در نتیجه قاعده فیک، شار پخش را برای عبارت زیر بیان می‌کند :

$$J_D = -D(x,t)\,\nabla\rho(x,t)$$

که $D(x,t)$ یک تابع مثبت و ضریب پخش در نقطه (x,t) است. (عبارت بالا یعنی J_D هم راستای $-\nabla\rho$ است.)

جمع‌بندی سه پدیده واکنش، حرکت و پخش (انتشار) به صورت زیر خواهد بود.

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho V) - \mathrm{div}(D\nabla\rho) = \sigma$$

اگر $V=0$ (جریان حرکتی نداشته باشیم) معادله به صورت زیر ساده می‌شود، که به آن معادله واکنشی-پخشی یا واکنشی-انتشاری می‌گوییم:

Reaction-Diffusion Equation: $\quad \partial_t\rho - \mathrm{div}(D\nabla\rho) = \sigma$

و اگر ضریب پخش یک عدد ثابت باشد، $D(x,t)\equiv D$، به معادله گرما می‌رسیم:

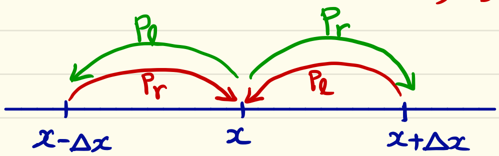
Heat Equation: $\quad \partial_t\rho - D\,\Delta\rho = \sigma$

که $\Delta\rho = \mathrm{div}(\nabla\rho) = \partial^2_{x_1}\rho + \partial^2_{x_2}\rho + \cdots + \partial^2_{x_n}\rho$.

در ادامه می‌خواهیم ببینیم که چرا قاعده فیک باید درست باشد.

در یک مدل یک بعدی، یعنی حالتی که ذرات در راستای یک خط راست حرکت می‌کنند و با در نظر گرفتن چگالی $\rho(x,t)$ در نقطه x و زمان t،
فرض می‌کنیم در مدت زمان τ ذرات به صورت تصادفی فاصله Δx را طی می‌کنند. یعنی ذرات در نقطه x با احتمال P_r
به نقطه $x+\Delta x$ و با احتمال P_l به نقطه $x-\Delta x$ می‌روند. نتیجه این توصیف رابطه زیر خواهد بود:

$$\rho(x,t+\tau) = \underbrace{\rho(x,t)}_{\text{چگالی ذرات در نقطه } x} \times \underbrace{\left[1-P_r-P_l\right]}_{\text{احتمال اینکه ذرات حرکت نکنند}} + \underbrace{\rho(x-\Delta x,t)\times P_r}_{\text{ذراتی که در نقطه } x-\Delta x \text{ بودند و به سمت راست حرکت کردند}} + \underbrace{\rho(x+\Delta x,t)\times P_l}_{\text{ذراتی که در نقطه } x+\Delta x \text{ بودند و به سمت چپ حرکت کردند.}}$$



در رابطه بالا تعریف‌های زیر را جایگذاری کنید:

$$\rho(x,t+\tau) = \rho(x,t) + \tau\,\partial_t \rho(x,t) + O(\tau^2)$$

$$\rho(x\pm\Delta x,t) = \rho(x,t) \pm \Delta x \cdot \partial_x \rho(x,t) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\, \partial_x^2 \rho(x,t) + O((\Delta x)^3)$$

در نتیجه اگر $p_r = p_l$ ، آنگاه

$$\tau\,\partial_t \rho = \frac{1}{2}(\Delta x)^2\, \partial_x^2 \rho \times (p_r + p_l)$$

و با قرار دادن $D = \frac{p_r+p_l}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\tau}$ که ضریب پخش (انتشار) نامیده می‌شود به رابطه

$$\partial_t \rho = D\,\partial_x^2 \rho$$

می‌رسیم. دقت کنید در تعریف ضریب پخش فرض کرده ایم در زمان τ به اندازه Δx حرکت می‌کند. به عنوان مثال ضریب پخش اکسیژن

در آب دمای $18^{\circ}C$ برابر $\frac{cm^2}{sec}$ 1.98×10^{-5} است. یعنی اگر یک مولکول اکسیژن فقط در یک جهت حرکت کند 0.5×10^9 ثانیه زمان لازم دارد تا مسافت به طول یک متر را طی کند. (چیزی در حدود ده سال !!)

هرچند پدیده پخش یک پدیده کند است ولی همین تغییرات کوچک باعث تفاوتهای زیادی در رفتار جوابهای معادله می‌شود.

تمرین - نشان دهید چگونه می‌توان قاعده فیک را در یک محیط دولبعدی با فرض جابجایی با احتمال برابر در چهار جهت بالا، پایین، راست و چپ توجیه کرد.

معادلات واکنش - انتشار در داخل یک ناحیه Ω معمولاً همراه با شرایطی روی مرز ناحیه (که با $\partial\Omega$ نشان می‌دهیم) همراه است.

$$\partial_t p - \operatorname{div}(D \nabla p) = \sigma \quad \text{in } \Omega$$

شرط مرزی دیریکله: مقدار چگالی روی $\partial\Omega$ با یک رابطه بیان می‌شود، مثلاً $p = g$ برای یک تابع معین g داده شده است.

شرط مرزی نیومن: مقدار شار خروجی جمعیت از مرز $\partial\Omega$ داده شده است. در واقع اگر $\vec{n}$ بردار عمود برونگرای روی $\partial\Omega$ باشد، مقدار شار خروجی با عبارت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \nabla p \cdot \vec{n} = g$$

PDE

جلسه ششم

۹۸/۱۲/۱۳

معادله لاپلاس:

اگر مدل واکنش - انتشار را در ناحیه Ω در نظر بگیریم، همراه با شرط مرزی دیریکله:

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(D\nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

یک حالت تعادل سیستم، یعنی حالتی که تغییری در جهت ایجاد نشود. در واقع باید $\partial_t u = 0$ و به معادله

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D\nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

می‌رسیم. اگر $D \equiv 1$ مقدار ثابت باشد، به حالت ساده زیر می‌رسیم که به آن معادله لاپلاس گفته می‌شود:

$$-\Delta u = f$$

تعریف- تابع u که در معادله $\Delta u = 0$ صدق کند را تابع هارمونیک می‌نامیم.

مثال- از آنالیز مختلط می‌دانیم که اگر $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع تحلیلی باشد، آنگاه $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$ توابع هارمونیک در صفحه خواهند بود.
مثلاً اگر $f(z) = z^n$ در نظر بگیریم، توابع $\operatorname{Re}(x+iy)^n$ و $\operatorname{Im}(x+iy)^n$ دو چندجمله‌ای هارمونیک درجه n هستند. یا مثلاً برای $f(z) = e^z$ توابع هارمونیک $e^x \cos y$ و $e^x \sin y$ به دست می‌آیند.

گزاره- اگر u یک تابع هارمونیک در $\mathbb{R}^n$ باشد و P یک ماتریس یکانی ($P^t P = I$) آنگاه $v(x) = u(Px)$ نیز یک تابع هارمونیک است.

اثبات- اگر درایه‌های ماتریس P را با $[P_{ij}]$ نشان دهیم، با قضیه مشتق زنجیره‌ای خواهیم داشت:

$$\partial_i v(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(Px) \cdot P_{ji}$$

$$\Rightarrow \partial_{ii} v(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \partial_{kj} u(Px) P_{ki} \right) P_{ji} \Rightarrow$$

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} v(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{kj} u(Px)\, P_{ki}\, P_{ji}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\partial_{kj} u(Px) \sum_{i=1}^{n} P_{ki}\, P_{ji} \right]$$

رابطه $PP^t = I$ نتیجه می‌دهد که

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ki} P_{ji} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

بنابراین

$$\Delta v(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{kj} u(Px)\, \delta_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \partial_{jj} u(Px) = \Delta u(Px)$$

توابع هارمونیک متقارن :

اگر به دنبال تابع هارمونیکی باشیم که به اصطلاح شعاعی باشد، یعنی تابعی از $r = |x|$ ، روابط زیر باید برقرار باشد :

$$u(x) = v(|x|) = v(r)$$

$$r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad \Rightarrow \quad \partial_{x_i} r = \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_i u = v'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r)\, \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_{ii} u = v''(r) \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r) \left[\frac{1}{r} - \frac{x_i \overbrace{\frac{\partial r}{\partial x_i}}^{\frac{x_i}{r}}}{r^2} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta u = v''(r)\, \frac{\sum x_i^2}{r^2} + v'(r) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right)$$

$$= v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r)$$

$$\Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(r^{n-1} v'(r) \right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad v(r) = \begin{cases} b \log r + c & n = 2 \\ \dfrac{b}{r^{n-1}} + c & n \geq 3 \end{cases}$$

برای مقادیر ثابت b و c . به دلیل محاسباتی که بعداً خواهیم داشت این مقادیر ثابت را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$(1) \qquad \int_{\partial B_r} (\nabla u \cdot x)\, dS = -1 \qquad \text{برای هر } 0 < r$$

و جواب متناظر را جواب اساسی معادله لاپلاس می‌نامیم. این جواب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

که $\alpha(n)$ حجم گوی n-بعدی با شعاع یک در $\mathbb{R}^n$ است. (می‌دانیم که $n\alpha(n)$ مساحت کره به شعاع یک است.)

