کنترل بهینه

جلسه سیزدهم ۹۸/۸/۱۸

یادآوری :

$$
(SEP)\quad
\begin{cases}
-\Delta y + c_0(x)\, y + d(x,y) = f & \text{in } \Omega \\[2ex]
\partial_n y + \alpha(x)\, y + b(x,y) = g & \text{on } \partial\Omega
\end{cases}
$$

مسأله شبه‌خطی فوق با فرضیات زیر جواب یکتای پیوسته دارد.

(H1) توابع $d(x,y): \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $b(x,y): \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر و کراندار هستند.
به علاوه برای تقریباً هر x ، نسبت به y پیوسته و صعودی هستند.

(H2) $d(x,0) = 0$ و $b(x,0) = 0$ برای تقریباً هر x .

(H3) توابع c_0 و α نامنفی اندازه‌پذیر و کراندار هستند به علاوه تقریباً همه‌جا نامنفی هستند. همچنین فرض می‌کنیم همزمان هر دو تابع صفر نباشند یعنی $0 < \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)}$.

به علاوه ثابت c مستقل از d و b وجود دارد که تخمین زیر برای $r > \frac{N}{2}$ و $s > N-1$ برقرار باشد:

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} + \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left[\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\partial\Omega)}\right] \qquad (1)$$

اگر شرط $(H2)$ را حذف کنیم، نتیجه قبل برقرار است و در نامساوی بالا به جای f و g باید به ترتیب $f - d(x,0)$ و $g - b(x,0)$ را قرار دهیم.

اگر شرط $(H1)$ فرض کران داری توابع $b(x,y)$ و $d(x,y)$ را حذف کنیم نتیجه همچنان برقرار است.

اثبات - برای هر ثابت $0 < K$ تعریف کنید:

$$d_k(x,y) = \begin{cases} d(x,K) & y > k \\ d(x,y) & |y| \leq K \\ d(x,-K) & y < -K \end{cases}$$

و به طور مشابه تابع $b_k(x,y)$ تعریف می‌شود.

توابع d_k و b_k کران دار هستند و در شرط (H1) صدق می‌کنند. در نتیجه معادله زیر جواب یکتا دارد:

$$(2)\quad \begin{cases} -\Delta y + c_0 y + d_k(x,y) = f & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha y + b_k(x,y) = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

به علاوه جواب در نامساوی (1) صدق می‌کند. دقت کنید ضریب ثابت C در (1) تنها به Ω ، c_0 و α وابسته است. اگر $C\left[\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\partial\Omega)}\right] < K$ آنگاه جواب (2) در نامساوی $\|y\|_{L^\infty(\Omega)} < K$ صدق می‌کند. بنابراین $d_k(x, y(x)) = d(x,y(x))$ و همچنین $b_k(x,y(x)) = b(x,y(x))$. در نتیجه معادله (2) همان معادله (SEP) است.

تا اینجا نشان دادیم بدون شرط کران داری در (H1) معادله (SEP) جواب دارد و جواب آن در (1) صدق می‌کند.

برای اینکه یکتاییِ جواب (SEP) را در این حالت بررسی کنیم، دقت کنید اگر $y \in H^1(\Omega)$ یک جواب (SEP) باشد، بنابر قضیه‌ی مرحله قبل این جواب کران‌دار و پیوسته است. (در اثبات قضیه مرحله قبل از فرض کران‌داری a و b استفاده نکردیم) اگر y یک جواب (2) است و می‌دانیم (2) جواب آنگاه $\|y\|_{L^\infty(\Omega)} < K$ یکتا دارد.

بررسی شرط (H3) .

اگر c_0 و α هر دو همزمان صفر باشند، نتایج قبل برقرار نیست. در واقع در قضایای دو مرحله قبل (وجود و یکتاییِ جواب SEP ، کران‌داری جواب SEP) هر دو از نامساوی زیر استفاده شده است:

$$\beta \|y\|_{H^1}^2 \le \int_\Omega |\nabla y|^2 + c_0 y^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha y^2 \, d\sigma \qquad \forall y \in H^1(\Omega)$$

وقتی α و c_0 همزمان صفر هستند، نامساوی بالا درست نیست. با شرایط بیشتری روی توابع غیرخطی d و b دیگران

جایگزینِ مناسبی برای (H3) پیدا کرد. مثال زیر نشان می‌دهد که نمی‌توان نتایج قبلی را بدون (H3) یا جایگزینِ مناسب داشت.

مثال-

$$\begin{cases} -\Delta y + e^{y} = f & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

برای مسأله بالا، هیچ مقدار ثابت $c>0$ وجود ندارد که نامساوی (1) برقرار باشد. در غیر این صورت باید

$$\|y\|_{H^1} \leq C \, \|f\|_{L^r(\Omega)}$$

اگر $y(x) \equiv t$ یک تابع ثابت باشد، یک جواب مسأله بالا است برای $f = e^{t}$.

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} = |t| \, |\Omega|^{1/2} \, , \quad \|f\|_{L^r(\Omega)} = e^{t} \, |\Omega|^{\frac{1}{r}}$$

$$\Rightarrow \quad |t| \leq \tilde{c} \, e^{t}$$

که اگر $t \to -\infty$ آنگاه نامساوی بالا نمی‌تواند برقرار باشد.

فرضیات جدید:

$(H3)'$ یکی از دو حالت زیر برای توابع $b(x,y)$ و $d(x,y)$ برقرار است:

الف) مجموعه اندازه مثبت $E_d \subseteq \Omega$ و ثابت‌های $M_d > 0$ و $\lambda_d > 0$ وجود دارند که

$$d(x,y_1) < d(x,y_2) \qquad \forall y_1 < y_2 , \ x \in E_d$$

$$\big(d(x,y) - d(x,0)\big) y \geq \lambda_d |y|^2 \qquad \forall x \in E_d , \ |y| > M_d$$

ب) مجموعه اندازه مثبت $E_b \subseteq \partial\Omega$ و ثابت‌های $M_b > 0$ و $\lambda_b > 0$ وجود دارند که

$$b(x,y_1) < b(x,y_2) \qquad \forall y_1 < y_2 , \ x \in E_b$$

$$\big(b(x,y) - b(x,0)\big) y \geq \lambda_b |y|^2 \qquad \forall x \in E_b , |y| > M_b$$

نکته ـ تابع $d(x,y)=e^y$ در $(H3)'$ صدق نمی‌کند.

قضیه ـ اگر $(H1)$ و $(H3)'$ برقرار باشند و $c_0=0$ و $\alpha=0$، آنگاه (SEP) جواب یکتای $y\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ دارد که در (1) صدق می‌کند. (در (1) به جای f و g باید $f-d(x,0)$ و $g-b(x,0)$ جایگزین کنیم.) به علاوه این جواب پیوسته است.

ایده اثبات ـ برای هر عدد $n\in\mathbb{N}$ مسأله زیر جواب یکتا دارد:

$$(3)\begin{cases} -\Delta y+\frac{1}{n}y+d(x,y)=f(x) & \text{in } \Omega \\ \partial_n y+b(x,y)=g(x) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

بنابر قضیه ۷.۶ در فصل ۷ کتاب ثابت $0<K$ وجود دارد که

$$\|y_n\|_{H^1(\Omega)}+\|y_n\|_{L^\infty(\Omega)}\leq K \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

که y_n جواب (3) است. بنابراین $\{y_n\}$ یک زیردنباله همگرای ضعیف در $H^1(\Omega)$ دارد.

فرض کنید $y_{n_k} \longrightarrow y$ در $H^1(\Omega)$. چون H^1 به طور فشرده در L^2 می‌نشیند، بنابراین

$y_{n_k} \xrightarrow{L^2(\Omega)} y$ به طور قوی و در نتیجه در یک زیردنباله $y_{n_k}(x) \xrightarrow{\text{تقریباً همه جا}} y(x)$. از طرفی بنابر تعریف جواب ضعیف (3) داریم:

$$(5)\quad \int_\Omega \nabla y_n \cdot \nabla v + \frac{1}{n} y_n v + d(x, y_n) v \, dx + \int_{\partial\Omega} b(x, y_n) v \, d\sigma = \int_\Omega f y_n \, dx + \int_{\partial\Omega} g y_n \, d\sigma$$

اگر بتوانیم

$$\int_\Omega d(x, y_{n_k}) v \, dx \longrightarrow \int_\Omega d(x,y) v \, dx$$

و همینطور

$$\int_{\partial\Omega} b(x, y_{n_k}) v \, d\sigma \longrightarrow \int_{\partial\Omega} b(x,y) v \, d\sigma$$

آنگاه وقتی در (5) n را به ∞ میل دهیم

نشان می‌دهد که y جواب ضعیف (SEP) است.

از طرفی چون $\|y_n\| < K$ بنابر شرط پیوستگی توابع b و d می‌دانیم که
$b(x, y_{n_k}(x))$ و $d(x, y_{n_k}(x))$ کران دار هستند و از تسلط لبگ همگرایی
مورد نظر اثبات می‌شوند.

مسأله کنترل بهینه یک معادله شبه‌خطی:

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y) = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$u \in U_{ad} \subseteq L^\infty(\Omega)$ کنترل مسأله است. بنابر نتیجه قبل اگر تابع d در شرط (H1) و (H3) صدق کند، برای هر u
جواب یکتای $y \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ وجود دارد. به علاوه

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} + \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\left[\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|d(\cdot,0)\|_{L^\infty(\Omega)}\right] \qquad (8)$$

تابع هزینه را به صورت در نظر می‌گیریم:

$$J(y,u) = \int_{\Omega} \varphi(x, y(x))\, dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x))\, dx$$

اولین سؤال این است که آیا کنترل بهینه‌ای برای مسئله زیر وجود دارد؟

$$\min_{u \in U_{ad}} J(y,u)$$

اگر $j = \inf_{u \in U_{ad}} J(y,u)$ و با فرض زیر $j < \infty$.

$(*1)$ تابع J از پایین کران دار است.

دنباله $u_n \in U_{ad}$ طوری انتخاب کنید که اگر y_n جواب متناظر آن باشد

$$J(y_n, u_n) \longrightarrow j$$

(*2) U_{ad} در $L^\infty(\Omega)$ کران‌دار، بسته و محدب است. به‌علاوه در $L^r(\Omega)$ بسته است.

با فرض بالا و نامساوی (6) دنباله $\{y_n\}$ در $H^1(\Omega)$ و $L^\infty(\Omega)$ کران‌دار است.

اگر $r > \frac{N}{2}$ یک زیردنباله از $\{u_n\}$ همگرای ضعیف در $L^r(\Omega)$ می‌توان انتخاب کرد. برای سادگی فرض کنید

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{in } L^r(\Omega).$$

بنابر (*2)، $\bar{u} \in U_{ad}$.

به طور همزمان زیردنباله‌ای از $\{y_n\}$ (برای سادگی خود دنباله را می‌گیریم) وجود دارد که

$$y_n \rightharpoonup \bar{y} \quad \text{in } H^1(\Omega)$$

به راحتی می‌توان دید که $\bar{y}$ جواب متناظر $\bar{u}$ است.

$(*3)$ $J(y,u)$ به طور ضعیف نیم پیوسته پایین است .

با فرض $(*3)$ خواهیم داشت که

$$J(\bar{y},\bar{u}) \leq \liminf_{n\to\infty} J(y_n,u_n) = \hat{j} = \inf_{u\in U_{ad}} J(y,u)$$

بنابراین ابتدا باید به این سؤال پاسخ دهیم که چه موقع $y \longmapsto \int_\Omega \varphi(x,y(x))\,dx$ به طور ضعیف

نیم پیوسته پایین است .

کنترل بهینه

جلسه چهاردهم ۹۸/۸/۲۰

عملگرهای نمیتسکی (Nemytskii)

$$\varphi : E \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad E \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\Phi : y \longmapsto \Phi(y)(x) = \varphi(x, y(x))$$

سؤال: عملگر بین چه فضاهایی خوش‌تعریف است؟ آیا Φ پیوسته و مشتق‌پذیر هست؟

به عنوان مثال اگر φ یک تابع کران‌دار باشد $\Phi : L^\infty(E) \longrightarrow L^\infty(E)$ خوش‌تعریف است.

تعریف ① $\varphi : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کاراتئودری گوییم هرگاه برای هر $y \in \mathbb{R}$ ثابت نسبت به x اندازه‌پذیر باشد و برای تقریباً هر $x \in E$ نسبت به y پیوسته باشد.

② تابع φ دارای شرط کران‌داری است اگر ثابت $0 < K$ وجود داشته باشد که $|\varphi(x, 0)| \leq K$ برای تقریباً هر $x \in E$.

③ φ را نسبت به متغیر y به طور موضعی لیپ‌شیتز گوییم هرگاه برای هر ثابت $0<M$ ، ثابت لیپ‌شیتز $L(M)$ وجود داشته باشد که

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x,z)| \le L(M)\,|y-z| \qquad \forall y,z\in[-M,M]$$

تقریباً هر $x\in E$

مثال - هر تابع به صورت $\varphi(x,y)=a_1(x)+a_2(x)b(y)$ که $a_i\in L^\infty(E)$ ، $b\in C^1(\mathbb{R})$

هر سه خاصیت بالا را دارند.

قضیه - فرض کنید $\varphi: E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ کاراتئودوری بوده و در شرط کران‌داری صدق کند. همچنین نسبت به متغیر y به طور موضعی لیپ‌شیتز باشد، آنگاه عملگر نمیتسکی $\Phi(y)=\varphi(\cdot,y(\cdot))$ روی $L^\infty(E)$ خوش‌تعریف و پیوسته است.

اثبات ـ خوش‌تعریفی: اگر $y \in L^\infty(E)$ نشان می‌دهیم ثابت M وجود دارد که

$$\left| \Phi(y)(x) \right| = \left| \varphi(x, y(x)) \right| \leq M \qquad \text{a.e. } x \in E$$

زیرا:

$$\left| \varphi(x, y(x)) \right| \leq \left| \varphi(x, y(x)) - \varphi(x, 0) \right| + \left| \varphi(x, 0) \right|$$

$$\leq L(m) \left| y(x) - 0 \right| + K$$

چون $y \in L^\infty(E)$ ثابت m وجود دارد که $|y(x)| \leq m$ و $L(m)$ را ضریب لیپ‌شیتز در بازه $[-m, m]$ بگیرید. درنتیجه $M = mL(m) + K$.

پیوستگی: برای اثبات پیوستگی $\Phi : L^\infty(E) \to L^\infty(E)$ نامساوی زیر را اثبات می‌کنیم:

برای هر $y, z \in L^\infty(E)$ که $\|y\|_{L^\infty}, \|z\|_{L^\infty} \leq m$

$$\| \Phi(y) - \Phi(z) \|_{L^\infty(E)} \leq L(m) \, \|y - z\|_{L^\infty(E)}$$

$$|\Phi(y)(x)-\Phi(z)(x)| = |\varphi(x,y(x))-\varphi(x,z(x))|$$
$$\leq L(m)\,|y(x)-z(x)| \leq L(m)\,\|y-z\|_{L^\infty(E)}$$

نتیجه: نامساوی

$$\|\Phi(y)-\Phi(z)\|_{L^p(E)} \leq L(m)\,\|y-z\|_{L^p(E)} \qquad (1)$$

برای هر $1\leq p\leq\infty$ و برای هر $y,z\in L^\infty(E)$ و $\|y\|_{L^\infty}, \|z\|_{L^\infty}\leq m$ برقرار است.

نکته- اگر φ نسبت به y لیپشیتز باشد (نه به طور موضعی لیپشیتز) یعنی

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x,z)| \leq L\,|y-z| \qquad \forall y,z$$

آنگاه $\Phi: L^p(E)\to L^p(E)$ خوش تعریف و پیوسته است و نامساوی (1) برقرار است.

مثال- $\varphi(y)=\sin y$ آنگاه $\Phi(y)(x)=\sin(y(x))$

$\Phi: L^p(E)\to L^p(E)$ یک عملگر لیپشیتز است.

$$\|\Phi(y)-\Phi(z)\|_{L^p} \le \|y-z\|_{L^p}$$

مشتق‌پذیری عملگر نمیتسکی: فرض کنید $\Phi: L^\infty(E)\to L^\infty(E)$ خوش‌تعریف و به طور موضعی لیپشیتز است (مشابه شرایط قضیه قبل) می‌خواهیم بررسی کنیم تحت چه شرایطی Φ مشتق‌پذیر است. برای اینکه Φ در نقطه y دارای مشتق جهتی در راستای h باشد، باید حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(y+th)-\Phi(y)}{t}$$

این حد باید در $L^\infty(E)$ وجود داشته باشد.

اگر مقدار حد تابع $z \in L^\infty(E)$ باشد، باید

$$\left\| \frac{\Phi(y+th)-\Phi(y)}{t} - z \right\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$$

پس برای تقریباً هر $x \in E$ باید

$$\frac{\Phi(y+th)(x)-\Phi(y)(x)}{t} - z(x) \longrightarrow 0$$

$$\frac{\varphi(x, y(x)+th(x))-\varphi(x,y(x))}{t} \longrightarrow z(x)$$

بنابراین حداقل باید $\varphi(x,y)$ برای تقریباً هر x نسبت به y مشتق‌پذیر باشد. در این صورت

$$z(x) = D_y\varphi(x,y(x))\,h(x)$$

برای اینکه $z \in L^\infty$ باید $D_y\varphi(x,y(x)) \in L^\infty$ باشد. تابع $\Phi'(y) = D_y\varphi(\cdot,y(\cdot))$ یک عملگر

پیوسته است که باید روی فضای $L^\infty(E)$ خوش تعریف باشد.

قضیه. فرض کنید φ کاراتئودوری بوده که برای تقریباً هر $x \in E$ نسبت به y مشتق‌پذیر است و در شرط کران داری صدق کند.
به علاوه تابع $D_y\varphi$ در شرط کران داری و موضعی لیپشیتز صدق کند. یعنی

$$\left| D_y \varphi(x,0) \right| \leq K \qquad a.e.\ x \in E$$

$$\left| D_y \varphi(x,y) - D_y \varphi(x,z) \right| \leq L(M) \left| y - z \right|$$

آنگاه عملگر $\Phi : L^\infty(E) \to L^\infty(E)$ به معنای فرشه مشتق‌پذیر است و

$$\left(\Phi'(y) h \right)(x) = D_y \varphi(x, y(x))\, h(x)$$

اثبات - باید ثابت کنیم :

$$\lim_{\|h\|_{L^\infty}\to 0} \frac{\|\Phi(y+h)-\Phi(y)-\Phi'(y)h\|_{L^\infty(E)}}{\|h\|_{L^\infty(E)}}=0$$

$$\left|\varphi(x,y(x)+h(x))-\varphi(x,y(x))-D_y\varphi(x,y(x))\,h(x)\right| =$$

$$=\left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi(x,y(x)+th(x))\,dt - D_y\varphi(x,y(x))\,h(x)\right|$$

$$=\left|\int_0^1 D_y\varphi(x,y(x)+th(x))-D_y\varphi(x,y(x))\,dt\right|\,|h(x)|$$

$$\leq \int_0^1 L(M)\,|y(x)+th(x)-y(x)|\,dt\;\;|h(x)| = \frac{L(M)}{2}|h(x)|^2$$

$D_y\varphi$ نسبت به y به طور یکنواخت لیپشیتز است.

نتیجه- اگر $\varphi \in C^2$ باشد، آنگاه همه شرایط قضیه قبل برقرار است.

مثال- $\Phi(y) = \sin(y(\cdot))$

$$\Phi'(y)(h) = \cos(y(x))\,h(x)$$

گزاره- تحت شرایط قضیه قبل عملگر Φ روی $L^\infty(E)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر است.

اثبات- باید نشان دهیم اگر $y_n \longrightarrow y$ در $L^\infty(E)$ آنگاه باید نشان دهیم

$$\|\Phi'(y_n) - \Phi'(y)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(E),\,L^\infty(E))} \longrightarrow 0$$

به طور معادل کافی است نشان دهیم (چرا؟)

$$\|D_y\varphi(\cdot, y_n(\cdot)) - D_y\varphi(\cdot, y(\cdot))\|_{L^\infty(E)} \longrightarrow 0$$

که به راحتی از آنکه $D_y\varphi(x,y)$ نسبت به y لیپ‌شیتز است نتیجه می‌شود که

$$|D_y\varphi(x,y_n(x)) - D_y\varphi(x,y(x))| \leq L(M)\,|y_n(x) - y(x)|$$

$$\Rightarrow \|D_y\varphi(\cdot,y_n(\cdot)) - D_y\varphi(\cdot,y(\cdot))\|_{L^\infty(E)} \leq L(M)\,\|y_n - y\|_{L^\infty(E)} \longrightarrow 0$$

نکته - در اثبات فوق در حقیقت نشان دادیم که Φ به طور موضعی لیپ‌شیتز است.

نکته - اگر $E\subseteq\mathbb{R}^n$ کران‌دار باشد و $\varphi: E\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ شرط کاراتئودوری و شرط رشد چندجمله‌ای

$$|\varphi(x,y)| \leq \alpha(x) + \beta(x)|y|^{p/q}$$

داشته باشد که $\alpha,\beta\in L^\infty(E)$ و $1\leq q\leq p<\infty$. آنگاه $\Phi: L^p(E)\longrightarrow L^q(E)$ خوش‌تعریف و پیوسته است.

به‌علاوه اگر $D_y\varphi(x,y)$ برای تقریباً هر $x\in E$ وجود داشته باشد و عملگر نمینتسکی متناظر $D_y\varphi(x,y)$ فضای $L^p(E)$ را به $L^r(E)$ تصویر کند. اگر $1\le q<p<\infty$ و

$$r=\frac{pq}{p-q}\qquad \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}\right)$$

آنگاه $\Phi: L^p(E)\to L^q(E)$ مشتق‌پذیر فرشه است.

$$\int_E \left|D_y\varphi(x,y(x))\,h(x)\right|^q dx \le \left[\int_E \left|D_y\varphi(x,y(x))\right|^{q\times\frac{p}{p-q}} dx\right]^{1-q/p}\left[\int_E |h(x)|^{q\times p/q}dx\right]^{q/p}$$

$$=\left[\int_E \left|D_y\varphi(x,y(x))\right|^r dx\right]^{1-q/p}\left[\int_E |h(x)|^p dx\right]^{q/p}$$

مثال- اگر $\varphi(y)=y^k$ ، $\Phi: L^p(E) \longrightarrow L^q(E)$ پیوسته است برای هر $1 \le q \le kp$.

(با فرض اینکه E کران دار است)

عملگر نمیتسکی متناظر $\varphi'(y)=ky^{k-1}$ فضای $L^p(E)$ را به $L^r(E)$ تصویر می‌کند که $r \le (k-1)p$.

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \ge \left(\frac{1}{k-1} + 1 \right) \frac{1}{p}$$

پس برای $1 \le q \le \frac{k-1}{k} p$ ، عملگر $\Phi: L^p \longrightarrow L^q$

مشتق‌پذیر است .

کنترل بهینه

جلسه پانزدهم ۹۸/۸/۲۵

مسأله کنترل بهینه

(1)

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y) = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$u \in U_{ad} = \{ u \in L^\infty(\Omega) : u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \}$$

با تابع هزینه

$$J(y,u) = \int_\Omega \varphi(x, y(x))\, dx + \int_\Omega \psi(x, u(x))\, dx$$

اگر φ و ψ در شرایط جلسه قبل صدق کنند (کاراتئودری + کران داری + موضعاً لیپ شیتز) عملگرها

$$u \longmapsto \psi(x, u(x)) \quad , \quad y \longmapsto \varphi(x, y(x))$$

در $L^\infty(\Omega)$ پیوسته هستند. بنابراین تابع هزینه $J(y,u)$ پیوسته است. بنابر مطالب دو جلسه قبل برای اثبات وجود یک کنترل بهینه باید $J: H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی باشد.

می‌دانیم هر تابع نیم‌پیوسته پایینی و محدب به طور ضعیف نیز نیم‌پیوسته پایینی است. در نتیجه لازم است که J محدب باشد یا به عبارتی توابع $\varphi(x,\cdot)$ و $\psi(x,\cdot)$ نسبت به مؤلفه دوم محدب باشند.

در حقیقت شرط تحدب φ ضروری نیست. زیرا اگر $y_n \longrightarrow \bar{y}$ در $H^1(\Omega)$، آنگاه $y_n \longrightarrow \bar{y}$ در $L^2(\Omega)$ و از پیوستگی عملگر $y \longmapsto \int_\Omega \varphi(x,y(x))\,dx$ نتیجه می‌شود که

$$\lim \int_\Omega \varphi(x,y_n(x))\,dx = \int_\Omega \varphi(x,\bar{y}(x))\,dx.$$

قضیه - اگر φ و ψ در شرایط کاراتئودری، شرط کران‌داری و موضعاً لیپشیتز صدق کنند، به علاوه ψ نسبت به مؤلفه دوم محدب باشد. همچنین فرض کنید $d(x,y)$ در فرض‌های (H1) و (H3) صدق کند، آنگاه مسأله کنترل بهینه (1) حداقل یک جواب $(\bar{y},\bar{u})$ دارد.

یکتایی در حالت کلی برقرار نیست.

مثال - $0 \leq u(x) \leq 2\pi$ و $u \in L^\infty(0,1)$. مسأله بهینه زیر جواب یکتا ندارد.

$$\min f(u) := -\int_0^1 \cos(u(x))\,dx$$

هر تابع $u(x) \in \{0, 2\pi\}$ جواب این مسأله بهینه‌سازی است

مثال - $|u(x)| \leq 1$ مسأله

$$\min \int_0^1 |u^2(x) - 1|^2\,dx$$

جواب یکتا ندارد.

بررسی شرایط بهینگی :

عملگر $G: \mathcal{U}_{ad} \longrightarrow H^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ را عملگر کنترل - حالت درنظر بگیرید که برای هر $u \in \mathcal{U}_{ad}$ ،

$y = G(u)$ جواب معادله زیر باشد.

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y) = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

قضیه (G لیپشیتز است) اگر $u_1, u_2 \in L^r(\Omega)$ و $y_i = G(u_i)$ آنگاه

$$\|y_1 - y_2\|_{H^1(\Omega)} + \|y_1 - y_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L \, \|u_1 - u_2\|_{L^r(\Omega)}$$

برای یک ثابت $L>0$ ، با فرض $(H1)$ و $(H3)'$ برای تابع $d(x,y)$ که نسبت به y مشتق پذیر هست.

$$\begin{cases} -\Delta y_1 + d(x,y_1) = u_1 \\ -\Delta y_2 + d(x,y_2) = u_2 \end{cases} \Rightarrow -\Delta(y_1-y_2) + d(x,y_1) - d(x,y_2) = u_1-u_2$$

$$d(x,y_1) - d(x,y_2) = \int_0^1 \frac{d}{dt} d(x, ty_1 + (1-t)y_2)\, dt$$

$$= \left[\int_0^1 \partial_y d(x, ty_1 + (1-t)y_2)\, dt\right] (y_1 - y_2)$$

$$= c_0(x)\,(y_1-y_2)$$

$$\Rightarrow -\Delta(y_1-y_2) + c_0(y_1-y_2) = u_1-u_2$$

درضمن چون d نسبت به y صعودی است ، $\partial_y d \geq 0$ و درنتیجه $c_0 \geq 0$. بنابراین ثابت C وابسته به Ω

وجود دارد که نامساوی مورد نظر در صورت قضیه برقرار باشد.