جواب اساسی $\Phi(x)$ برای همه $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده است و در رابطه

$$-\Delta\Phi(x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0$$

صدق می‌کند. در حقیقت جواب اساسی باید در رابطه

$$(2) \qquad -\Delta\Phi(x) = \delta_0$$

صدق کند که δ_0 اندازه دیراک است که در خاصیت زیر صدق می‌کند

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\delta_0(x-y)\,dy = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

با این مفهوم در جلسات آینده تحت عنوان توزیع بیشتر آشنا خواهیم شد.

تمرین - ثابت کنید از رابطه (1) می‌توان نتیجه گرفت که

برای هر تابع $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\Delta\Phi(y)\,dy = -f(x).$$

نکته ۱- جواب اساسی Φ و مشتق آن $\nabla\Phi$ در همسایگی $x=0$ بیکران می‌شوند، اما در هر همسایگی مبدأ انتگرال‌پذیر هستند. (برای $R \leq 1$)

$$\int_{B_R} \Phi(x)\,dx = \int_0^R \int_{\partial B_r} \Phi(x)\,ds\,dr = \begin{cases} \frac{R^2}{2}\left[1-\log R\right] & n=2 \\ \frac{R^2}{2(n-2)} & n \geq 3 \end{cases}$$

$$\int_{B_R} |\nabla\Phi(x)|\,dx = R \qquad n \geq 3$$

دقت کنید مشتق دوم Φ، (یعنی $\partial_{ij}\Phi$) در همسایگی مبدا انتگرال‌پذیر نیست.

$$\partial_{ij}\Phi(x) = \frac{1}{n\alpha(n)}\left[\frac{n x_i x_j}{|x|^{n+2}} - \frac{\delta_{ij}}{|x|^n}\right] \qquad n \geq 2$$

نکته ۲- از رابطه (2) می‌توان الهام گرفت که اگر قرار دهیم

$$(3) \qquad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$$

آنگاه باید

$$-\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta\Phi(x-y) f(y)\, dy = f(x)$$

این مطلب را در گزاره زیر به طور دقیق اثبات می‌کنیم:

گزاره (جواب معادله پواسون) - اگر $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ ، آنگاه تابع u با ضابطه (3) در خواص زیر صدق می‌کند:

(i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

(ii) $-\Delta u = f$ در $\mathbb{R}^n$.

نکته ۳ - معادله $-\Delta u = f$ به معادله پواسون معروف است.

اثبات - (i)

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\, dy$$

برای $h \neq 0$ و بردار $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[\frac{f(x-y+he_i) - f(x-y)}{h} \right] dy$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\, \partial_i f(x-y)\, dy$$

وقتی $h \to 0$ به طور یکنواخت همگرایی بالا برقرار است. (تکیه‌گاه f فشرده است و بنابر نکته ۱ ، تابع Φ انتگرال‌پذیر است.)

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد

$$\partial^2_{ij} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\, \partial^2_{ij} f(x-y)\, dy$$

و عبارت سمت راست یک تابع پیوسته است (چرا؟)

نکته - بنابر نکته ۱ می‌توان نشان داد $\partial_i u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \Phi(x-y) f(y)\, dy$ اما رابطه مشابه برای $\partial^2_{ij} u$ درست نیست، زیرا $\partial_{ij} \Phi$ انتگرال‌پذیر نیست.

(ii) بنابر قسمت (i) داریم:

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\, \Delta f(x-y)\, dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\, \Delta f(x-y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\, \Delta f(x-y)\, dy$$

$$=: I_\varepsilon + J_\varepsilon$$

$$|I_\varepsilon| \leq \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\, dy = \begin{cases} \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \dfrac{\varepsilon^2}{2}\left[1 - \log \varepsilon\right] & n = 2 \\ \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \dfrac{\varepsilon^2}{2(n-2)} & \end{cases}$$

در نتیجه $I_\varepsilon \to 0$ وقتی $\varepsilon \to 0$.

برای تخمین J_ε از فرمول گرین زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_\Omega u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \, \partial_n v \, ds$$

(که $\partial_n v = \nabla v \cdot \vec{n}$ وقتی $\vec{n}$ بردار عمود یکه برونگرای $\partial\Omega$ است.)

$$J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\, \Delta f(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \nabla\Phi \cdot \nabla f(x-y)\, dy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \left(\nabla f(x-y)\cdot \vec{n}\right) ds$$

$$=: K_\varepsilon + L_\varepsilon$$

دقت کنید برای استفاده از فرمول گرین بایدِ مشتقات نسبت به y محاسبه شوند و برای یک مقدار ثابت x، داریم: $\nabla_y [f(x-y)] = -\nabla f(x-y)$

در رابطه بالا $\vec{n}(y) = \frac{-y}{|y|}$ بردار عمود درونگرای ∂B است.

$$|L_\varepsilon| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\, dy = \begin{cases} \|Df\|_{L^\infty} \cdot \varepsilon |\log \varepsilon| & n=2 \\ \|Df\|_{L^\infty} \dfrac{\varepsilon}{n-2} & n \geq 3 \end{cases}$$

و در نتیجه $L_\varepsilon \to 0$ وقتی $\varepsilon \to 0$.

$$K_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \nabla\Phi(y)\,\nabla f(x-y)\,dy = -\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \overset{0}{\cancel{\Delta\Phi(y)}}\, f(x-y)\,dy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (\nabla\Phi\cdot\vec{n})\, f(x-y)\,dy$$

$$= -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\left[\frac{-1}{n\alpha(n)}\,\frac{y}{|y|^n}\cdot\frac{-y}{|y|}\right]dy$$

دقت کنید که در رابطه بالا از تساوی $\Delta\Phi(y)=0$ برای $y\neq 0$ استفاده شده است. در نتیجه

$$K_\varepsilon = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{f(x-y)}{n\alpha(n)\,\varepsilon^{n-1}}\,dy = -\fint_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)\,dy \longrightarrow -f(x)$$

منظور از نماد $\fint$ میانگین انتگرال است، یعنی $\fint_A f = \frac{\int_A f}{|A|}$ و همگرایی بالا به دلیل پیوستگی f برقرار است.

بنابراین نشان دادیم که:

$$\Delta u(x) = I_\varepsilon + J_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -f(x) \quad\Rightarrow\quad -\Delta u(x) = f(x)$$

PDE

۹۸/۱۲/۱۷ جلسه هفتم

خواص توابع هارمونیک (خاصیت مقدار میانگین)

مقدار هر تابع هارمونیک در یک نقطه میانگین مقادیر آن در نقاط اطراف آن است. در واقع

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y$$

که منظور از $\fint_A f$ میانگین تابع f روی مجموعه A است یعنی

$$\fint_A f = \frac{\int_A f}{|A|}$$

پس اگر $\alpha(n)$ حجم گوی واحد در $\mathbb{R}^n$ باشد،

$$\fint_{B(x,r)} u(y)\, dy = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy \,, \qquad \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y$$

قبل از اثبات این خاصیت، ببینیم که چرا باید این رابطه برقرار باشد. اگر $u\in C^2(\Omega)$ و $B_r(x)\subseteq\Omega$ ، آنگاه برای مقادیر خیلی کوچک r مقادیر $\fint_{\partial B(x,r)}[u(y)-u(x)]\,ds_y$ یا $\fint_{B(x,r)}[u(y)-u(x)]\,dy$ متناسب با $\Delta u(x)$ هستند.

در واقع در همسایگی نقطه x می‌توانیم بنویسیم

$$u(x+y)=u(x)+\nabla u(x)\cdot y+\frac{1}{2}y^tD^2u(x)y+o(|y|^2)$$

در نتیجه:

$$\int_{\partial B_r(x)}u\,ds=\int_{\partial B_r(0)}u(x+y)\,ds_y=\int_{\partial B_r(0)}u(x)+\sum_{i=1}^{n}y_i\,\partial_iu(x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}y_iy_j\,\partial_{ij}u(x)+o(|y|^2)\,ds_y$$

$$=u(x)|\partial B_r|+\sum_{i=1}^{n}\left[\partial_iu(x)\int_{\partial B_r(0)}y_i\,ds_y\right]+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\partial_{ij}u(x)\int_{\partial B_r(0)}y_iy_j\,ds_y\right]+o(r^2)|\partial B_r|$$

به علت فرد بودن تابع y_i انتگرال آن صفر است همچنین $\int_{\partial B_r}y_iy_j=0$ اگر $i\neq j$ ، در نتیجه:

$$\fint_{\partial B_r(x)} u-u(x)\,dy = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\partial_{ii}u(x)\fint_{\partial B_r(0)} y_i^2\,ds\right] + o(r^2)$$

از طرفی بنابر تقارن خواهیم داشت :

$$\fint_{\partial B_r} y_i^2\,ds_y = \frac{1}{n}\fint_{\partial B_r} y_1^2+\cdots+y_n^2\,ds_y = \frac{1}{n}\fint_{\partial B_r} r^2\,ds_y = \frac{r^2}{n}$$

$$\Rightarrow \fint_{\partial B_r(x)} u-u(x)\,dy = \frac{r^2}{2n}\sum_{i=1}^{n}\partial_{ii}u(x) + o(r^2) = \frac{r^2}{2n}\Delta u(x) + o(r^2)$$

همچنین به طور مشابه داریم :

$$\fint_{B_r(x)} u(y)-u(x)\,dy = \frac{r^2}{2(n+2)}\Delta u(x) + o(r^2)$$

قضیه - اگر $u \in C^2(\Omega)$ تابع هارمونیک باشد، آنگاه در خاصیت مقدار میانگین صدق می‌کند.

اثبات - قرار دهید:

$$\varphi(r) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\, ds_y = \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, ds_y$$

تغییر متغیر $y = x + rz$

$$= \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, r^{n-1}\, ds_z$$

$$= ⨍_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, ds_z$$

حال از تابع φ نسبت به r مشتق بگیرید:

$$\Rightarrow \varphi'(r) = ⨍_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z\, ds_z = ⨍_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r}\, ds_y$$

دقت کنید $\vec{n} = \frac{y-x}{r}$ بردار عمود یکه برونگرا بر سطح کره است. بنابراین به کمک قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\varphi'(r) = ⨍_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\, ds_y = \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy = 0$$

درنتیجه $\varphi(r)$ یک تابع ثابت است. از طرفی چون u یک تابع پیوسته است،

$$\lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = u(x)$$

لذا برای هر $r>0$ داریم:

$$\Rightarrow u(x) = \varphi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y \,. \qquad (1)$$

برای نشان خاصیت دوم مقدار میانگین (میانگین روی گوی $B(x,r)$) دقت کنید که

$$\int_{B(x,r)} u(y)\, dy = \int_0^1 \int_{\partial B(x,\rho)} u(y)\, dS_y\, d\rho \underset{\text{رابطه (1)}}{=} \int_0^1 u(x)\, n\alpha(n)\rho^{n-1}\, d\rho = \alpha(n)\rho^n\, u(x)$$

عکس خاصیت مقدار میانگین: اگر $u \in C^2(\Omega)$ در خاصیتِ مقدار میانگین صدق کند، یک تابع هارمونیک است.

اثبات - اگر $\Delta u \neq 0$ به عنوان مثال در نقطه x، $\Delta u(x) > 0$ آنگاه به دلیل پیوستگی Δu، گوی به شعاع r وجود دارد که

$\Delta u > 0$ در $B(x,r)$

بنابر اثبات قضیه مقدار میانگین و محاسبات انجام شده

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy > 0$$

که با خاصیت مقدار میانگین تناقض دارد.

نکته - در اثبات بالا تنها از خاصیت میانگین روی سطح استفاده شد. البته به عنوان تمرین نشان دهید که هر دو تعریف خاصیت میانگین، میانگین روی سطح و میانگین روی گوی معادل هستند. همچنین در اثبات خاصیت مقدار میانگین و عکس آن فرض کردیم $u \in C^2$، هرچند تعریف خاصیت مقدار میانگین را بدون فرض مشتق‌پذیری می‌توان بیان کرد. قضیه زیر نشان می‌دهد عکس خاصیت مقدار میانگین تنها با فرض پیوستگی u درست است.

قضیه: اگر $u\in C(\Omega)$ دارای خاصیت مقدار میانگین باشد، آنگاه $u\in C^\infty(\Omega)$ و هارمونیک است.

اثبات- تابع شعاعی $\eta\in C_0^\infty(B_1(0))$ با خاصیت $\int_{B_1(0)}\eta(x)\,dx=1$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $\eta_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ و $u_\varepsilon=u*\eta_\varepsilon$. برای $x\in\Omega$ که $dist(x,\partial\Omega)>\varepsilon$ خواهیم داشت:

$$u_\varepsilon(x)=\int_\Omega u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(x)}u(y)\,\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon\int_{\partial B_r(x)}u(y)\,\bar\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)dS_y\,dr=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon n\alpha(n)r^{n-1}u(x)\,\bar\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)dr$$

فرض کردیم $\eta(x)=\bar\eta(|x|)$ چون η شعاعی است.

خاصیت مقدار میانگین

$$=n\alpha(n)\,u(x)\int_0^1\bar\eta(r)\,r^{n-1}\,dr=u(x)\int_{B_1(0)}\eta(x)\,dx=u(x)$$

$\Rightarrow$ $u_\varepsilon(x)=u(x)$ در مجموعه $\{x\in\Omega: dist(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$

تابع u_ε یک تابع هموار است. در نتیجه $u\in C^\infty$.

نتیجه ـ اگر $u \in C^2(\Omega)$ یک تابع هارمونیک باشد، آنگاه $u \in C^\infty(\Omega)$.

اگر u یک تابع هارمونیک در Ω باشد، آنگاه با انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_\Omega u \, \Delta\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^2(\Omega) \tag{2}$$

به کمک قضیه زیر می‌توانیم رابطه بالا را به عنوان تعریف یک تابع هارمونیک پیوسته (نه لزوماً مشتق‌پذیر) در نظر گرفت.

قضیه ـ اگر $u \in C(\Omega)$ در رابطه (2) صدق کند، آنگاه در Ω هارمونیک است.

اثبات ـ ادعا می‌کنیم که برای هر $B_r(x) \subseteq \Omega$ رابطه زیر برقرار است:

$$r \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS_y = n \int_{B_r(x)} u(y) \, dy \tag{3}$$

درصورت برقرار بودن (3) ، خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS_y\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\alpha(n)r^{n}}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy\right)$$

$$= \frac{-n}{\alpha(n)r^{n+1}}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy + \frac{1}{\alpha(n)r^{n}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS_y \overset{(3)}{=} 0$$

درنتیجه $\displaystyle \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS_y$ یک مقدار ثابت است. اگر $r\to 0$ ، به دلیل پیوستگی u نتیجه می‌شود که این مقدار ثابت ، $u(x)$ است . لذا خاصیت مقدار میانگین برای u برقرار است و درنتیجه یک تابع هارمونیک هموار است. (قضیه قبل)

اکنون ادعا (3) را اثبات می‌کنیم . برای سادگی فرض می‌کنیم $x=0$. قرار دهید

$$\varphi(y,r) = \begin{cases} (|y|^2-r^2)^n & |y|\le r \\ 0 & |y|>r \end{cases}$$

و

$$\varphi_k(y,r) = (|y|^2-r^2)^{n-k}\left[2(n-k+1)|y|^2 + n(|y|^2-r^2)\right] \qquad |y|\le r\ , \quad k=2,3,\dots,n$$

به سادگی می‌توان دید که $\varphi(\cdot,r)\in C_0^2(\Omega)$ و

$$\Delta_y \varphi(y,r) = \begin{cases} 2n\,\varphi_2(y,r) & |y|\le r \\ 0 & |y|>r \end{cases}$$

درنتیجه بنابر (2) خواهیم داشت:

$$\int_{B_r(0)} u(y)\,\varphi_2(y,r)\,dy = 0$$

اکنون به‌صورت استقرایی نشان می‌دهیم که

$$(4) \qquad \int_{B_r(0)} u(y)\,\varphi_k(y,r)\,dy = 0 \qquad k=2,\dots,n$$

فرض کنید (4) برای تعداد $2 \le k < n$ درست باشد. از آن نسبت به r مشتق بگیرید:

$$\int_{\partial B_r(0)} u(y)\,\varphi_k(y,r)\,dy + \int_{B_r(0)} u(y)\,\frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y,r)\,dy = 0$$

برای $2 \le k < n$، $\varphi_k(y,r) = 0$ روی $\partial B_r(0)$. پس

$$\int_{B_r(0)} u(y)\,\frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y,r)\,dy = 0$$

با یک محاسبه ساده می‌توان دید که $\frac{\partial \varphi_k}{\partial r} = -2r(n-k+1)\,\varphi_{k+1}(y,r)$ و در نتیجه (4) برای $k+1$ درست است.

اکنون رابطه (4) را برای $k=n$ بنویسید:

$$\int_{B_r(0)} u(y)\left((n+2)|y|^2 - n r^2\right) dy = 0$$

و نسبت به r مشتق بگیرید تا رابطه (3) به دست بیاید.