قضیه (مشتق پذیری G) : برای $r > \frac{N}{2}$ عملگر $G : L^r(\Omega) \to H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ مشتق پذیر فرشه است،

به شرط آنکه d در فرضهای (H1) و (H3) صدق کند. به علاوه نسبت به y مشتق پذیر باشد و

$d_y(x,y) \geq \lambda_d > 0$ برای یک ثابت λ_d و عملگر $y \mapsto d(\cdot, y)$ روی $L^\infty(\Omega)$ مشتق پذیر باشد. (فرضیات قضیه جلسه قبل)

اثبات - $\bar{u} \in L^r(\Omega)$، $\bar{y} = G(\bar{u})$ نشان میدهیم $z = G'(\bar{u})u$ که

$$\begin{cases} -\Delta z + d_y(x, \bar{y}) z = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

در واقع برای مشتق پذیری باید ثابت کنیم:

$$\| G(\bar{u}+u) - G(\bar{u}) - G'(\bar{u})u \|_{H^1(\Omega)} = o(\|u\|_{L^r(\Omega)})$$

$$\bar{y} = G(\bar{u}) \quad , \quad \tilde{y} = G(\bar{u}+u) \quad , \quad z = G'(\bar{u})u$$

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{y} + d(x,\tilde{y}) = \bar{u} + u \\ -\Delta \bar{y} + d(x,\bar{y}) = \bar{u} \end{cases} \Rightarrow -\Delta(\tilde{y}-\bar{y}) + \underbrace{d(x,\tilde{y}) - d(x,\bar{y})}_{d_y(x,\bar{y})(\tilde{y}-\bar{y}) + o(\tilde{y}-\bar{y})} = u$$

بنابر مشتق‌پذیری عملگر نمتسکی $y \mapsto d(\cdot,y)$.

$$\Rightarrow -\Delta(\tilde{y}-\bar{y}-z) + d_y(x,\bar{y})(\tilde{y}-\bar{y}-z) = o(\tilde{y}-\bar{y})$$

$$\Rightarrow \|\tilde{y}-\bar{y}-z\|_{H^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})} = o\left(\|\tilde{y}-\bar{y}\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

از طرفی بنابر قضیه قبل (G لیپشیتز است) داریم :

$$\|\tilde{y}-\bar{y}\|_{L^\infty(\Omega)} \le L\,\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

جمع‌بندی : $$J(y,u) = J(G(u),u) =: f(u)$$

$$f(\bar{u}) = \min_{u \in U_{ad}} f(u)$$

با فرض مشتق‌پذیری f می‌دانیم که شرط لازم بهینگی به صورت

$$f'(\bar{u})(u-\bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

از طرفی $$f(u) = \int_\Omega \varphi(x, G(u))\,dx + \int_\Omega \psi(x,u)\,dx$$

اگر φ و ψ در فرضیات جلسه قبل صدق کنند به طوری عملگرهای نمتسکی $y \mapsto \varphi(\cdot,y)$ و $u \mapsto \psi(\cdot,u)$ مشتق‌پذیر باشند، f مشتق‌پذیر خواهد بود.

$$f'(\bar{u})h = \int_\Omega \varphi_y(x,\bar{y}(x))\,(\underbrace{G'(\bar{u})h}_{z(x)})\,dx + \int \psi_u(x,\bar{u})h(x)\,dx$$

$$\begin{cases} -\Delta \bar{y} + d(x,\bar{y}) = \bar{u} \\ \partial_n \bar{y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta z + d_y(x,\bar{y})\, z = u - \bar{u} \\ \partial_n z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\int_\Omega \varphi_y(x,\bar{y})\, z(x)\, dx + \int_\Omega \psi_u(x,\bar{u})\,(u-\bar{u})\, dx \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}}$$

اگر p جواب مسأله زیر باشد :

مسأله الحاقی $\rightarrow$
$$\begin{cases} -\Delta p + d_y(x,\bar{y})\, p = \varphi_y(x,\bar{y}) & \text{in } \Omega \\ \partial_n p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

آنگاه
$$\int_\Omega \varphi_y(x,\bar{y})\, z(x)\, dx = \int_\Omega p(x)\,(u(x) - \bar{u}(x))\, dx$$

در نتیجه باید

$$\int_\Omega \left[p(x) + \Psi_u(x,\bar{u})\right](u-\bar{u})\,dx \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

به عبارتی

$$\nabla f(\bar{u}) = p + \Psi_u$$

مثال

$$\begin{cases} -\Delta y + y + y^3 = u \\ \partial_n y = 0 \end{cases}, \qquad \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(y - y_\Omega(x)\right)^2$$

$$\Psi(x,u) = \frac{\lambda}{2} u^2$$

$$d(x,y) = y + y^3$$

شرط لازم برای بهینگی مسأله فوق این است که

$$\int_\Omega (p + \lambda\bar{u})(u-\bar{u}) \geq 0$$

که

$$\operatorname{Proj}_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{\lambda}p\right) = \bar{u}$$

و باید

$$\begin{cases} -\Delta p + (1+3\bar{y}^2)p = \bar{y} - y_\Omega \\ \partial_n p = 0 \end{cases}$$

مسأله کنترل مرزی :

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + b(x,y) = u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$U_{ad} = \{ u \in L^\infty(\partial\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \}$$

مسأله الحاقی به صورت زیر است :

$$\begin{cases} -\Delta p + d_y(x,\bar{y})\, p = \varphi_y(x,\bar{y}) \\ \partial_n p + b_y(x,\bar{y})\, p = 0 \end{cases}$$

شرط لازم بهینگی به صورت زیر است :

$$\int_{\partial\Omega} \left(p(x) + \psi_u(x,\bar{u}) \right)(u - \bar{u})\, d\sigma \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

کنترل بهینه

جلسه شانزدهم ۹۸/۸/۲۷

روش لاگرانژ

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y,v) = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + b(x,y,u) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

u و v کنترل‌های درونی و مرزی هستند. $v \in V_{ad} \subseteq L^2(\partial\Omega)$, $u \in U_{ad} \subseteq L^\infty(\partial\Omega)$

$$\min J(y,v,u) = \int_\Omega \varphi(x,y(x),v(x))\,dx + \int_{\partial\Omega} \psi(x,y(x),u(x))\,d\sigma$$

تحت شرایط معقولی روی توابع $d(x,y,v)$ و $b(x,y,u)$ به ازای هر کنترل u و v معادله بالا جواب $y = G(v,u)$ دارد.

$$\mathcal{L}(y,v,u,p) = J(y,v,u) - \int_\Omega \left[-\Delta y + d(x,y,v)\right] p(x)\,dx - \int_{\partial\Omega} \left[\partial_n y + b(x,y,u)\right] p(x)\,d\sigma$$

در واقع به جای p باید از دو تابع p_1 و p_2 استفاده کرد. مشابه محاسبات جلسه هشتم می‌توان دید که باید $p_1 = p_2$ روی $\partial\Omega$.

$$\mathcal{L}(y,v,u,p) = J(y,v,u) - \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla p + d(x,y,v)\,p\,dx - \int_{\partial\Omega} b(x,y,u)\,p\,d\sigma$$

شرایط لازم بهینگی برای $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times V_{ad} \times U_{ad} \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} D_y \mathcal{L}(\bar{y},\bar{v},\bar{u},p)\,y = 0 & \forall\, y \in H^1(\Omega) \\ D_v \mathcal{L}(\bar{y},\bar{v},\bar{u},p)(v-\bar{v}) \geq 0 & \forall\, v \in V_{ad} \\ D_u \mathcal{L}(\bar{y},\bar{v},\bar{u},p)(u-\bar{u}) \geq 0 & \forall\, u \in U_{ad} \end{cases}$$

$$D_y\mathcal{L}\cdot y = \int_{\Omega} \varphi_y(\bar{y},\bar{v},\bar{u})\,y\,dx + \int_{\partial\Omega} \psi_y(\bar{y},\bar{v},\bar{u})\,y\,d\sigma$$

$$- \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla p + d_y(x,\bar{y},\bar{v})\,y\,p\,dx - \int_{\partial\Omega} b_y(x,\bar{y},u)\,y\,p\,d\sigma = 0$$

برای هر $y \in H^1(\Omega)$

بنابراین p باید در مسأله الحاقی زیر صدق کند:

شرایط لازم بهینگی

$$\begin{cases} -\Delta p + d_y(x,\bar{y},\bar{v})\,p = \varphi_y(x,\bar{y},\bar{v}) & \text{in } \Omega \\ \partial_n p + b_y(x,\bar{y},\bar{u})\,p = \psi_y(x,\bar{y},\bar{u}) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} \left[\varphi_v(x,\bar{y},\bar{v}) - p\, d_v(x,\bar{y},\bar{v})\right](v-\bar{v})\,dx \geq 0 \qquad \forall v \in V_{ad}$$

$$\int_{\partial\Omega} \left[\psi_u(x,\bar{y},\bar{u}) - p\, b_u(x,\bar{y},\bar{u})\right](u-\bar{u})\,d\sigma \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

در مسائل محدب شرایط لازم بهینگی برای پیدا کردن جواب بهینه کافی است. ولی در مسائل غیرخطی که ممکن است حالت غیرمحدب رخ دهد، به دنبال شرایط کافی برای جواب بهینه هستیم.

آزمون مشتق دوم :

قضیه - اگر X یک فضای باناخ باشد و $C \subseteq X$ محدب و تابع $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر فرشه پیوسته باشد. اگر $\bar{u} \in C$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) (شرط لازم بهینگی)

$$f'(\bar{u})(u-\bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \in C$$

(۲) (مثبت بودن مشتق دوم) ثابت $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$f''(\bar{u})[h,h] \geq \delta \|h\|_X^2 \qquad \forall h \in X$$

آنگاه $\bar{u}$ مینیمم موضعی f در C است. در واقع ثابت‌های $\varepsilon > 0$ و $\sigma > 0$ وجود دارند که

$$f(u) \geq f(\bar{u}) + \sigma \|u-\bar{u}\|_X^2 \qquad \forall u \in C \cap B_\varepsilon(\bar{u})$$

مشتق دوم:

X و Y دو فضای باناخ و $F: X \longrightarrow Y$ در نقطه $\bar{u} \in X$ مشتق‌پذیر فرشه است:

هرگاه عملگر خطی $A: X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد که

$$\| F(\bar{u}+u) - F(\bar{u}) - A u \|_Y = o(\|u\|_X)$$

و $A = F'(\bar{u})$ مشتق F در نقطه $\bar{u}$ می‌نامیم. بنابراین نگاشت F' به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F' : X \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$$

تابع F در نقطه $\bar{u}$ دوبار مشتق‌پذیر به معنی فرشه است هرگاه F' در نقطه $\bar{u}$ مشتق‌پذیر باشد، یعنی

$F''(\bar{u}) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$ وجود داشته باشد که

$$\| F'(\bar{u}+u_1) - F'(\bar{u}) - F''(\bar{u}) \cdot u_1 \|_{\mathcal{L}(X,Y)} = o(\|u_1\|_X)$$

یا به طور معادل

$$\limsup_{\substack{u_1\to 0\\ u_2\in X}} \frac{\left\| F'(\bar{u}+u_1)(u_2) - F'(\bar{u})(u_2) - F''(\bar{u})[u_1,u_2] \right\|_Y}{\|u_2\|_X \cdot \|u_1\|_X} = 0$$

که $F''(\bar{u})[u_1,u_2] = \big(\underbrace{F''(\bar{u})u_1}_{\in \mathcal{L}(X,Y)}\big)(u_2) \in Y$ یک فرم دوخطی پیوسته است.

$$F''(\bar{u})[u_1,u_2] = \big(F''(\bar{u})u_1\big)(u_2) = \frac{d}{dt} F'(\bar{u}+tu_2)(u_1)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} F(\bar{u}+tu_2+su_1)\Big|_{s=0,t=0}$$

همچنین

$$F''(\bar{u})[h,h] = \frac{d^2}{dt^2} F(\bar{u}+th)\Big|_{t=0}$$

مثال - تابع $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و عملگر نمیتسکی $\Phi(y) := \varphi(x, y(x))$ روی فضای $L^\infty(\Omega)$ در نظر بگیرید. تحت شرایط کاراتئودری، کران‌داری و لیپشیتز موضعی φ و φ_y عملگر Φ مشتق‌پذیر پیوسته است و

$$\Phi'(\bar{y})(y) = \varphi_y(x, \bar{y}(x))\, y(x).$$

به طور مشابه اگر φ_{yy} شرایط کاراتئودری، کران‌داری و لیپشیتز موضعی را داشته باشد، عملگر Φ دوبار مشتق‌پذیر است و

$$\Phi''(\bar{y})[y_1, y_2] = \varphi_{yy}(x, \bar{y}(x))\, y_1(x)\, y_2(x)$$

نکته - عملگر نمیتسکی $\Phi : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ دوبار مشتق‌پذیر است هرگاه $1 \le 2q \le p < \infty$ و $y \mapsto \varphi_{yy}(\cdot, y(\cdot))$ فضای $L^p(\Omega)$ را به $L^r(\Omega)$ تصویر کند که $r = \frac{pq}{p-2q}$.

مثال - $\varphi(y) = \cos y$ و $y \longmapsto \cos(y(\cdot))$ روی $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ دوبار مشتق‌پذیر است و

$$\Phi''(\bar{y})[y_1, y_2] = -\cos(\bar{y})\, y_1(\cdot)\, y_2(\cdot)$$

اگر $\Phi : \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathcal{L}^q$ درنظر بگیریم. این عملگر برای هر $1 \leq q \leq p \leq \infty$ خوش‌تعریف است.