PDE

جلسه هشتم

۹۸/۱۲/۱۹

خواص توابع هارمونیک (اصل ماکسیمم و یکتایی جواب)

قضیه ـ اگر $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ تابع هارمونیک باشد و Ω یک مجموعه باز و کران‌دار، آنگاه

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \qquad (i)$$

(ii) اگر Ω همبند باشد و $x_0 \in \Omega$ موجود باشد که $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$، آنگاه u درون Ω ثابت است.

نکته ـ اگر در قضیه بالا را برای تابع $-u$ به کار ببریم، نتیجه مشابه برای min به دست می‌آید. در نتیجه می‌توان گفت که

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

وقتی u یک تابع هارمونیک است.

اثبات ـ فرض کنید $x_0 \in \Omega$ یک نقطه درونی باشد که $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u = M$. برای $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ و به کمک خاصیت مقدار میانگین خواهیم داشت:

$$u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u(y)\,dy \leq \fint_{B_r(x_0)} M\,dy = M$$

درنتیجه رابطه بالا باید تساوی باشد، یعنی $u(y) = M$ برای هر $y \in B_r(x_0)$.

به راحتی می‌توان دید که مجموعه $\{x \in \Omega : u(x) = M\}$ یک مجموعه باز و بسته است و درنتیجه برابر Ω است و u تابع ثابت M روی Ω است.

یک کاربرد مهم از اصل ماکسیمم، اثبات یکتایی جواب معادله پواسون است.

قضیه (یکتایی جواب معادله پواسون). فرض کنید $f \in C(\Omega)$ و $g \in C(\partial\Omega)$ و Ω یک ناحیه باز و کران‌دار است. معادله پواسون زیر حداکثر یک جواب $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ دارد.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

اثبات - اگر u و $\tilde{u}$ در معادله بالا صدق کنند، آنگاه $\omega = u - \tilde{u}$ تابع هارمونیک است با شرط مرزی $\omega = 0$ روی $\partial\Omega$.

بنابر اصل ماکسیمم $\max_{\Omega} |\omega| = \max_{\partial\Omega} |\omega| = 0$. در نتیجه $\omega \equiv 0$ در Ω.

نکته - شرط کران‌دار ناحیه Ω برای اصل ماکسیمم و یکتایی جواب ضروری است. به عنوان مثال قرار دهید $\Omega = \{x_1 > 0\}$

دو تابع $u(x) = x_1$ و $\tilde{u}(x) = 0$ در Ω هارمونیک هستند و هر دو روی $\partial\Omega$ برابر صفر هستند. هرچند در این مثال

تابع u بی‌کران هست ولی مثال بعدی توابع کران‌دار هستند. قرار دهید $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ و $u(x) = |x|^{2-n} - 1$

$\tilde{u}(x) = 0$ دو تابع هارمونیک کران‌دار با شرط مرزی صفر هستند وقتی $3 \leq n$.

نامساوی Harnack :

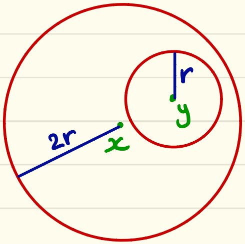
قضیه - فرض کنید u یک تابع هارمونیک مثبت در Ω باشد. آنگاه برای هر زیرمجموعه همبند و فشرده K از Ω ثابت مثبت

$C = C(\Omega, K)$ وجود دارد به طوری که $\sup_K u \leq C \inf_K u$ یا به طور معادل

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y) \qquad \forall x, y \in K$$

اثبات- فرض کنید $r=\frac{1}{4}\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)$. اگر $|x-y|\le r$ آنگاه به کمک قضیه مقدار میانگین

$$u(x)=\fint_{B_{2r}(x)} u(z)\,dz=\frac{1}{\alpha(n)2^n r^n}\int_{B_{2r}(x)} u(z)\,dz \ge \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n}\int_{B_r(y)} u(z)\,dz=\frac{1}{2^n}u(y)$$



چون K فشرده و همبند است می‌توان آن را با متناهی گوی $B_r(x_1)$ ، ... ، $B_r(x_N)$ پوشاند به طوری که $|x_i-x_{i+1}|\le r$. در این صورت هر دو نقطه دلخواه $x,y\in K$ با یک زنجیره به طول حداکثر $N+1$ از این گوی‌ها به هم متصل می‌شوند. در نتیجه می‌توان نشان داد که

$$u(x)\ge\frac{1}{2^{n(N+1)}}u(y)$$

تخمین مشتقات تابع هارمونیک

به کمک خاصیت مقدار میانگین تخمین‌هایی را برای مشتقات یک تابع هارمونیک ارائه می‌کنیم و در نهایت به کمک آنها نشان می‌دهیم که هر تابع هارمونیک یک تابع تحلیلی است.

قضیه: فرض کنید u یک تابع هارمونیک در Ω باشد. آنگاه

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

برای هر گوی $B_r(x_0) \subseteq \Omega$ و هر اندیس چندگانه α از مرتبه $|\alpha| = k$. ضرایب C_k به صورت زیر هستند.

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \qquad C_k = \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\alpha(n)} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

اثبات- اثبات قضیه به صورت استقرایی است. $k=0$ همان خاصیت مقدار میانگین است. برای $k=1$، خاصیت مقدار میانگین را برای تابع هارمونیک $\partial_i u$ به کار می‌بریم:

$$|\partial_i u(x_0)| = \left|\fint_{B_{r/2}(x_0)} \partial_i u(x)\,dx\right| = \frac{2^n}{\alpha(n) r^n}\left|\int_{\partial B_{r/2}(x_0)} u\,\nu_i\,ds\right|$$

$$\le \frac{2n}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))} \qquad (1)$$

در رابطه بالا از نسخه ضعیف قضیه دیورژانس استفاده کردیم که $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ بردار یکه عمود برون‌گرای سطح است و داریم

$$\int_\Omega \partial_i u\,dx = \int_{\partial\Omega} u\,\nu_i\,ds.$$

برای اینکه اثبات را کامل کنیم باید تخمینی برای $\|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))}$ پیدا کنیم. اگر $x \in \partial B_{r/2}(x_0)$ آنگاه $B_{r/2}(x) \subseteq B_r(x_0)$ و در نتیجه

$$|u(x)| \le \left|\fint_{B_{r/2}(x)} u(y)\,dy\right| \le \frac{2^n}{\alpha(n) r^n}\int_{B_{r/2}(x)} |u(y)|\,dy \le \frac{2^n}{\alpha(n) r^n}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

بدین ترتیب قضیه برای $K=1$ اثبات می‌شود.

برای $2 \leq K$ و $|\alpha| = K$ یک اندیس چندگانه β را در نظر بگیرید که $D^\alpha u = \partial_{x_i}(D^\beta u)$. مشابه رابطه (1) می‌توانیم داشته باشیم:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{kn}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B_{r/k}(x_0))}$$

بنابر فرض استقراء حکم قضیه را برای نقطه $x \in \partial B_{r/k}(x_0)$ و گوی $B_{\frac{(k-1)r}{k}}(x)$ می‌نویسیم:

$$|D^\beta u(x)| \leq \frac{C_{k-1}}{\left(\frac{(k-1)}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_{\frac{(k-1)}{k}r}(x))} \leq \frac{C_{k-1}}{\left(\frac{(k-1)}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

$$\Rightarrow \quad |D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{k^{n+k}\, n\, C_{k-1}}{(k-1)^{n+k-1}\, r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

نتیجه: $$|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{C_k\,\alpha(n)}{r^k} \|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))}$$

نتیجه: اگر u یک تابع هارمونیکِ نامنفی در $B_R(x_0)$ باشد آنگاه

$$|Du(x_0)| \le \frac{n}{R} u(x_0)$$

اثبات - تمرین. (مشابه محاسبه رابطه (۱) را انجام دهید و از مثبت بودن u استفاده کنید.)

نتیجه: هر تابع هارمونیک در $\mathbb{R}^n$ که از بالا یا پایین کران‌دار باشد، تابعی ثابت است.

اثبات - تمرین. (ابتدا نشان دهید که کافی است حکم را وقتی $u \ge 0$ است، اثبات کنید. سپس نتیجه قبلی را به کار ببرید.)

قضیه لیوویل (Liouville): هر تابع هارمونیک و کران‌دار روی $\mathbb{R}^n$، تابعی ثابت است.

اثبات - به کمک تخمین مشتق مرتبه اول (اولین نتیجه در بالای صفحه)

$$|Du(x_0)| \le \frac{C_1\alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{\text{وقتی } r\to\infty} 0$$

تذکر - اگر u تابع هارمونیک روی $\mathbb{R}^n$ باشد که رشد چندجمله‌ای دارد، یعنی

$$|u(x)| \leq C\,|x|^m$$

به ازای مقادیر ثابت m و $C > 0$. آنگاه تابع u یک چندجمله‌ای است.