برای اینکه Φ مشتق‌پذیر باشد باید عملگر نمشکلی $y \longmapsto \varphi'(y) = -\sin y$ فضای $\mathcal{L}^p$ را به‌صورت پیوسته به $\mathcal{L}^r$

تصویر کند که $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. برای هر $r \leq p$ چنین چیزی ممکن است. بنابراین برای هر $2q \leq p$

عملگر Φ مشتق‌پذیر است. درضمن Φ دوبار مشتق‌پذیر است هرگاه $y \longmapsto -\cos y$ فضای $\mathcal{L}^p$ را به $\mathcal{L}^r$ تصویر کند

که $\frac{1}{r} + \frac{2}{p} = \frac{1}{q}$. یعنی باید $3q \leq p$ باشد. (البته این شرط را به $2q < p$ تقلیل داد.)

به‌عنوان $\Phi : \mathcal{L}^4 \longrightarrow \mathcal{L}^1$ دوبار مشتق‌پذیر است. هرچند عملگر $\Phi : \mathcal{L}^4 \longrightarrow \mathcal{L}^2$ خوش‌تعریف است و یکبار مشتق‌پذیر است

مشتق دوم ندارد.

مثال- $f(u) = -\int_0^1 \cos(u(x))\,dx$ ، $u \in \mathcal{L}^2(0,1)$.

$$\min_{u \in C} f(u) \qquad C = \{u \in \mathcal{L}^2(0,1) : 0 \le u(x) \le 2\pi\}$$

واضح است که مینیمم f برابر -1 است و هر تابع $\bar{u}$ که $\bar{u}(x) \in \{0, 2\pi\}$ یک نقطه‌ی بهینه است.

بررسی شرایط بهینگی در نقطه $\bar{u} \equiv 0$.

$$f'(\bar{u})(u-\bar{u}) = \int_0^1 \sin(\bar{u})(u-\bar{u})\,dx = \int_0^1 \sin(0)\, u(x)\,dx = 0$$

بنابراین شرط لازم $f'(\bar{u})(u-\bar{u}) \ge 0$ برقرار است.

$$f''(\bar{u})[h,h] = \int_0^1 \cos(0)(h(x))^2\,dx = \int_0^1 h^2(x)\,dx = \|h\|^2_{\mathcal{L}^2(0,1)}$$

بنابراین شرط دوم قضیه (آزمون مشتق دوم) برقرار است و باید

$$f(u) \ge f(\bar{u}) + \sigma \|u-\bar{u}\|^2_{\mathcal{L}^2(0,1)} \qquad \forall u \in C \cap B_\varepsilon(\bar{u})$$

توابع
$$u_\tau(x)=\begin{cases} 2\pi & 0\le x\le \tau \\ 0 & \tau< x\le 1\end{cases}$$
را در رابطه قبل جایگذاری کنید.

$$\|u_\tau-\bar{u}\|^2_{L^2(0,1)}=\int_0^1 (u_\tau(x)-\cancel{\bar{u}(x)})^2\,dx=4\pi^2\tau$$

برای $2\pi\tau^{1/2}<\varepsilon$ می‌توان تابع u_τ را در تخمین $f(u_\tau)\ge f(\bar{u})+\sigma\|u_\tau-\bar{u}\|^2_{L^2}$ قرار داد، که با توجه به اینکه $f(\bar{u})=f(u_\tau)=-1$ است تناقض ایجاد می‌کند.

ریشه این مشکل آنجاست که تابع f روی $L^2(0,1)$ دوبار مشتق‌پذیر نیست. هرچند f روی $L^\infty(0,1)$ دوبار مشتق‌پذیر است. توابع u_τ که در بالا تعریف شده‌اند در فضای $L^\infty(0,1)$ فاصله 2π با $\bar{u}$ دارند، یعنی $\|u_\tau-\bar{u}\|_{L^\infty(0,1)}=2\pi$ و در ε-همسایگی $\bar{u}$ برای $0<\varepsilon<2\pi$ قرار ندارند.

قابل توجه است که شرط $f''(\bar{u})[h,h]\ge\delta\|h\|^2_{L^\infty}$ نیز در این حالت برقرار نیست.

کنترل بهینه

جلسه هفدهم ۹۸/۹/۴

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y) = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \int_\Omega \varphi(x,y(x))\,dx + \int_\Omega \psi(x,u(x))\,dx$$

$$G : L^\infty(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$$u \longmapsto y = G(u)$$

قبلاً دیدیم که اگر $\bar{y} = G(\bar{u})$ و $z = G'(\bar{u})u$ آنگاه

$$\begin{cases} -\Delta z + d_y(x,\bar{y})z = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

برای محاسبه G'' از قضیه تابع ضمنی استفاده می‌کنیم:

قضیه تابع ضمنی: $F: X \times Y \longrightarrow Y$ و $F \in C^k$. به علاوه $F(\bar{x},\bar{y})=0$ و $D_y F(\bar{x},\bar{y}): Y \longrightarrow Y$ وارون‌پذیر باشد (یا به طور معادل یک به یک و پوشا باشد). آنگاه تابع $H: X \longrightarrow Y$ عضو C^k وجود دارد که $F(x,H(x))=0$ و $H(\bar{x})=\bar{y}$.

قضیه- تابع d در شرایط $(H1)$ و $(H3)'$ صدق می‌کند و عملگر نمیتسکی $y \longmapsto d(\cdot,y)$ دوبار مشتق پیوسته داشته باشد و $d_y(x,\bar{y}(x))$ یک تابع نامنفی باشد. آنگاه عملگر $G: L^\infty \longrightarrow H^1$ دوبار مشتق‌پذیر پیوسته به معنای فرشه است.

به علاوه اگر $z = G''(\bar{u})[u_1,u_2]$ آنگاه

$$\begin{cases} -\Delta z + d_y(x,\bar{y})z = -d_{yy}(x,\bar{y})\,y_1 y_2 & \text{in } \Omega \\ \partial_n z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

که $\bar{y} = G(\bar{u})$، $y_i = G'(\bar{u})u_i$.

اثبات - $y = G(u)$ در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} -\Delta y + y = u - d(x,y) + y =: v \\ \partial_n y = 0 \end{cases}$$

می‌دانیم عملگر خطی پیوسته $R: L^\infty(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ وجود دارد که $y = Rv$. در نتیجه:

$$y - R(u - d(x,y) + y) = 0$$

اگر عملگر $F: L^\infty(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ با ضابطه

$$F(u,y) = y - R(u - d(x,y) + y)$$

می‌دانیم که $F(\bar{u}, \bar{y}) = 0$ و $F \in C^2$. همچنین $F(u, G(u)) = 0$. اگر نشان دهیم

$F_y(\bar{u}, \bar{y}): H^1 \longrightarrow H^1$ وارون‌پذیر است به کمک قضیه تابع ضمنی می‌دانیم $G \in C^2$.

$$y \longmapsto F_y(\bar u,\bar y)(y) = y - R\big(y - d_y(x,\bar y)y\big)$$ بایدنشان دهیم عملگر خطی یک به یک و پوشا است.

یک به یک است زیرا اگر $$y - R\big(y - d_y(x,\bar y)y\big) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = R\big(y - d_y(x,\bar y)y\big)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta y + y = y - d_y(x,\bar y)y & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta y + d_y(x,\bar y)y = 0$$

پس از ضرب در y و انتگرال روی Ω $$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla y|^2 + d_y(x,\bar y)y^2 \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad y \equiv 0$$

چون d نسبت به y صعودی است یکتابع مثبت است.

پوشا بودن: $z\in H^1(\Omega)$ دلخواه در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم $y\in H^1(\Omega)$ وجود دارد که

$$y - R\big(y - d_y(x,\bar y)y\big) = z$$

یا به طور معادل

$$y - z = R\big(y - d_y(x,\bar y)y\big)$$

$$\begin{cases} -\Delta(y-z) + (y-z) = y - d_y(x,\bar y)\,y \\ \partial_n(y-z) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$\tilde y = y - z$

$$\begin{cases} -\Delta\tilde y + d_y(x,\bar y)\tilde y = z - d_y(x,\bar y)\,z \\ \partial_n \tilde y = 0 \end{cases}$$

چون $0 \le d_y(x,\bar y)$ در نتیجه معادله بالا جواب $\tilde y \in H^1$ دارد.

محاسبه G'' : از رابطه $F(u, G(u)) = 0$ مشتق می‌گیریم:

$$G(u) - R(u - d(x, G(u)) + G(u)) = 0$$

$$G'(u)u_1 - Ru_1 + R(d_y(x, G(u))\, G'(u)u_1) - R(G'(u)u_1) = 0$$

$$G''(u)[u_1, u_2] + R(d_{yy}(x, G(u))(G'(u)u_2)(G'(u)u_1))$$

$$+ R(d_y(x, G(u))\, G''(u)[u_1, u_2] - R(G''(u)[u_1, u_2]) = 0$$

$$z = G''(\bar{u})[u_1, u_2] \quad , \quad y_1 = G'(\bar{u})u_1 \quad , \quad y_2 = G'(\bar{u})u_2 \quad , \quad \bar{y} = G(\bar{u})$$

$$\Rightarrow \quad z + R\left[d_{yy}(x, \bar{y})\, y_1 y_2 + d_y(x, \bar{y}) z - z\right] = 0$$

$$\begin{cases} -\Delta(-z) + (-z) = d_{yy}(x,\bar{y})\, y_1 y_2 + d_y(x,\bar{y})\, z - z \\ \partial_n z = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta z + d_y(x,\bar{y})\, z = -d_{yy}(x,\bar{y})\, y_1 y_2 \\ \partial_n z = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

محاسبه مشتق دوم تابع هزینه :

$$f(u) = J(G(u), u)$$

$$f'(u)u_1 = D_y J(G(u),u)\, G'(u)u_1 + D_u J(G(u),u)\, u_1$$

$$\begin{aligned} f''(u)[u_1,u_2] &= D_y^2 J(G(u),u)\,[G'(u)u_1, G'(u)u_2] + \\ &+ D_u D_y J(G(u),u)\,[G'(u)u_1, u_2] + D_y J(G(u),u)\, G''(u)[u_1,u_2] \\ &+ D_y D_u J(G(u),u)\,[u_1, G'(u)u_2] + D_u^2 J(G(u),u)\,[u_1,u_2] \end{aligned}$$

$$= J''(y,u)\left[(y_1,u_1),(y_2,u_2)\right] + D_y J(y,u)\, G''(u)[u_1,u_2]$$

که $y = G(u)$ و $y_i = G'(u)u_i$. اگر $z = G''(u)[u_1,u_2]$ ،

$$D_y J(y,u)\, z = \int_\Omega \varphi_y(x, y(x))\, z(x)\, dx$$

اگر p جواب مسئله الحاقی متناظر باشد یعنی

$$\begin{cases} -\Delta p + d_y(x,y)p = \varphi_y(x,y) & \text{in } \Omega \\ \partial_n p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

در نتیجه:

$$D_y J(y,u) z = \int_\Omega \left(-\Delta p + d_y(x,y)p\right) z\, dx = \int_\Omega p\left(-\Delta z + d_y(x,y) z\right) dx$$

$$= -\int_\Omega p\, d_{yy}(x,y)\, y_1 y_2\, dx$$

$$J''(y,u)\left[(y_1,u_1),(y_2,u_2)\right] = \int_\Omega \varphi_{yy}(x,y)\, y_1 y_2 + \psi_{uu}(x,u)\, u_1 u_2 \, dx$$:ازطرفی

شرط لازم برای بهینگی

$$f''(\bar{u})[u,u] \geq \delta \|u\|^2_{L^\infty}$$

(شرط کافی) $$\int_\Omega \varphi_{yy}(x,\bar{y})\, y^2 + \psi_{uu}(x,\bar{u})\, u^2 - p\, d_{yy}(x,\bar{y})\, y^2 \, dx \geq \delta \|u\|^2_{L^\infty}$$

که $\bar{y} = G(\bar{u})$, $y = G'(\bar{u})u$ و p جواب مسأله الحاقی.

(شرط لازم) $$\int_\Omega \left(p + \psi_u(x,\bar{y})\right)(u - \bar{u}) \geq 0$$

نکته- شرط لازم در اکثر مسائل به صورت فوق نمی‌تواند برقرار باشد. البته اگر به جای نرم L^∞ از نرم L^2 استفاده کنیم می‌توان نامساوی مشابهی نوشت ولی برای نرم L^∞ غلط است.

راه حل: (two-norm discrepancy) اگر شرط $f''(\bar{u})[h,h] \ge \delta \|h\|^2_{L^2(\Omega)}$ برای هر $h \in L^\infty(\Omega)$ را در آزمون مشتق دوم جایگزین شرط دوم کنیم نتیجه به صورت زیر برقرار است:

$$f(u) \ge f(\bar{u}) + \sigma \|u-\bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \|u-\bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon$$

بنابراین همچنان $\bar{u}$ نقطه می‌نیمم موضعی f است.

قضیه - اگر $f: L^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر باشد و $f'(\bar{u})(u-\bar{u}) \ge 0$ و $f''(\bar{u})[h,h] \ge \delta \|h\|^2_{L^2}$ برای هر $h \in L^\infty$. به علاوه اگر f'' در $\bar{u}$ به طور موضعی لیپ‌شیتز باشد یعنی برای هر M ثابت $L(M)$ وجود دارد که

$$\left| f''(u+h)[u_1,u_2] - f''(u)[u_1,u_2] \right| \le L(M) \|h\|_{L^\infty} \cdot \|u_1\|_{L^2} \cdot \|u_2\|_{L^2}$$

برای هر $\|h\|_{L^\infty} \le M$ و هر $u_1, u_2 \in L^2$. آنگاه ε و $\sigma > 0$ وجود دارند که

$$f(u) \ge f(\bar{u}) + \sigma \|u-\bar{u}\|^2_{L^2}$$

برای هر $u \in L^\infty$ که $\|u-\bar{u}\|_{L^\infty} < \varepsilon$.

اثبات.

$$f(u)-f(\bar u)-f'(\bar u)(u-\bar u)=\int_0^1 \frac{d}{dt}\, f(\bar u+t(u-\bar u))\,dt-f'(\bar u)(u-\bar u)$$

$$=\int_0^1 \left[f'(\bar u+t(u-\bar u))-f'(\bar u)\right](u-\bar u)\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^t \frac{d}{ds}\, f'(\bar u+s(u-\bar u))(u-\bar u)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^t f''(\bar u+s(u-\bar u))[u-\bar u,u-\bar u]\,ds\,dt$$

$$\geq \int_0^1\int_0^t f''(\bar u)[u-\bar u,u-\bar u]\,ds\,dt-L(M)\,\|u-\bar u\|_{L^\infty}\cdot\|u-\bar u\|_{L^2}^2$$

$$\geq \left(\delta-L(M)\|u-\bar u\|_{L^\infty}\right)\|u-\bar u\|_{L^2}^2\geq \sigma\,\|u-\bar u\|_{L^2}^2$$

وقتی $\|u-\bar u\|_{L^\infty}<\varepsilon$ ، $\delta-\varepsilon L(M)=\sigma$.

نتیجه: اگر $\bar y = G(\bar u)$ در شرط لازم بهینگی صدق کند. به علاوه $\delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\int_\Omega \varphi_{yy}(x,\bar y)\, y^2 + \psi_{uu}(x,\bar u)\, u^2 - p\, d_{yy}(x,\bar y)\, y^2 \, dx \ge \delta \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

برای هر $y = G'(\bar u)u$. آنگاه $\bar u$ کنترل بهینه است.

اثبات ـ تنها باید نشان دهیم f'' در نقطه $\bar u$ به طور موضعی لیپشیتز است. یعنی

$$(1) \qquad \left| f''(\bar u+h)[u_1,u_2] - f''(\bar u)[u_1,u_2] \right| \le L(M)\, \|h\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^2} \|u_2\|_{L^2}$$

برای هر $u_1, u_2 \in L^2$ ، $\|h\|_{L^\infty} \le M$. اما بنابر محاسبات قبل اگر $y^h = G(\bar u+h)$ و $y_i^h = G'(\bar u+h)u_i$

و p^h جواب مسأله الحاقی متناظر $\bar u+h$ ، y^h است، یعنی $-\Delta p^h + d_y(x,y^h)p^h = \varphi_y(x,y^h)$ ، آنگاه

$$(2) \qquad f''(\bar u+h)[u_1,u_2] = \int_\Omega \varphi_{yy}(x,y^h)\, y_1^h y_2^h + \psi_{uu}(x,\bar u+h)\, u_1 u_2 - p^h d_{yy}(x,y^h)\, y_1^h y_2^h \, dx$$

اما چون G مشتق‌پذیر پیوسته (و در نتیجه به طور موضعی لیپ‌شیتز) است

$$\|y^h-\bar{y}\|_{H^1}+\|y^h-\bar{y}\|_{L^\infty}\leq C_1\|h\|_{L^\infty}$$

و همچنین از C^2 بودن عملگر نمنتسکی $y\mapsto d(\cdot,y)$ خواهیم داشت:

$$\|d_y(\cdot,y^h)-d_y(\cdot,\bar{y})\|_{L^\infty}\leq C_2\|y^h-\bar{y}\|_{L^\infty}\leq C_2C_1\|h\|_{L^\infty}$$

در نتیجه:

$$\|\varphi_{yy}(\cdot,y^h)y_1^hy_2^h-\varphi_{yy}(\cdot,\bar{y})y_1y_2\|_{L^1}\leq\|\varphi_{yy}(\cdot,y^h)-\varphi_{yy}(\cdot,\bar{y})\|_{L^\infty}\cdot\|y_1^hy_2^h\|_{L^1}$$

$$+\|\varphi_{yy}(\cdot,\bar{y})\|_{L^\infty}\cdot\|y_1^hy_2^h-y_1y_2\|_{L^1}$$

$$\leq C_3\|y^h-\bar{y}\|_{L^\infty}\cdot\|y_1^h\|_{L^2}\cdot\|y_2^h\|_{L^2}+C_4\left[\|y_2^h\|_{L^2}\|y_1^h-y_1\|_{L^2}+\|y_1\|_{L^2}\|y_2^h-y_2\|_{L^2}\right]$$

اما $y_i^h=G'(\bar{u}+h)u_i$ که جواب معادله $-\Delta y_i^h+d_y(x,y^h)y_i=u_i$ است بنابراین ثابت C_5 وجود دارد که

$$\|y_i^h\|_{L^2}\leq\|y_i^h\|_{H^1}\leq C_5\|u_i\|_{L^2}$$

همچنین چون $-\Delta y_i + d_y(x,\bar{y}) y_i = u_i$ داریم:

$$-\Delta(y_i^h - y_i) + d_y(x,\bar{y})(y_i^h - y_i) = \left(d_y(x,\bar{y}) - d_y(x,y^h)\right) y_i^h$$

$$\|y_i^h - y_i\|_{L^2} \leq \|y_i^h - y_i\|_{H^1} \leq C_5 \left\|\left(d_y(x,\bar{y}) - d_y(x,y^h)\right) y_i^h\right\|_{L^2}$$

$$\leq C_5 C_6 \|\bar{y} - y^h\|_{L^\infty} \|y_i^h\|_{L^2}$$

$$\leq C_1 (C_5)^2 C_6 \|h\|_{L^\infty} \|u_i\|_{L^2}$$

بنابراین

$$\|\varphi_{yy}(\cdot, y^h) y_1^h y_2^h - \varphi_{yy}(\cdot, \bar{y}) y_1 y_2\|_{L^1} \leq C_3 C_1 (C_5)^2 \|h\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^2} \|u_2\|_{L^2}$$

$$+ 2 C_4 C_5 C_1 (C_5)^2 C_6 \|h\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^2} \|u_2\|_{L^2}$$

$$= C_7 \|h\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^2} \|u_2\|_{L^2} \qquad (3)$$

به طور مشابه

$$\|p^h d_{yy}(\cdot, y^h) y_1^h y_2^h - p\, d_{yy}(\cdot, \bar{y}) y_1 y_2\|_{L^1} \leq C_8 \|h\|_{L^\infty} \|u_1\|_{L^2} \|u_2\|_{L^2} \qquad (4)$$

در نتیجه با جایگذاری (4) و (3)، (2) در رابطه (1) اثبات قضیه کامل می‌شود.

کنترل بهینه

جلسه پنجم ۹۸/۹/۱۱

نکته - فرض کنید $U_{ad} = \{ u_a \leq u \leq u_b \}$ و مخروط‌های در $\bar{u}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$C(\bar{u}) = \left\{ v \in L^\infty(\Omega) : \begin{array}{ll} v(x) \geq 0 & \text{if } \bar{u}(x) = u_a(x) \\ v(x) \leq 0 & \text{if } \bar{u}(x) = u_b(x) \end{array} \right\}$$

شرط کافی که در جلسه قبل ارائه شد، کافیست که برای $h \in C(\bar{u})$ برقرار باشد نه لزوماً هر کدام $h \in L^\infty$.

$$f''(\bar{u})[h,h] \geq \delta \|h\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall h \in C(\bar{u})$$

نکته - $A_0(\bar{u}) = \{ x \in \Omega : |p(x) + \Psi_u(x, \bar{u}(x))| > 0 \}$ از شرط لازم زیر

$$0 \leq f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \int \left[p(x) + \Psi_u(x, \bar{u}) \right] (u(x) - \bar{u}(x)) \, dx \qquad \forall u \in U_{ad}$$

مقادیر $\bar{u}$ روی A_0 مشخص می‌شود.

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_a(x) & p(x) + \Psi_u(x, \bar{u}(x)) > 0 \\ u_b(x) & p(x) + \Psi_u(x, \bar{u}(x)) < 0 \end{cases}$$

مخروط بحرانی $C_0(\bar{u})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_0(\bar{u}) = \left\{ h \in L^\infty(\Omega) : \begin{array}{lll} h(x) = 0 & \text{if} & x \in A_0(\bar{u}) \\ h(x) \geq 0 & \text{if} & x \notin A_0(\bar{u}),\ \bar{u}(x) = u_a(x) \\ h(x) \leq 0 & \text{if} & x \notin A_0(\bar{u}),\ \bar{u}(x) = u_b(x) \end{array} \right\}$$

به وضوح $C_0(\bar{u}) \subseteq C(\bar{u})$.

قضیه - اگر $\bar{u}$ یک کنترل بهینه باشد، آنگاه $f''(\bar{u})[h,h] \geq 0$ برای هر $h \in C_0(\bar{u})$.

این قضیه نشان می‌دهد که شرط مثبت بودن مشتق دوم روی مخروط بحرانی $C_0(\bar{u})$ یک شرط لازم است. و تفاوت $C_0(\bar{u})$ و مخروط حاشی $C(\bar{u})$ به عنوان شرط کافی در نظر گرفته می‌شود.

مسأله کنترل مرزی :

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + b(x,y) = u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\min J(y,u) = \int_{\Omega} \varphi(x, y(x))\, dx + \int_{\Gamma} \psi(x, u(x))\, d\sigma$$

شرط لازم :

$$\int_{\partial\Omega} \left[\psi_u(x, \bar{u}(x)) + p(x)\right]\left[u(x) - \bar{u}(x)\right] d\sigma \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

که p جواب مسأله الحاق زیر است :

$$\begin{cases} -\Delta p + d_y(x,\bar{y})\, p = \varphi_y(x, \bar{y}(x)) \\ \partial_n p + b_y(x,\bar{y})\, p = 0 \end{cases}$$

شرط کافی: $\mathcal{f}''(\bar{u})[h,h] \geq \delta \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$ برای هر $h \in C(\bar{u})$

$$\int_\Omega \left[\varphi_{yy}(x,\bar{y}) - p(x) d_{yy}(x,\bar{y})\right] y^2\, dx + \int_{\partial\Omega} \psi_{uu}(x,\bar{u})\, h^2 - p\, b_{yy}(x,\bar{y})\, y^2 \, d\sigma \geq \delta \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

که $y = G'(\bar{u})h$ جواب معادله زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta y + d_y(x,\bar{y})\, y = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + b_y(x,\bar{y})\, y = h & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

نکته ـ لاگرانژین مسأله بالا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}(y,u,p) = J(y,u) - \int_\Omega p\left(-\Delta y + d(x,y)\right) dx$$

$$= J(y,u) - \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla y + p\, d(x,y)\, dx + \int_{\partial\Omega} p\left(u - b(x,y)\right) d\sigma$$

برای پیدا کردن شرط کافی باید

$$f''(\bar{u})[h,h] = \mathcal{L}''(\bar{y},\bar{u},p)[(y,h),(y,h)] \geq \delta \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

که $y = G'(\bar{u})h$.

$$\|$$

$$\mathcal{L}_{yy}\, y^2 + 2\mathcal{L}_{yu}\, yh + \mathcal{L}_{uu} h^2$$

روشهای عددی :

روش برنامه‌ریزی درجه دو دنباله‌ای (Sequential Quadratic Programming) SQP

فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع C^2 باشد و می‌خواهیم مسأله

$$\min_{x \in C} f(x)$$

را حل کنیم. اگر $\bar{u}$ نقطه مینیمم درونی باشد، باید $f'(\bar{u}) = 0$. به کمک روش نیوتن برای پیدا کردن ریشه تابع f' به دنباله بازگشتی زیر می‌رسیم:

u_{n+1} جواب دستگاه خطی $f'(u_n) + f''(u_n)(u - u_n) = 0$ است.

(به عبارتی $u_{n+1} = u_n - (f''(u_n))^{-1} f'(u_n)$ که به شرط وارون پذیری $f''(u_n)$)

این دنباله بازگشتی قابل محاسبه است.

از طرفی می‌توان این دنباله بازگشتی را به کمک یک مسأله بهینه‌سازی درجه ۲ تعریف کرد.

در واقع u_{n+1} را جواب مسأله زیر قرار دهید:

$$\min_{u\in C}\left\{ f'(u_n)^T(u-u_n) + \tfrac{1}{2}(u-u_n)^T f''(u_n)(u-u_n)\right\}$$

در حقیقت عبارت بالا تقریب درجه ۲ تابع $f(u)-f(u_n)$ در همسایگی نقطه u_n است.

کاربرد این روش در حل مسأله کنترل مرزی:

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + b(x,y) = u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\min J(y,u) = \int_\Omega \varphi(x,y(x))\,dx + \int_\Gamma \psi(x,u(x))\,d\sigma$$

$$f'(u)\cdot w = \int_\Omega \left[p + \psi_u(x, u(x))\right] w(x)\, dx$$

که p جواب مسئله الحاقی زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta p + d_y(x,y)\,p = \varphi_y(x, y(x)) \\ \partial_n p + b_y(x,y)\,p = 0 \end{cases}$$

به علاوه

$$f''(u)[h,h] = \int_\Omega \left[\varphi_{yy}(x,y) - p(x) d_{yy}(x,y)\right] z^2\, dx + \int_{\partial\Omega} \psi_{uu}(x,u)\, h^2 - p\, b_{yy}(x,y) z^2\, d\sigma$$

که $z = G'(u)h$ جواب مسئله زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta z + d_y(x,y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n z + b_y(x,y)\, z = h & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

کافیست در روش SQP با جایگذاری عبارت بالا مقدار

$$f'(u_n)(u-u_n) + \frac{1}{2} f''(u_n)[u-u_n, u-u_n]$$

را محاسبه کرد.