اثبات - تمرین. (نشان دهید $D^\alpha u \equiv 0$ برای $|\alpha| = m+1$.)

نتیجه - فرض کنید $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ و $n \geq 3$. آنگاه هر جواب کران‌دار

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

به صورت

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy + C$$

است برای یک مقدار ثابت C.

اثبات - برای $n \geq 3$ داریم $\Phi(x) \to 0$ وقتی $|x| \to \infty$. درنتیجه $\tilde{u} = \Phi * f$ یک جواب کران‌دار $-\Delta u = f$ است.

و اگر u جواب کران‌دار دیگری باشد، $w = u - \tilde{u}$ تابعی هارمونیک و کران‌دار است و بنابر قضیه لیوویل باید تابع ثابت باشد.

این بخش را با اثبات تحلیلی بودن تابع هارمونیک به پایان می‌رسانیم.

حب یادآوری تابع $u \in C^{\infty}$ در نقطه x_0 تحلیلی است، هرگاه در یک همسایگی x_0 برابر سری تیلور خود باشد، یعنی برای $|x-x_0|<r$

$$u(x) = \sum_{\alpha} \frac{D^{\alpha}u(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^{\alpha}$$

که $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ یک اندیس چندگانه است و

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n! \quad , \qquad y^{\alpha} = y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n}$$

قضیه- هر تابع هارمونیک در ناحیه Ω، تحلیلی است.

اثبات- اگر تابع u را با چندجمله‌ای تیلور مرتبه $N-1$ تقریب بزنیم، مانده آن برای یک مقدار $0<t<1$ به صورت زیر است:

$$R_N(x) = u(x) - \sum_{|\alpha|\le N-1} \frac{D^{\alpha}u(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^{\alpha}u(tx+(1-t)x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^{\alpha}$$

ایده اثبات تحلیلی بودن در نقطه x_0 این است که نشان دهیم برای یک مقدار $r>0$ و همه نقاط $|x-x_0|<r$، $R_N(x) \to 0$ وقتی $N\to\infty$.

برای این منظور از تخمینهای مشتقات تابع هارمونیک استفاده می‌کنیم. اگر شعاع همگرایی سری تیلور را r بگیریم که بعداً مقدار آن را

مشخص کنیم، باید $|D^\alpha u(x)|$ را به ازای $|x-x_0|<r$ تخمین بزنیم. حال قضیه تخمین مشتقات تابع هارمونیک را

برای شعاع r_1 به کار می‌بریم. (مقدار r_1 را بعداً تعیین می‌کنیم به گونه‌ای که $B_{r+r_1}(x_0)\subseteq\Omega$)

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_N}{r_1^{n+N}} \|u\|_{L^1(B_{r_1}(x))} \leq \frac{(2^{n+1}nN)^N}{\alpha(n)\, r_1^{n+N}} \|u\|_{L^1(B_{r+r_1}(x_0))}$$

که $|\alpha|=N$.

$$\Rightarrow |R_N(x)| \leq \sum_{|\alpha|=N} \frac{(2^{n+1}nN)^N}{\alpha(n)\, r_1^{n+N}} \|u\|_{L^1} \cdot \frac{|x-x_0|^N}{\alpha!}$$

با توجه به رابطه $\displaystyle n^N=(1+\cdots+1)^N=\sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}$، همچنین نامساوی $\dfrac{N^N}{N!}<e^N$ خواهیم داشت:

$$|R_N(x)| \leq \frac{\|u\|_{L^1}}{\alpha(n)\, r_1^n} \left(\frac{2^{n+1}n^2 e r}{r_1}\right)^N \longrightarrow 0$$

بنابراین کافی است r و r_1 به گونه‌ای انتخاب شوند که $\dfrac{r}{r_1}<\dfrac{1}{2^{n+1}n^2e}$ و $r+r_1<dist(x_0,\partial\Omega)$.

PDE

۹۸/۱۲/۲۴ جلسه نهم

تابع گرین :

در جلسه ششم دیدیم که جواب معادله

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n$$

به صورت

$$u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$$

که Φ جواب اساسی معادله لاپلاس است.

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

هدف این است که بتوانیم نمایشی برای جواب‌های معادله پواسون با شرط مرزی به دست آوریم:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

اگر محاسبات جلسه ششم را تکرار کنیم، برای یک تابع $u \in C^2(\Omega)$ و نقطه ثابت $x \in \Omega$ فرمول گرین را برای توابع $u(y)$ و $\Phi(x-y)$

به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} u(y)\,\cancel{\Delta\Phi(x-y)}^{\,0} - \Delta u(y)\,\Phi(x-y)\,dy = \int_{\partial\Omega} u(y)\,\partial_\nu\Phi(x-y) - \partial_\nu u(y)\,\Phi(x-y)\,dS_y$$

$$- \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\,\partial_\nu\Phi(x-y) - \partial_\nu u(y)\,\Phi(x-y)\,dS_y$$

$\vec{\nu}$ بردار یکه عمود گرا بر سطح است. در $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ داریم $\Delta\Phi(x-y) = 0$. از طرف دیگر

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_\nu u(y)\,\Phi(x-y)\,dS_y \right| \le \begin{cases} C\|Du\|_{L^\infty}\,\varepsilon \log\varepsilon & n=2 \\ C\|Du\|_{L^\infty}\,\varepsilon \end{cases} \longrightarrow 0 \quad \text{وقتی } \varepsilon \to 0$$

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\,\partial_\nu\Phi(x-y)\,dS_y = ⨍_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\,dS_y \longrightarrow u(x) \quad \text{وقتی } \varepsilon \to 0$$

درنتیجه با میل دادن $\varepsilon \to 0$ خواهیم داشت:

$$(2) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(y)\,\Phi(x-y) - u(y)\,\partial_\nu \Phi(x-y)\,ds_y - \int_{\Omega} \Delta u(y)\,\Phi(x-y)\,dy$$

هرچند رابطه بالا یک نمایش برای هر تابع $u \in C^2(\Omega)$ است اما برای حل معادله پواسون (1) کافی نیست چرا که رابطه بالا به اطلاعات u و $\partial_\nu u$ روی مرز $\partial\Omega$ احتیاج دارد. ولی در معادله پواسون با شرط مرزی دیریکله تنها مقدار u روی $\partial\Omega$ مشخص است.

ایده اصلی این است که نمایش بالا را به گونه‌ای تغییر دهیم تا جمله $\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \cdot \Phi(x-y)\,ds_y$ ظاهر نشود.

اگر بتوانیم به جواب اساسی بتوانیم برای هر نقطه $x \in \Omega$ تابع $G(x,y)$ را پیدا کنیم که

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta_y G(x,y) = \delta(x-y) & \text{in } \Omega \\ G(x,y) = 0 & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

آشنایی با کمک فرمول گرین می‌توانیم نمایشی برای جواب معادله پواسن به صورت زیر ارائه کنیم:

$$\int_{\Omega} \underbrace{\Delta u(y)}_{f(y)} \cdot G(x,y) - u(y) \underbrace{\Delta_y G(x,y)}_{\delta(x-y)} \, dy = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(y) \underbrace{G(x,y)}_{=0} - \underbrace{u(y)}_{g(y)} \partial_\nu G(x,y) \, dS_y$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \int_{\Omega} u(y) \, \delta(x-y) \, dy = -\int_{\Omega} u(y) \, \Delta_y G(x,y) \, dy$$

$$= \int_{\Omega} f(y) G(x,y) dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \, \partial_\nu G(x,y) \, dS_y \qquad (4)$$

هرچند نه معادله (3) و نه محاسبات بالا در حال حاضر معنای دقیقی برای ما ندارد، ولی ایده‌ای برای حل معادله پواسون (1) ارائه می‌کند.
به تابع G که در معادله (3) صدق می‌کند تابع گرین گفته می‌شود. در ادامه خواهیم دید که چگونه می‌توان آن را با اطلاعات فعلی به صورت دقیق تعریف کنیم.

اگر برای هر نقطه ثابت $x\in\Omega$ قرار دهیم:

$$\phi^x(y) := \Phi(x-y) - G(x,y)$$

باید ϕ^x در معادله زیر صدق کند:

$$(5)\quad \begin{cases} -\Delta_y \phi^x = 0 & \text{in } \Omega \\ \phi^x(y) = \Phi(x-y) & y\in\partial\Omega \end{cases}$$

در نتیجه می‌توان تابع گرین $G(x,y)$ را به کمک توابع $\phi^x(y)$ تعریف کنیم. یعنی تابع گرین با ضابطه

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \phi^x(y)$$

تعریف می‌شود. این تعریف تابع گرین بدون ابهام است. اگر فرمول گرین را برای ϕ^x و u بنویسیم:

$$\int_\Omega \Delta u(y)\,\phi^x(y) - u(y)\,\cancel{\Delta\phi^x}_{0}(y)\,dy = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(y)\,\underbrace{\phi^x(y)}_{\Phi(x-y)} - u(y)\,\partial_\nu\phi^x(y)\,dS_y$$

اکنون این رابطه را با (2) جمع کنید تا رابطه (4) حاصل شود.