نکته - در این روش برای محاسبه y_{n+1} از روی u_{n+1} به جای حل مسأله غیرخطی، می‌توانیم به یک ترتیب خطی زیر وصل مسأله خطی y_{n+1} را تقریب بزنیم:

$$y_{n+1} = y_n + G'(u_n)(u_{n+1}-u_n) \simeq G(u_{n+1})$$

نکته - برای حل مسأله بهینه‌سازی درجه ۲ در روش SQP با در نظر گرفتن یک پایه برای تقریب با ابعاد متناهی می‌توان این مسأله را گسسته کرد. دقت کنید در هر گام روش SQP مسایل الحاقی و خطی‌سازی شده تغییر می‌کنند. لذا در هر گام باید به تعداد اعضای پایه مسأله PDE حل کرد.

کنترل بهینه

جلسه نوزدهم ۹۸/۹/۱۶

مسائل شبه خطی سهموی :

$$(1)\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + d(x,t,y) = f & \text{in } \Omega\times(0,T)=Q \\ \partial_n y + b(x,t,y) = g & \text{on } \partial\Omega\times(0,T)=\Sigma \\ y(x,0) = y_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

با فرضیات زیر این مسأله دارای جواب است :

(H1) $\begin{cases} d(x,t,y): Q\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ b(x,t,y): \Sigma\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \end{cases}$ برای هر $y\in\mathbb{R}$ نسبت به (x,t) اندازه پذیر و برای تقریباً هر (x,t)

نسبت به y پیوسته و صعودی باشد.

(H2) توابع d و b کران دار هستند یا نامساوی‌های K و L وجود دارند که

$$|d(x,t,0)|\le K\ ,\quad |d(x,t,y_1)-d(x,t,y_2)|\le L\,|y_1-y_2|$$

قضیه- با فرضیات (H1) و (H2) مسأله شبه‌خطی سهموی (1) دارای جواب یکتای ضعیف (به معنای زیر) $y \in W(0,T) \cap C(\bar{Q})$ برای هر $f \in L^r(Q)$ و $g \in L^s(\Sigma)$، $y_0 \in C(\bar{\Omega})$ که $r > \frac{N}{2}+1$ و $s > N+1$. به‌علاوه ثابت C_∞ مستقل از f، g، b و d و y_0 وجود دارد که

$$\|y\|_{W(0,T)} + \|y\|_{C(\bar{Q})} \leq C_\infty \Big[\|f - d(\cdot,0)\|_{L^r(Q)} + \|g - b(\cdot,0)\|_{L^s(\Sigma)} + \|y_0\|_{C(\bar{\Omega})} \Big]$$

تعریف جواب ضعیف: y جواب ضعیف است هرگاه برای هر $v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ که $v(x,T)=0$ داشته باشیم

$$-\iint_Q y\, v_t \,dx\,dt + \iint_Q \nabla y \cdot \nabla v + d(x,t,y)\, v \,dx\,dt + \iint_\Sigma b(x,t,y)\, v \,d\sigma\,dt$$
$$= \iint_Q f\, v \,dx\,dt + \iint_\Sigma g\, v \,d\sigma\,dt + \int_\Omega y_0\, v(\cdot,0)\,dx$$

مسأله کنترل بهینه :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + d(x,t,y) = v & \text{in } Q \\ \partial_n y + b(x,t,y) = u & \text{on } \Sigma \\ y(x,0) = y_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$v \in V_{ad} \quad , \quad u \in U_{ad}$$

$$J(y,v,u) = \int_{\Omega} \eta(x, y(x,T))\, dx + \iint_{Q} \varphi(x,t,y,v)\, dx\, dt + \iint_{\Sigma} \psi(x,t,y,u)\, d\sigma\, dt$$

تابع کنترل به حالت به صورت $y = G(v,u)$ توصیف می‌گردد.

$$G : L^r(Q) \times L^s(\Sigma) \longrightarrow Y := W(0,T) \cap C(\bar{Q})$$

بنا بر قضیه در صفحه قبل تابع G خوش تعریف است برای $r > N/2 + 1$ و $s > N+1$.

قضیه- اگر $r > \frac{N}{2} + 1$ و $s > N+1$ آنگاه نگاشت G لیپ‌شیتز است. یعنی ثابت $L > 0$ وجود دارد که

$$\|y_1 - y_2\|_{W(0,T)} + \|y_1 - y_2\|_{L^\infty(Q)} \leq L \left[\|v_1 - v_2\|_{L^r(Q)} + \|u_1 - u_2\|_{L^s(\Sigma)} \right]$$

اثبات- $y_i = G(v_i, u_i)$ در یک مسأله شبه‌خطی صدق می‌کند. تفاضل این دو مسأله به معادله زیر می‌رسد:

$$y := y_1 - y_2 \quad , \quad v := v_1 - v_2 \quad , \quad u := u_1 - u_2$$

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + d(x,t,y_1) - d(x,t,y_2) = u \\ \partial_n y + b(x,t,y_1) - b(x,t,y_2) = v \end{cases}$$

$$d(x,t,y_1)-d(x,t,y_2)=\int_0^1 \frac{d}{d\theta}\, d(x,t,\theta y_1+(1-\theta)y_2)\, d\theta$$

$$=\underbrace{\left[\int_0^1 d_y(x,t,\theta y_1+(1-\theta)y_2)\,d\theta\right]}_{\delta(x,t)}\underbrace{(y_1-y_2)}_{y}$$

به طور مشابه تابع $\beta(x,t)$ از تابع $b(x,t,\cdot)$ به دست می‌آید. در نتیجه y جواب مسأله خطی زیر است:

$$\begin{cases} y_t-\Delta y+\delta(x,t)y=v & \text{in } Q\\ \partial_n y+\beta(x,t)y=u & \text{on } \Sigma\\ y(x,0)=0 \end{cases}$$

چون توابع δ و β مثبت هستند ثابت $L>0$ مستقل از این توابع وجود دارد که

$$\|y\|_{W(0,T)}+\|y\|_{L^\infty(Q)}\leq L\left[\|v\|_{L^r(Q)}+\|u\|_{L^s(Q)}\right]$$

قضیه (مشتق‌پذیری G) تحت شرایط قضیه قبل تابع G مشتق‌پذیر به معنای فرشه است و

$$G'(\bar{v},\bar{u})(v,u) = y$$

در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + d_y(x,t,\bar{y})\,y = v & \text{in } Q \\ \partial_n y + b_y(x,t,\bar{y})\,y = u & \text{on } \Sigma \\ y(x,0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

قضیه. با شرایط قبل G دوبار مشتق‌پذیر پیوسته دارد و $z = G''(\bar{v},\bar{u})[(v_1,u_1),(v_2,u_2)]$ در مسأله زیر

صدق می‌کند:

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + d_y(x,t,\bar{y})\,z = -d_{yy}(x,t,\bar{y})\,y_1 y_2 & \text{in } Q \\ \partial_n z + b_y(x,t,\bar{y})\,z = -b_{yy}(x,t,\bar{y})\,y_1 y_2 & \text{on } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

که $y_i = G'(\bar{v},\bar{u})(v_i,u_i)$ و به کمک قضیه قبل محاسبه می‌شود.

کنترل بهینه

جلسه بیستم ۹۸/۹/۱۸

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + d(x,t,y) = v & \text{in } Q \\ \partial_n y + b(x,t,y) = u & \text{on } \Sigma \\ y(x,0) = y_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$v \in V_{ad} \quad , \quad u \in U_{ad}$$

$$J(y,v,u) = \int_\Omega \eta(x, y(x,T))\, dx + \iint_Q \varphi(x,t,y,v)\, dx\, dt$$

$$+ \iint_\Sigma \psi(x,t,y,u)\, d\sigma\, dt$$

$$\mathcal{L}[y,v,u,p] = J(y,v,u) - \int_Q p\,[y_t - \Delta y + d(x,t,y) - v]\,dx\,dt$$
$$- \int_\Sigma p\,[\partial_n y + b(x,t,y) - u]\,d\sigma\,dt$$

شرایط لازم بهینگی :

$$D_y \mathcal{L}[\bar{y},\bar{v},\bar{u},p]\cdot(y-\bar{y}) \geq 0 \qquad \forall y \text{ s.th. } y(x,0)=y_0(x)$$

مشابه حالت قبل ، اگر قرار دهیم $z(x,t):=y(x,t)-\bar{y}(x,t)$ آنگاه تنها شرط تابع z رابطه

$z(x,0)=0$ است . در نتیجه

$$0 = D_y \mathcal{L}[\bar{y},\bar{v},\bar{u},p]\cdot z = D_y J\cdot z - \int_Q p\,[z_t - \Delta z + d_y(x,t,\bar{y})\,z]\,dx\,dt$$
$$- \int_\Sigma p\,[\partial_n z + b_y(x,t,\bar{y})\cdot z]\,d\sigma\,dt$$

$$= D_y J \cdot z - \int_Q \left[-\partial_t p - \Delta p + d_y(x,t,\bar{y})\, p \right] z \, dx\,dt - \int_\Omega p(x,T)\, z(x,T)\, dx$$

$$- \int_\Sigma \left[\partial_n p + b_y(x,t,\bar{y})\, p \right] z \, d\sigma\, dt$$

$$D_y J \cdot z = \int_\Omega \eta_y(x, \bar{y}(x,T))\, z(x,T)\, dx + \int_Q \varphi_y(x,t,\bar{y},\bar{v})\, z\, dx\,dt$$

$$+ \int_\Sigma \psi_y(x,t,\bar{y},\bar{u})\, z \, d\sigma\, dt$$

درنتیجه p در معادله الحاقی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} -\partial_t p - \Delta p + d_y(x,t,\bar{y})\, p = \varphi_y(x,t,\bar{y},\bar{v}) \\ \partial_n p + b_y(x,t,\bar{y})\, p = \psi_y(x,t,\bar{y},\bar{u}) \\ p(x,T) = \eta_y(x,\bar{y}(x,T)) \end{cases}$$

به علاوه باید شرایط زیر نیز برقرار باشند :

$$\mathcal{L}_v(\bar{y},\bar{v},\bar{u},p)(v-\bar{v}) \geq 0 \qquad \forall\, v \in V_{ad}$$

$$\mathcal{L}_u(\bar{y},\bar{v},\bar{u},p)\cdot(u-\bar{u}) \geq 0 \qquad \forall\, u \in U_{ad}$$

$$\mathcal{L}_v\cdot(v-\bar{v}) = D_vJ\cdot(v-\bar{v}) + \int_Q p\cdot(v-\bar{v})\, dx\,dt$$

$$= \int_Q \left[\varphi_v(x,t,\bar{y},\bar{v}) + p\right]\cdot(v-\bar{v})\, dx\,dt \geq 0$$

$$\mathcal{L}_u\cdot(u-\bar{u}) = \int_\Sigma \left[\psi_u(x,t,\bar{y},\bar{u}) + p\right]\cdot(u-\bar{u})\, d\sigma\, dt \geq 0$$

بررسی شرط کافی وقتی کنترل درونی داریم :

$$f''(\bar{v})[h,h] \geq \delta \|h\|^2_{L^2(Q)} \qquad \forall h \in C(\bar{v}) \subseteq L^\infty(Q)$$

مخروط حیاتی در $\bar{v}$

$$\|$$

$$\mathcal{L}''[\bar{y},\bar{v},p][(y,h),(y,h)] \qquad y = G'(\bar{v})h$$

$$\|$$

$$\mathcal{L}_{yy}[y,y] + \mathcal{L}_{vv}[h,h]$$

$$= \int_\Omega \eta_{yy}(x,\bar{y}(x,T))\, y^2\, dx + \int_Q \varphi_{yy}(x,\bar{y},\bar{v})\, y^2 + \varphi_{vv}(x,\bar{y},\bar{v})\, h^2 - p\, d_{yy}(x,t,\bar{y})\, y^2 \, dx\, dt$$

به طور مشابه برای کنترل مرزی مشتق دوم محاسبه می‌شود. اگر در مسأله کنترل مرزی و درونی همزمان برقرار باشد ، شرط کافی به صورت زیر بیان می‌شود :

$$f''(\bar{u},\bar{v})\,[(u,v),(u,v)] \geq \delta\left(\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} + \|v\|^2_{L^2(Q)}\right)$$

چون $f_{uv}=0$ پس f'' برابر است با:

$$\mathcal{L}_{yy}\cdot(y,v,u)^2 + \mathcal{L}_{vv}\,(y,v,u)^2 + \mathcal{L}_{uu}(y,v,u)^2$$

که $y = G'(\bar{v},\bar{u})\cdot(v,u)$.

مثال-

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = e_Q & \text{in } Q = (0,\ell) \times (0,T) \\ y_x(0,t) = 0 & 0 \le t \le T \\ y_x(\ell,t) + y(\ell,t)^3 = e_\Sigma(t) + u(t) & 0 \le t \le T \\ y(x,0) = 0 & \end{cases}$$

$e_Q, y_Q, \alpha \in L^\infty(Q)$

$a_y, a_u, e_\Sigma \in L^\infty(0,T)$

کنترل u در شرط $0 \le u(t) \le 1$ صدق کند.

به علاوه u باید به گونه‌ای انتخاب شود که همواره شرط زیر برقرار باشد:

$$\iint_Q y(x,t)\,dx\,dt \le 0$$

$$\min J(y,u) = \frac{1}{2} \iint_Q \alpha(x,t)\,|y(x,t) - y_Q(x,t)|^2\,dx\,dt + \lambda/2 \int_0^T |u(t)|^2\,dt$$

$$+ \int_0^T \left(a_y(t)\,y(\ell,t) + a_u(t)\,u(t)\right) dt$$

$$\mathcal{L}[y,u,p,\mu] = J(y,u) - \iint_Q p\,(y_t - y_{xx} - e_Q)\,dx\,dt$$

$$- \int_0^T p(l,t)\left[y_x(l,t) + y(l,t)^3 - e_\Sigma(t) - u(t)\right] + \mu \iint_Q y(x,t)\,dx\,dt$$

مسئله بهینه‌سازی تبدیل می‌شود به $\min \mathcal{L}$ وقتی $\mu \geq 0$ و تابع y در شرایط

$y_x(0,t) = y(x,0) = 0$ صدق می‌کند.

شرط لازم بهینگی به صورت

$$\begin{cases} \mathcal{L}_y \cdot (y - \bar{y}) = 0 \\ \mathcal{L}_u \cdot (u - \bar{u}) \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_y \cdot z = J_y \cdot z - \iint_Q p\,(z_t - z_{xx})\,dx\,dt - \int_0^T p(l,t)\left(z_x(l,t) + 3\,\bar{y}(l,t)^2 z(l,t)\right) + \mu \iint_Q z\,dx\,dt$$

$$\begin{cases} -p_t - p_{xx} = \alpha(\bar{y} - y_Q) + \mu & \text{in } Q \\ p_x(0,t) = 0, \quad p_x(l,t) + 3(\bar{y}(l,t))^2 p(l,t) = a_y(t) & 0 \leq t \leq T \\ p(x,T) = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \left(\lambda \bar{u}(t) + p(\ell,t) + a_u(t)\right) \cdot \left(u(t) - \bar{u}(t)\right) \, dt \geq 0$$

شرط لازم به صورت فوق است که p جواب معادله الحاقی برای یک مقدار حقیقی $\mu \leq 0$.

به علاوه اینکه

$$\bar{u}(t) = \operatorname{Proj}_{[0,1]} \left(-\tfrac{1}{\lambda}\left(p(\ell,t) + a_u(t)\right)\right)$$

$$= \begin{cases} 1 & p(\ell,t) + a_u(t) \leq -\lambda \\ 0 & p(\ell,t) + a_u(t) \geq 0 \\ -\frac{1}{\lambda}\left(p(\ell,t) + a_u(t)\right) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

کنترل بهینه

جلسه بیست و یکم ۹۸/۹/۳۰

دستگاههای غیرخطی

مدل phase - field

$$\begin{cases} u_t + \frac{l}{2}\varphi_t = k\,\Delta u + f & \text{in } Q \\ \tau\varphi_t = \xi^2\Delta\varphi + g(\varphi) + 2u & \text{in } Q \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma \\ u(\cdot,0) = u_0\,,\quad \varphi(\cdot,0) = \varphi_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

مدل تغییرِ فاز جامد - مایع ، u دما را نشان می‌دهد . $\varphi(x,t) \in [-1,1]$ تابع فاز است که میزانِ سختی در هر نقطه است .

$\{\varphi = 1\}$ فاز مایع و $\{\varphi = -1\}$ فاز جامد است .

منبع گرمایی به عنوان کنترل در نظر گرفته می‌شود . $f \in F_{ad} = \{ f \in L^2(Q) : f_a(x,t) \le f(x,t) \le f_b(x,t) \}$

تابع g هم معمولاً یک چندجمله‌ای به صورت $g(z) = az + bz^2 - cz^3$ است که a و b و $c>0$ توابع کران‌دار هستند .

تابع هزینه:
$$J(u,\varphi,f) = \frac{\alpha}{2}\iint_Q |u-u_Q|^2\,dx\,dt + \frac{\beta}{2}\iint_Q |\varphi-\varphi_Q|^2\,dx\,dt + \frac{\lambda}{2}\iint_Q |f|^2\,dx\,dt$$

قضیه وجود و یکتایی جواب: برای هر $f \in L^q(Q)$ که $q \geq 2$. این دستگاه جواب یکتای $(\varphi, u) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$

برای x ، برای t

که
$$P = \begin{cases} \dfrac{5q}{5-2q} & 2 \leq q < 5/2 \,,\ N=3 \\ \text{هر عدد مثبت دلخواه} & \text{"}5/2 \leq q \,,\ N=3\text{" or "}q \geq 2 \,,\ N=2\text{"} \end{cases}$$

نگاشت کنترل - حالت $(u,\varphi) \longmapsto G: f$ دوبار مشتق‌پذیر فرشه از $L^2(Q)$ به $Y = W_2^{1,2}(Q) \times W_2^{1,2}(Q)$

است. تنها جمله غیرخطی عبارت $g(\varphi)$ است که با توجه به اینکه g یک چندجمله‌ای درجه سه است عملگر نمسیتسکی $\varphi \longmapsto g(\varphi)$

دوبار مشتق‌پذیر است به عنوان یک عملگر $L^6(Q) \longrightarrow L^2(Q)$. از طرفی نشان ‌داده‌اند $W_2^{1,2}(Q) \hookrightarrow L^6(Q)$ برای $N \leq 3$

ثابت می‌کند که G دوبار مشتق‌پذیر است.

$$\mathcal{L}(u,\varphi,f,p,\psi) = J(u,\varphi,f) - \iint_Q \left[\left(u_t + \tfrac{\ell}{2}\varphi_t - f\right)p + \kappa \nabla u \cdot \nabla p\right] dx\,dt$$
$$- \iint_Q \left[\left(\tau \varphi_t - g(\varphi) - 2u\right)\psi + \xi^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \psi\right] dx\,dt$$

شرایطِ لازم بهینگی :

$$D_u \mathcal{L}(\bar{u},\bar{\varphi},\bar{f},p,\psi)\,u = 0 \qquad \forall u : u(\cdot,0)=0$$

$$D_\varphi \mathcal{L}(\bar{u},\bar{\varphi},\bar{f},p,\psi)\,\varphi = 0 \qquad \forall \varphi : \varphi(\cdot,0)=0$$

$$D_f \mathcal{L}(\bar{u},\bar{\varphi},\bar{f},p,\psi)(f-\bar{f}) \geq 0 \qquad \forall f \in F_{ad}$$

$$D_u \mathcal{L} \cdot u = \iint_Q \alpha(\bar{u}-u_Q)u - p u_t - \kappa \nabla u \cdot \nabla p + 2\psi u \, dx\,dt = 0$$

مسأله الحاقی اول

$$\Rightarrow \begin{cases} -p_t = \kappa \Delta p + 2\psi + \alpha(\bar{u}-u_Q) & \text{in } Q \\ \partial_n p = 0 & \text{on } \Sigma \\ p(\cdot,T) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$D_\varphi \mathcal{L} \cdot \varphi = \iint_Q \beta(\bar{\varphi} - \varphi_Q)\varphi - \frac{\ell}{2}\varphi_t p - \tau \varphi_t \psi + g'(\bar{\varphi})\psi + \xi^2 \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \; dxdt = 0$$

مسأله الحاقی دوم

$$\begin{cases} -\frac{\ell}{2} p_t - \tau \psi_t = \xi^2 \Delta\psi + g'(\bar{\varphi})\psi + \beta(\bar{\varphi} - \varphi_Q) & \text{in } Q \\ \partial_n \psi = 0 & \text{on } \Sigma \\ \psi(\cdot, T) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$D_f \mathcal{L} \cdot (f - \bar{f}) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \iint_Q (\lambda \bar{f} + p)(f - \bar{f}) \, dxdt \geq 0 \quad \forall f \in F_{ad}$$

شرط لازم بهینگی

معادله نویر- استوکس (Navier-Stokes)

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{Re}\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f & \text{in } Q \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{on } \Sigma \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ دوبعدی در نظر گرفتیم. $u=(u_1,u_2)$ سرعت سیال، p فشار و

$f=(f_1,f_2)\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$ کنترل است که $f_{a,i} \le f_i \le f_{b,i}$.

تابع هزینه:

$$J(u,f) = \frac{1}{2}\iint_Q |u(x,t) - u_Q(x,t)|^2\,dx\,dt + \frac{\lambda}{2}\iint_Q |f(x,t)|^2\,dx\,dt$$

$$W(0,T)=\{u\in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \;:\; u_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$$

$$\mathcal{W}(0,T)=\{v=(v_1,v_2)\in W(0,T)\times W(0,T) \;:\; \operatorname{div} v=0\}$$

قضیه وجود و یکتایی جواب: برای هر $u_0\in L^2(\Omega)$ و $f\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ مسأله نویر-استوکس جواب ضعیف یکتای $u\in \mathcal{W}(0,T)$ است.

نگاشت کنترل-حالت $\mathcal{W}(0,T) \longrightarrow G: L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ دوبار مشتق پذیر است.

مسأله کنترل بهینه: پیوستگی G و تحدب F_{ad} برای وجود کنترل بهینه کافی است.

$$\mathcal{L}(u,p,f,w,q)=J(u,f)+\iint_Q q\operatorname{div} u\,dx\,dt-\iint_Q\left(u_t-\kappa\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p-f\right)\cdot w\,dx\,dt$$

$$0 = D_p \mathcal{L} \cdot p = -\iint_Q \nabla p \cdot \omega \, dx\,dt = -\iint_\Sigma p\,\omega \cdot \vec{n} \, d\sigma\,dt + \iint_Q p \,\mathrm{div}\,\omega \, dx\,dt \quad \forall p$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\omega = 0 \quad \text{in } Q, \qquad \omega \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{on } \Sigma}$$

$$0 = D_u \mathcal{L} \cdot u = \iint_Q (\bar{u} - u_Q) \cdot u + q \,\mathrm{div}\, u - \left[u_t - k \Delta u + (\bar{u} \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) \bar{u} \right] \cdot \omega$$

$$\forall u \text{ s.th. } u(\cdot, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} -\omega_t - k \Delta \omega + (\nabla \bar{u})^T \omega - (\bar{u} \cdot \nabla) \omega + \nabla q = \bar{u} - u_Q & \text{in } Q \\ \omega(\cdot, T) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \omega = 0 & \text{on } \Sigma \end{cases}}$$

مسأله الحاقی برای (ω, q)

شرط لازم بهینگی :

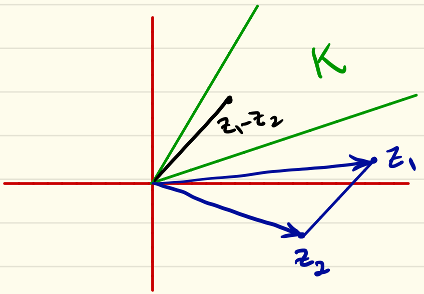
$$\iint_Q (\lambda \bar{f} + \omega)\cdot(f-\bar{f})\,dx\,dt \geq 0 \qquad \forall f \in F_{ad}$$

مسائل بهینه‌سازی در فضاهای باناخ

U و Z فضاهای باناخ هستند و $C \subset U$ یک مجموعه محدب ناتهی است.

تعریف- مجموعه $K \subset Z$ را یک مخروط می‌نامیم هرگاه برای هر $z \in K$ و $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $\lambda z \in K$.

تعریف- اگر $K \subset Z$ یک مخروط محدب باشد. می‌نویسیم $z_1 \geq_K z_2$ اگر و تنها اگر $z_1 - z_2 \in K$.



اگر $z_1 \geq_K z_2$ و $z_2 \geq_K z_3$ آنگاه $z_1 \geq_K z_3$.

$\Downarrow$ $z_1 - z_2 \in K$

$\Downarrow$ $z_2 - z_3 \in K$

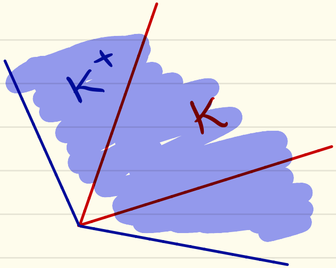
چون K محدب است

$$\frac{1}{2}(z_1 - z_3) = \frac{(z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)}{2} \in K$$

و چون مخروط است $z_1 - z_3 \in K$.

نکته- اگر $z_1 \geq_K z_2$ آنگاه $-z_2 \geq_K -z_1$.

تعریف- اگر $K\subseteq Z$ یک مخروط محدب باشد، مخروط دوگان آن به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$K^+=\{z^*\in Z^* : \langle z^*, z\rangle_{Z^*,Z} \geq 0 \quad \forall z\in K \}$$

مثال- $Z=L^2(\Omega)$ و $K=\{z\in L^2(\Omega) : z(x)\geq 0 \text{ a.e. in } \Omega\}$ یک مخروط محدب است.

می‌دانیم $Z^*=L^2(\Omega)$ بنابراین $z^*\in K^+$ اگر و تنها اگر

$$\langle z^*, z\rangle = \int_\Omega z^*(x) z(x)\, dx \geq 0 \quad \forall z\in K$$

$$\Longrightarrow \quad z^*\geq 0$$

درنتیجه $K^+=K$.

مثال - اگر $K=\{0\}$ و Z یک فضای باناخ دلخواه آنگاه $K^+=Z^*$.

مثال - اگر $K=Z$ آنگاه $K^+=\{0\}$.

فرض کنید $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد و $G: U \longrightarrow Z$ عملگر محدب.