نکته - به تابع $\partial_\nu G(x,y)$ در رابطه (4) هسته پواسون گفته می‌شود. با جایگذاری تابع $u(x)\equiv 1$ می‌توان دید که

$$-\int_{\partial\Omega} \partial_\nu G(x,y)\, dy = 1 \qquad \forall x \in \Omega$$

اگر آن را با $K(x,y) = -\partial_\nu G(x,y)$ نشان دهیم. آنگاه از فرمول (4) نتیجه می‌شود که

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x,y)\, g(y)\, dS_y$$

جواب معادله زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

قضیه- $G(x,y)=G(y,x)$ برای هر $x,y\in\Omega$.

اثبات- برای $x\neq y$ قرار دهید: $v(z):=G(x,z)\ ,\quad w(z):=G(y,z)$

$$\Rightarrow\ \Delta v=0\quad \text{for } z\neq x\ ,\quad \Delta w=0\quad \text{for } z\neq y$$

به‌علاوه $v=w=0$ روی $\partial\Omega$. حال فرمول گرین را برای v و w در ناحیه $\Omega-(B_\varepsilon(x)\cup B_\varepsilon(y))$ بنویسید. با توجه به شرایطی که ذکر شد خواهیم داشت:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_\nu w\cdot v-w\,\partial_\nu v\ ds_z=\int_{\partial B_\varepsilon(y)} w\,\partial_\nu v-\partial_\nu w\ v\ ds_z \qquad (6)$$

دقت کنید $v(z)=G(x,z)=\Phi(x-z)-\phi^x(z)$ و ϕ^x تابع هارمونیک و درنتیجه هموار است. بنابراین v در همسایگی x مانند $\Phi(x-z)$ رشد می‌کند ($|x-z|^{2-n}$ در $n\geq 3$ ، $-\log|x-z|$ در $n=2$). به‌علاوه تابع $w(z)$ در همسایگی x هموار است. لذا

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_\nu w(z)\, v(z)\, ds_z \right| \le C\varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B_\varepsilon(x)} |v| = \begin{cases} C\varepsilon & n\ge 3 \\ -C\varepsilon\log\varepsilon & n=2 \end{cases} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\, \partial_\nu v(z)\, ds_z = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\, \partial_\nu \Phi(x-z)\, ds_z = \lim_{\varepsilon\to 0} \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\, ds_z = w(x)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که سمت راست (6) وقتی $\varepsilon \to 0$ به $v(y)$ همگرا است. در نتیجه

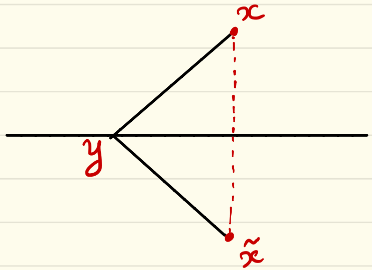
$$w(x) = v(y) \implies G(y,x) = G(x,y)$$

تابع گرین در نیم فضا :

$$\mathbb{R}^n_+ = \{ x=(x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n \;:\; x_n>0 \}$$

برای پیدا کردن تابع گرین باید معادله زیر را حل کنیم :

$$\begin{cases} -\Delta_y \phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \phi^x(y) = \Phi(x-y) & y\in\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x \;:\; x_n=0\} \end{cases}$$



اگر $\tilde{x}$ را انعکاس نقطه x نسبت به $\partial\mathbb{R}^n_+$ در نظر بگیریم، یعنی

$$\tilde{x} = (x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)$$

آنگاه برای هر $y\in\partial\mathbb{R}^n_+$ داریم $|y-x| = |y-\tilde{x}|$ و $\Phi(y-\tilde{x})$ جواب معادله بالا است. (چرا؟)

در نتیجه تابع گرین $\mathbb{R}^n_+$ برابر است با :

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})$$

بردار یکه عمود برون‌سو بر مرز $\mathbb{R}^n$ برابر $-e_n$ است . در نتیجه هسته پواسون برابر است با

$$K(x,y) = -\partial_\nu G(x,y) = \partial_{y_n} G(x,y) \qquad x\in\mathbb{R}^n_+ \;,\; y\in\partial\mathbb{R}^n_+$$

$$\Rightarrow K(x,y) = \partial_n \Phi(y-x) - \partial_n \Phi(y-\tilde{x})$$

$$= \frac{-1}{n\alpha(n)} \left[\frac{y_n - x_n}{|y-x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y-\tilde{x}|^n} \right] = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{2x_n}{|y-x|^n}$$

در نتیجه جواب معادله

$$(7) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$(8) \quad u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \, dy \qquad x \in \mathbb{R}^n_+$$

دقت کنید با فرض اینکه $u \in C^2$ جواب معادله پواسون است توانستیم رابطه (4) را به دست آوریم یا به عنوان مثال رابطه (8) بیان می‌کند که همه جواب‌های (7) باید به این صورت باشد. قضیه زیر عکس این مطلب را نشان می‌دهد.

قضیه: فرض کنید $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ و تابع u با رابطه (8) تعریف شده باشد. در این صورت

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$

(ii) $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$

(iii) برای هر $x^0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ داریم
$$\lim_{\mathbb{R}^n_+ \ni x \to x^0} u(x) = g(x^0)$$

اثبات- بنابر تعریف تابع گرین برای هر $x \in \mathbb{R}^n_+$ ثابت تابع $y \longmapsto G(x,y)$ به غیر از نقطه $y = x$ در بقیه نقاط هارمونیک است.

خاصیت تقارن تابع گرین $G(x,y) = G(y,x)$ نشان می‌دهد $x \longmapsto G(x,y)$ نیز چنین است و همچنین $x \longmapsto K(x,y) = -\partial_n G(x,y)$

وقتی $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ در سرتاسر $\mathbb{R}^n_+$ هارمونیک است. در نتیجه $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ و

$$\Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta_x K(x,y)\, g(y)\, dy = 0$$

(شرایط جابجایی مشتق و انتگرال را بررسی کنید)

کران داری تابع u از کران داری g و خاصیت $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,dy = 1$ نتیجه می‌شود.

برای اثبات قسمت (iii) به دلیل پیوستگی g مقدار $\delta>0$ را انتخاب کنید به طوری که $|g(y)-g(x^0)|<\epsilon$ برای $|y-x^0|<\delta$. آنگاه

$$|u(x)-g(x^0)| = \left| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,[g(y)-g(x^0)]\,dy \right|$$

$$\leq \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_\delta(x^0)} K(x,y)\,|g(y)-g(x^0)|\,dy + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x^0)} K(x,y)\,|g(y)-g(x^0)|\,dy$$

$$= I + J$$

$$I \leq \epsilon \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,dy = \epsilon$$

برای تخمین J وقتی $x \to x^0$ فرض کنید $|x-x^0|<\delta/2$. چون در این حالت $y \in \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x^0)$ است پس

$$|y-x^0| > \delta \implies |y-x^0| \leq |y-x| + |x-x^0| < |y-x| + \delta/2 < |y-x| + \tfrac{1}{2}|y-x^0|$$

$$\Rightarrow \quad |y-x| \geq \frac{1}{2}|y-x^\circ|$$

$$J = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x^\circ)} K(x,y)\,|g(y)-g(x^\circ)|\,dy \leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x^\circ)} K(x,y)\,dy$$

$$\leq \frac{2x_n \|g\|_\infty}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x^\circ)} \frac{dy}{|x-y|^n} \leq \frac{2^{n+1} x_n \|g\|_\infty}{n\alpha(n)} \underbrace{\int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x^\circ)} \frac{dy}{|y-x^\circ|^n}}_{\text{این انتگرال کران‌دار است}}$$

درنتیجه وقتی $x_n \to 0$ خواهیم داشت $J \to 0$. لذا

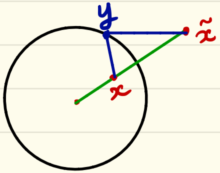
$$\limsup_{x \to x^\circ} |u(x)-g(x^\circ)| \leq \epsilon$$

و ϵ یک مقدار دلخواه بود.

تابع گرین برای گوی $B_1(0)$

به طور مشابه باید معادله زیر را برای هر $x\in B_1$ حل کنیم.

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0 & \text{in } B_1 \\ \phi^x(y) = \Phi(x-y) & y\in \partial B_1 \end{cases}$$



اگر قرار دهیم $\tilde{x} = \dfrac{x}{|x|^2}$ آنگاه $|y-\tilde{x}|\cdot|x| = |y-x|$

به وضوح $\Phi(|x|(y-\tilde{x}))$ جواب معادله بالا است. (چرا؟) و تابع گرین عبارت خواهد بود از:

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x}))$$

بردار عمود یکه رو به بیرون بر سطح گوی برابر $\vec{\nu}(y) = y$ است و هسته پواسون برابر

$$K(x,y) = -\partial_\nu G(x,y) = -\nabla_y G \cdot y$$

$$\partial_{y_i}\Phi(y-x) = \frac{-1}{n\alpha(n)}\,\frac{y_i-x_i}{|y-x|^n}$$

$$\partial_{y_i}\left[\Phi(|x|(y-\bar{x}))\right] = \frac{-1}{n\alpha(n)}\,\frac{|x|^2(y_i-\bar{x}_i)}{(|x|\,|y-\bar{x}|)^n} = \frac{-1}{n\alpha(n)}\,\frac{y_i|x|^2-x_i}{|y-x|^n}$$

$$\Rightarrow K(x,y) = \frac{1}{n\alpha(n)}\cdot\frac{1}{|y-x|^n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i(y_i-x_i)-y_i(y_i|x|^2-x_i)\right]$$

$$= \frac{1}{n\alpha(n)}\,\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}$$ (دقت کنید $|y|=1$)

درنتیجه

(9) $$u(x) = \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)}\int_{\partial B_1}\frac{g(y)}{|y-x|^n}\,dS_y \qquad x\in B_1$$

جواب معادله زیر است: (اثبات - تمرین)

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_1 \\ u = g & \text{on } \partial B_1 \end{cases}$$

برای اینکه هسته پواسون را در گوی به شعاع $B_r(0)$ ، می‌سنجیم تا بتوانیم معادله زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_r \\ u = g & \text{on } \partial B_r \end{cases}$$

قرار دهید $\tilde{u}(x) = u(rx)$ و $\tilde{g}(x) = g(rx)$ در این صورت
$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 0 & \text{in } B_1 \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{on } \partial B_1 \end{cases}$$

بنابر رابطه (9) نتیجه می‌شود که

$$u(rx) = \tilde{u}(x) = \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B_1} \frac{\tilde{g}(y)}{|y-x|^n}\, dS_y$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{r^2-|x|^2}{rn\alpha(n)} \int_{\partial B_r} \frac{g(y)}{|y-x|^n}\, dS_y \qquad x \in B_r(0) \qquad (10)$$

نکته: در رابطه (10) قرار دهید $x=0$. آنگاه خاصیت مقدار میانگین تابع هارمونیک نتیجه خواهد شد:

$$u(0) = \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B_r} g(y)\, dS_y$$

نتیجه دیگری از فرمول انتگرال پواسون (۱۰) اثبات دیگری برای نامساوی هارنک است.

گزاره: اگر تابع u در $B_R(x_0)$ هارمونیک باشد و $u \geq 0$. آنگاه

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r}\, u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}\, u(x_0)$$

که $r = |x - x_0| < R$.

اثبات - فرض کنید $x_0 = 0$ و فرمول انتگرال پواسون (۱۰) را بنویسید.

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{|y-x|^n}\, dS_y$$

وقتی $|y| = R$ می‌دانیم که $R - |x| \leq |y - x| \leq R + |x|$ در نتیجه

$$\frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)} \cdot \frac{1}{(R+|x|)^n} \int_{\partial B_R} u(y)\, dS_y \leq u(x) \leq \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)} \cdot \frac{1}{(R-|x|)^n} \int_{\partial B_R} u(y)\, dS_y$$

اکنون به کمک خاصیت مقدار میانگین اثبات کامل می‌شود.

نکته- در اثبات قبل و در استفاده از فرمول انتگرال پواسون فرض کرده ایم که $u \in C(\overline{B}_R)$. هو صدای این فرض در گزاره ذکر نشده و لزومی هم

ندارد که برقرار باشد ولی از همواری توابع هارمونیک می‌توانیم فرض کنیم $u \in C(\overline{B}_{R'})$ برای هر $R' < R$ و گزاره را برای R' به جای R

اثبات کنیم. سپس با ثابت نگه داشتن x و y اجازه دهیم $R' \to R$.

تمرین- به کمک گزاره قبل و میل دادن $R \to +\infty$ ثابت کنید هر تابع هارمونیک در $\mathbb{R}^n$ که از بالا یا پایین کران‌دار باشد، تابعی ثابت است.

PDE

جلسه دهم ۹۸/۱۲/۲۶

روشهای انرژی

در جلسات گذشته با فرض اینکه تابع u در یک معادله دیفرانسیل صدق می‌کرد، خواص از آن را بررسی کردیم. در این جلسه به روش انرژی وجود جواب معادله پواسون را ثابت می‌کنیم و به کمک این روش خواص دیگری از توابع هارمونیک را خواهیم دید.

مسئله پواسون $\qquad$ (1)
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

تابع انرژی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I[w] := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - f w \, dx$$

که روی مجموعه زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{A} = \{ w \in C^2(\overline{\Omega}) \; : \; w = g \text{ on } \partial\Omega \}$$

قضیه. اگر $u \in C^2(\bar{\Omega})$ در معادله (1) صدق کند، آنگاه

$$(2) \qquad I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$$

برعکس، اگر $u \in \mathcal{A}$ جواب مسأله بهینه‌سازی (2) باشد، آنگاه u جواب (1) است.

اثبات ـ اگر $u \in C^2(\bar{\Omega})$ جواب (1) باشد و $w \in \mathcal{A}$ دلخواه، آنگاه معادله (1) را در $(u-w)$ ضرب می‌کنیم:

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u-w)\,dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (u-w) - f(u-w)\,dx - \int_{\partial\Omega} \partial_n u \cdot \underbrace{\cancel{(u-w)}}_{0}\,ds$$

(دقت کنید $u=w=g$ روی $\partial\Omega$)

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 - fu\,dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w - fw\,dx \leq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw\,dx$$

$$\Rightarrow \qquad I[u] \leq I[w]$$

چون $w \in \mathcal{A}$ دلخواه بود، قسمت اول قضیه اثبات می‌شود.

برعکس اگر I کمترین مقدار خود را روی $\mathcal{A}$ در u بگیرد، آنگاه برای هر تابع دلخواه $v\in C_0^\infty(\Omega)$ و $t\in\mathbb{R}$، داریم $u+tv\in\mathcal{A}$

و

$$i(t) = I[u+tv]$$

می‌نیمم خود را در $t=0$ گرفته است. در نتیجه $i'(0)=0$ و

$$\Rightarrow \quad i'(t) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla(u+tv)|^2 - f(u+tv)\,dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + t|\nabla v|^2 - fv\,dx$$

$$\Rightarrow \quad 0 = i'(0) = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v - fv\,dx = \int_\Omega(-\Delta u - f)v\,dx + \int_{\partial\Omega}\partial_n u\cdot\underset{0}{\cancel{v}}\,ds$$

چون تساوی $0=\int_\Omega(-\Delta u-f)v\,dx$ به ازای هر $v\in C_0^\infty(\Omega)$ برقرار است در نتیجه

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

نکته- در قضیه قبل با فرض اینکه I می‌نیمم خود را روی $\mathcal{A}$ اتخاذ می‌کند، وجود جواب معادله پواسون (1) را اثبات کردیم. چنین مطلبی برای توابع دلخواه f و g لزوماً درست نیست. همین نکته دلیل پیدایش فضاهای سوبولف شدند که در جلسات بعد با آنها آشنا خواهیم شد.

هر چند یکتایی جواب معادله پواسون را به کمک اصل ماکسیمم قبلاً دیده‌ایم، در اینجا اثبات دیگری به کمک روش انرژی ارائه خواهیم داد.

قضیه ۲ مسأله (1) حداکثر یک جواب در $C^2(\bar{\Omega})$ دارد.

اثبات- فرض کنید u و $\tilde{u}$ دو جواب (1) باشند و $\omega = u - \tilde{u}$. آنگاه $\Delta\omega = 0$ در Ω و

$$0 = -\int_\Omega \omega \Delta\omega \, dx = \int_\Omega |\nabla\omega|^2 \, dx \Rightarrow \nabla\omega = 0 \text{ in } \Omega$$

در نتیجه ω روی Ω تابعی ثابت است و چون $\omega = 0$ روی $\partial\Omega$ آنگاه $\omega = 0$ در Ω.

نکته- اگر $u \in C^1(\Omega)$ تابع هارمونیک باشد، با انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود که

$$\text{(3)} \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

هر چند این رابطه را می‌توان تعبیر ضعیف تابع هارمونیک دانست ولی بنابر آخرین قضیه جلسه $\underline{V}$ می‌دانیم که هر تابع u که در (3) صدق کند، یک تابع هارمونیک و هموار است.

دقت کنید که تابع انرژی متناظر معادله لاپلاس $-\Delta u = 0$ عبارتست از $I[v] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ و اگر I می‌نیمم خود را
در $\mathcal{A} = \{v \in C^1(\Omega) : v = g \text{ on } \partial\Omega\}$ به ازای u اتخاذ کند، u در رابطه (3) صدق می‌کند.

لم ۳ (نامساوی Caccioppoli) فرض کنید $u \in C^1(\Omega)$ در رابطه (3) صدق کند. در این صورت برای هر تابع $\eta \in C_0^1(\Omega)$ خواهیم داشت:

$$\int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 dx \leq 4 \int_\Omega |\nabla \eta|^2 u^2 dx$$

اثبات- در (3) قرار دهید $\varphi = \eta^2 u$. آنگاه

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 + 2\eta u \nabla \eta \cdot \nabla u \, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega 2|\eta| \cdot |u| \cdot |\nabla \eta| |\nabla u| \, dx \underset{\text{نامساوی هولدر}}{\leq} 2\left[\int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 dx\right]^{1/2} \left[\int_\Omega u^2 |\nabla \eta|^2 dx\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 dx \leq 4 \int_\Omega u^2 |\nabla \eta|^2 dx$$

نتیجه ۴. فرض کنید $u\in C^1(B_1)$ در رابطه (3) برای $\Omega=B_1$ صدق کند. آنگاه برای هر $0\le r<R\le 1$ خواهیم داشت:

$$\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx \le \frac{8}{(R-r)^2}\int_{B_R} u^2\,dx$$

اثبات- تابع η در لم قبل را تابعی در نظر بگیرید که $\eta=1$ روی B_r و $\eta=0$ خارج B_R و $|\nabla\eta|\le\frac{2}{R-r}$.

تعریف- در اثبات گزاره بعدی از نامساوی پوانکاره استفاده خواهیم کرد که به دو صورت زیر است. اثبات آنها را در مطالب آینده در فصل فضای سوبولف خواهیم دید. در این نامساویها ثابت C تنها به Ω وابسته است.

$$\int_{\Omega} u^2\,dx \le C\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx \qquad \forall\, u\in C_0^1(\Omega)$$

$$\int_{\Omega}|u-(u)_\Omega|^2\,dx \le C\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx \qquad \forall\, u\in C^1(\Omega)$$

که $(u)_\Omega=\fint_\Omega u(x)\,dx$. در نامساوی دوم احتیاجی نیست که u روی مرز صفر شود. در اثبات گزاره بعدی نامساوی اول را برای $\Omega=B_R$ و نامساوی دوم را برای $\Omega=B_R\setminus B_{R/2}$ استفاده می‌کنیم که در هر دو حالت $C=C(n)R^2$ است.

نتیجه ۵ اگر u تابع ذکر در نتیجه ۴ باشد، آنگاه برای هر $0<R\le 1$

$$\int_{B_{R/2}} u^2\,dx \le \theta \int_{B_R} u^2\,dx \quad , \quad \int_{B_{R/2}} |\nabla u|^2\,dx \le \theta \int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx$$

که $\theta\in(0,1)$ تنها به n، بعد فضا وابسته است.

اثبات - $\eta\in C_0^1(B_R)$ را تابعی بگیرید که $\eta=1$ روی $B_{R/2}$ و $|\nabla\eta|\le\frac{2}{R}$. آنگاه

$$|\nabla(\eta u)|^2 = |\eta\nabla u + u\nabla\eta|^2 \le 2\left[\eta^2|\nabla u|^2 + u^2|\nabla\eta|^2\right]$$

آنگاه بنابر نامساوی Caccioppoli داریم:

$$\int_{B_R} |\nabla(\eta u)|^2\,dx \le 10\int_{B_R} |\nabla\eta|^2 u^2\,dx = \frac{10}{R^2}\int_{B_R\setminus B_{R/2}} u^2\,dx$$

در رابطه بالا از اینکه $\nabla\eta=0$ روی $B_{R/2}$ استفاده کردیم. اکنون از نامساوی پوانکاره استفاده کنید

$$\int_{B_{R/2}} u^2\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \eta=1 \text{ روی } B_{R/2}}}{\le} \int_{B_R} \eta^2u^2\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{پوانکاره}}}{\le} C(n)R^2\int_{B_R}|\nabla(\eta u)|^2\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{رابطه بالا}}}{\le} 10\,C(n)\int_{B_R\setminus B_{R/2}} u^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{B_{R/2}} u^2\,dx \leq \frac{10\,C(n)}{10\,C(n)+1}\int_{B_R} u^2\,dx$$

برای اثبات رابطه دوم در لم ۳ به جای u قرار دهید $u-a$ که a یک ثابت است.

$$\int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2\,dx \leq 4\int_{B_R} |\nabla \eta|^2 (u-a)^2\,dx \leq \frac{8}{R^2}\int_{B_R\setminus B_{R/2}} (u-a)^2\,dx$$

اگر قرار دهیم $a = \fint_{B_R\setminus B_{R/2}} u\,dx$ و از نامساوی پوانکاره استفاده کنیم، نتیجه می‌شود

$$\int_{B_{R/2}} |\nabla u|^2\,dx \leq \int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2\,dx \leq 8\,C(n)\int_{B_R\setminus B_{R/2}} |\nabla u|^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{B_{R/2}} |\nabla u|^2\,dx \leq \frac{8C(n)}{8C(n)+1}\int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx$$

تمرین - به کمک گزاره قبل ثابت کنید اگر u یک تابع هارمونیک در $\mathbb{R}^n$ باشد که $\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx < \infty$ آن‌گاه $u \equiv 0$.

یا اگر $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < \infty$ آن‌گاه u یک تابع ثابت است.

نکته - از گزاره قبل می‌توان نامساوی‌های زیر را برای $0 < \rho < r \leq 1$ نتیجه گرفت:

$$\int_{B_\rho} u^2 \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu} \int_{B_r} u^2 \quad , \quad \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu} \int_{B_r} |\nabla u|^2$$

که $C=C(n)$ و $\mu=\mu(n)$ ثابت‌هایی وابسته به n هستند. برای اثبات این نامساوی‌ها فرض کنید برای $k \in \mathbb{N}$ داریم $2^{k-1}\rho < r \leq 2^k \rho$، آن‌گاه با تکرار نتیجه گزاره قبل خواهیم داشت:

$$\int_{B_\rho} u^2 \leq \theta^{k-1} \int_{B_{2^{k-1}\rho}} u^2 \leq \theta^{k-1} \int_{B_r} u^2$$

از طرفی $\log\left(\frac{r}{\rho}\right) \leq k \log 2$. در نتیجه

$$\theta^{k-1} \leq \theta^{-1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{-\frac{\log \theta}{\log 2}}$$

لذا نامساوی بالا برای $C = \theta^{-1}$ و $\mu = -\frac{\log\theta}{\log 2}$ برقرار است.

گزاره بعد نشان می‌دهد که این نامساوی برای $\mu = n$ نیز درست است.

گزاره ۶ اگر $u \in C^1(B_1)$ در رابطه (3) صدق کند، آنگاه برای $0 < \rho \le r$ داریم:

$$\int_{B_\rho} u^2 \le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} u^2$$

$$\int_{B_\rho} |u-u(0)|^2 \le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r} |u-u(0)|^2$$

که ثابت C تنها به n وابسته است.

اثبات - برای سادگی می‌توانیم فرض کنیم $r=1$ (چرا؟). همچنین اگر $C \ge 2^n$ نامساوی‌های بالا برای $\frac{1}{2} \le \rho \le 1$ بدیهی خواهد بود.

پس فرض می‌کنیم $0 < \rho < \frac{1}{2}$. چون u تابع هارمونیک است بنابر خاصیت مقدار میانگین و تخمین مشتقات تابع هارمونیک داریم:

$$\|u\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} + \|Du\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} \le c\int_{B_1} |u|^2\, dx$$

در نتیجه برای $\rho<\frac{1}{2}$ داریم

$$\int_{B_\rho} u^2\, dx \le \rho^n \|u\|^2_{L^\infty(B_{1/2})} \le c\rho^n \int_{B_1} |u|^2\, dx$$

که نامساوی اول را اثبات می‌کند.

$$\int_{B_\rho} |u-u(0)|^2\, dx \le \int_{B_\rho} |x|^2 \|Du\|^2_{L^\infty(B_{1/2})}\, dx \le c\rho^{n+2}\int_{B_1} |u|^2\, dx$$

تابع $u-u(0)$ نیز یک تابع هارمونیک است و روابط بالا برای آن برقرار است. با جایگذاری $u-u(0)$ به جای u نامساوی دوم اثبات می‌شود.