مسأله بهینه‌سازی زیر بررسی شود:

$$(*)\begin{cases} \min f(u) \\ u\in C, \quad G(u)\leq_K 0 \end{cases}$$

تعریف - تابع f محدب است یعنی برای هر $u,v\in C$ و $0\leq\lambda\leq 1$ داشته باشیم

$$f(\lambda u+(1-\lambda)v)\leq \lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)$$

عملگر G محدب است یعنی داشته باشیم

$$G(\lambda u+(1-\lambda)v)\leq_K \lambda G(u)+(1-\lambda)G(v)$$

تابع $L : U \times Z^* \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر لاگرانژینِ متناظر مسأله $(*)$ است:

$$L(u, z^*) = f(u) + \langle z^*, G(u) \rangle_{Z^*, Z}$$

دوتاییِ $(\bar{u}, z^*) \in U \times K^+$ یک نقطهٔ زینیِ L گفته می‌شود هرگاه

$$L(\bar{u}, v^*) \leq L(\bar{u}, z^*) \leq L(u, z^*) \quad \forall u \in C, \ \forall v^* \in K^+$$

قضیه: فرض کنید $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی محدب و $G : U \longrightarrow Z$ عملگر محدب باشد و $\bar{u}$ جواب مسأله $(*)$ باشد. به‌علاوه وجود دارد که $\tilde{u} \in C$

$$-G(\tilde{u}) \in \operatorname{int} K$$

در این صورت $z^* \in K^+$ وجود دارد به طوری که $(\bar{u}, z^*)$ یک نقطهٔ زینیِ لاگرانژینِ L است. به‌علاوه

$$(1) \qquad \langle z^*, G(\bar{u}) \rangle_{Z^*, Z} = 0$$

مثال - $C \subseteq \mathbb{R}^n$ و A ماتریس $m \times n$ است.

$$\begin{cases} \min f(u) \\ Au \leq 0, \quad u \in C \end{cases}$$

در این حالت $K = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \geq 0\}$. اگر $\tilde{u} \in C$ وجود داشته باشد که $A\tilde{u} < 0$.

در نتیجه $z^* \in K^+ = K$ وجود دارد که

$$z^* \cdot A\bar{u} = 0$$

در نتیجه $(A\bar{u})_i < 0$ آنگاه $z^*_i = 0$.

قضیه - اگر f و G به معنای گاتو مشتق‌پذیر باشند و $\bar{u}$ جواب مسأله $(*)$ باشد. آنگاه

$$D_u L(\bar{u}, z^*)(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in C \qquad (2)$$

تعریف — هر $z^* \in K^+$ که در (1) و (2) قبل صدق کند را ضریب لاگرانژ متناظر $\bar{u}$ می‌نامیم.

نکته - به راحتی می‌توان دید که

$$D_u L(\bar u, z^*)(u-\bar u) = f'(\bar u)(u-\bar u) + \langle z^*, G'(\bar u)(u-\bar u)\rangle_{Z^*,Z}$$

$$= \langle f'(\bar u) + (G'(\bar u))^* z^*, \ u-\bar u \rangle_{U^*,U}$$

($(G'(\bar u))^* : Z^* \to U^*$ و $G'(\bar u) : U \to Z$ دقت کنید)

اگر $\bar u$ نقطه درونی C باشد، آنگاه $f'(\bar u) + G'(\bar u)^* z^* = 0$ (که تساوی در U^* هم‌ارز است)

یا به عبارتی تساوی $f'(\bar u) = -G'(\bar u)^* z^*$ برای یک $z^* \in K^+$

برقرار است.

اگر $\bar{u}$ نقطه درونی نباشد، آنگاه به ازای

$$\langle f'(\bar{u}) + G'(\bar{u})^* z^* \,,\, v \rangle \geq 0 \qquad \forall\, v \in TC(\bar{u})$$

که $TC(\bar{u})$ مخروط مماسی C در نقطه $\bar{u}$ است. با تعریف دوگان مخروط خواهیم داشت:

$$f'(\bar{u}) + G'(\bar{u})^* z^* \in \left(TC(\bar{u})\right)^+$$

کنترل بهینه

جلسه بیست و دوم ۹۸/۱۰/۲

مثال - $u_d \in L^2(\Omega)$ و $f(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}|u(x) - u_d(x)|^2 \, dx$ می‌خواهیم مسأله بهینه‌سازی زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \min f(u) \\ u(x) \le 0 \quad \text{in } \Omega \end{cases}$$

$U = Z = L^2(\Omega)$ ، $C = U$ ، $G = I$ عملگرهایی

$K = \{u \in L^2(\Omega) : u(x) \ge 0 \ \text{a.e.}\}$. با این تعاریف به مسأله

$$\begin{cases} \min f(u) \\ G(u) \le_K 0 \end{cases}$$

می‌رسیم. چون K نقطه درونی ندارد، عملاً نمی‌توانیم از قضیه‌ی قبلی استفاده کنیم. با یکسان گرفتن $Z^* = L^2(\Omega)$ لاگرانژین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(u, \mu) = f(u) + (\mu, G(u))_{L^2} = \int_\Omega \frac{1}{2}|u - u_d|^2 + \mu(x) u(x) \, dx$$

از طرف دیگر مسأله بهینه‌سازی بالا را می‌توان به صورت
$$\begin{cases} \min f(u) \\ u \in -K \end{cases}$$
در نظر گرفت و چون f مشتق‌پذیر است

در نقطه بهینه $\bar{u}$ خواهیم داشت :

$$f'(\bar{u})\,(u-\bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \in K$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\bar{u}-u_d)(u-\bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \leq 0$$

$$u(x) = \begin{cases} 2\bar{u}(x) & \bar{u}(x) \geq u_d(x) \\ \frac{1}{2}\bar{u}(x) & \bar{u}(x) < u_d(x) \end{cases}$$

$$0 \leq \int_\Omega (\bar{u}-u_d)(u-\bar{u})\, dx = -\int_\Omega |\bar{u}-u_d|\,|u-\bar{u}|\, dx$$

$$\leq -\frac{1}{2}\int_\Omega |\bar{u}-u_d|\,|\bar{u}(x)|\, dx$$

درنتیجه در نقاطی که $\bar{u}(x)<0$ داریم $\bar{u}(x) = u_d(x)$. (1)

همچنین در نقاطی که $\bar{u}(x) = 0$ باید داشته باشیم

$$(2) \quad u_d(x) \geq 0$$

هر چند شرط نقطه درونی قضیه طبق قبل برقرار نیست ولی تابع $\mu \in K^+ = K$ وجود دارد که

$$\left(\mu, G(\bar{u})\right)_{L^2} = 0 \Rightarrow \int_\Omega \mu(x)\, \bar{u}(x)\, dx = 0$$

در واقع تابع μ برابر است با $\mu(x) = u_d(x) - \bar{u}(x)$. از (1) و (2) به راحتی می‌توان دید که $0 \leq \mu(x)$ a.e.

به علاوه شرط $D_u L(\bar{u}, \mu)(u - \bar{u}) \geq 0$ برای هر $u \in L^2$ برقرار است زیرا

$$\int_\Omega (\bar{u} - u_d)(u - \bar{u}) + \underbrace{\mu}_{u_d - \bar{u}}(u - \bar{u})\, dx = 0$$

مثال- مسأله مثال قبل با قید $-1 \le u(x) \le 1$ حل می‌کنیم. این دو شرط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$u(x)-1 \le 0 \quad \text{و} \quad -u(x)-1 \le 0$$

$$G(u) = \begin{pmatrix} u(x)-1 \\ \\ -u(x)-1 \end{pmatrix} : U = L^2 \longrightarrow Z = L^2 \times L^2$$

$$K = \left\{ (v, w) \in L^2 \times L^2 \ : \ v(x), w(x) \ge 0 \ \text{ a.e. in } \Omega \right\}$$

به وضوح $K^+ = K$. و صورت‌بندی مسأله به صورت

$$\begin{cases} \min \ f(u) \\ G(u) \le_K 0 \end{cases}$$

$$L(u, \mu_1, \mu_2) = f(u) + \underbrace{(\mu_1, u-1)_{L^2} + (\mu_2, -u-1)_{L^2}}_{(\mu, G(u))_{L^2 \times L^2}}$$

مشابه مثال قبل قضایای قبل برقرارند و ضریب لاگرانژ (μ_1,μ_2) وجود دارد هرچند K نقطه درونی ندارد.

تذکر- در مثالهای قبل می‌توان فضای باناخ Z را برابر $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ قرار داد. در این صورت مخروط ترتیب مثبت نقطه درونی دارد و شرایط قضیه جلسه قبل برقرار است. در نتیجه به کمک همان قضیه می‌دانیم ضریب لاگرانژ $\mu \in K^+ \subseteq (\mathcal{L}^\infty)^*$ وجود دارد. ولی فضای $(\mathcal{L}^\infty)^*$ فضای توپولوژیک بسیار حتی بزرگتر از $\mathcal{L}^1(\Omega)$ است. لذا باز با این تغییر قضیه جلسه قبل کارایی ندارد.

تعریف- فرض کنید $\bar{u} \in C$ که $G(\bar{u}) \le_K 0$. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$C(\bar{u}) = \{ \alpha(u-\bar{u}) : \alpha \ge 0 , u \in C \}$$

$$K(\bar{z}) = \{ \beta(z-\bar{z}) : \beta \ge 0 , z \in K \}$$

شرط زیر به Zowe-Kurcyusz معروف است:

$$(3) \qquad G'(\bar{u})C(\bar{u}) + K(-G(\bar{u})) = Z$$

یعنی به ازای هر $z \in Z$ ، $\alpha, \beta \geq 0$ و $v \in K$ و $u \in C$ وجود داشته باشند که

$$\alpha G'(\bar{u})(u-\bar{u}) + \beta(v + G(\bar{u})) = z$$

قضیه ـ فرض کنید $\bar{u}$ جواب موضعی مسأله $\begin{cases} \min f(u) \\ G(u) \leq_K 0 \end{cases}$ باشد و توابع f و G به طور پیوسته مشتق‌پذیر در همسایگی $\bar{u}$ باشند. اگر شرط (3) برقرار باشد، آنگاه ضریب لاگرانژین $z^* \in Z^*$ متناظر $\bar{u}$ وجود دارد.

به علاوه مجموعه همه ضرایب لاگرانژ متناظر $\bar{u}$ کران‌دار است.

مثال- فرض کنید قید مسأله بهینه‌سازی تساوی باشد به جای نامساوی. یعنی $G(u)=0$.

مثل این است که $K=\{0\}$ انتخاب شود و $K^+=Z^*$.

در این حالت شرط (3) معادل این است که

$$G'(\bar{u})C(\bar{u}) = Z$$

از لزوم برای وجود ضریب لاگرانژین $z^*\in Z^*$ باید نامساوی زیر برقرار باشد:

$$D_u\mathcal{L}(\bar{u},z^*)(u-\bar{u}) = f'(\bar{u})(u-\bar{u}) + \langle z^*, G'(\bar{u})(u-\bar{u})\rangle_{Z^*,Z} \geq 0 \qquad \forall u\in C$$

(شرط دیگر ضریب لاگرانژین $\langle z^*, G(\bar{u})\rangle = 0$ به وضوح برقرار است.)

مثال- فرض کنید $\bar{u}$ جواب بهینه مسأله باشد و $G(\bar{u}) <_K 0$. (یعنی $-G(\bar{u})$ نقطه درونی K است)

با این فرض می‌توان شرط (3) را نتیجه گرفت. یعنی برای هر $z \in Z$ می‌توان معادله زیر را حل کرد:

$$\alpha G'(\bar{u})(u-\bar{u}) + \beta\left(v+G(\bar{u})\right) = z$$

برای حل این معادله قرار دهید $u=\bar{u}$. نشان می‌دهیم $0 \le \beta$ و $v \in K$ وجود دارند که

$$\beta\left(v+G(\bar{u})\right) = z$$

یا به طور معادل کافیست نشان دهیم که $0 \le \beta$ وجود دارد که

$$0 \le_K z - \beta G(\bar{u}) .$$

چون $-G(\bar{u})$ نقطه درونی است پس برای $\|p\|_Z < \epsilon$ ، $p - G(\bar{u}) \in K$

$$\Rightarrow \quad \beta p - \beta G(\bar{u}) \in K .$$

کافیست $\beta p = z$.

مثال - اگر فرض کنیم

$$\exists \tilde{u} \in C \qquad G(\bar{u}) + G'(\bar{u})(\tilde{u}-\bar{u}) <_K 0$$

آنگاه شرط (3) برقرار است. برای حل معادله

$$\alpha G'(\bar{u})(u-\bar{u}) + \beta(v+G(\bar{u})) = z$$

قرار دهید $\alpha=\beta$ ، $x=\tilde{u}$.

$$\alpha\left[\underbrace{G'(\bar{u})(\tilde{u}-\bar{u})+G(\bar{u})}_{\bar{z}} + v\right] = z$$

باید $\alpha \geq 0$ پیدا شود که

$$0 \leq_K z - \alpha\bar{z}$$

چون $\bar{z}$ نقطه درون K است مشابه مثال قبل α وجود دارد.

کنترل بهینه

جلسه بیست و سوم ۹۸/۱۰/۷

شرط Zowe-Kurcyusz

$$(ZK) \qquad G'(\bar{u})\, C(\bar{u}) + K(-G(\bar{u})) = Z$$

که

$$C(\bar{u}) = \{ \alpha(u-\bar{u}) : \alpha \geq 0 ,\ u \in C \}$$

$$K(\bar{z}) = \{ \beta(z-\bar{z}) : \beta \geq 0 ,\ z \in K \}$$

اگر $\bar{u}$ جواب
$$\begin{cases} \min f(u) \\ G(u) \leq_K 0 \end{cases}$$
باشد که شرط (ZK) برای آن برقرار است آنگاه ضریب لاگرانژ z^* متناظر آن وجود دارد. یعنی

$$\begin{cases} \langle z^*, G(\bar{u}) \rangle_{Z^*,Z} = 0 \\ D_u L(\bar{u}, z^*)(u-\bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \in C \end{cases}$$

مثال - $\min\limits_{u \in L^2(\Omega)} f(u) = \int_\Omega \psi(x, u(x))\,dx$ با قید $u(x) \le u_b(x)$.

ψ یک نگاشت به اندازه کافی هموار و $u_b \in L^\infty(\Omega)$.

مخروط شامل توابع مثبت $= K \subseteq L^2(\Omega)$.

$G(u) := u - u_b$. $\Leftarrow$ $G' = id$ بنابراین شرط (ZK) معادل است با :

$$\underbrace{C(\bar{u})}_{L^2(\Omega)} + K(u_b - \bar{u}) = L^2(\Omega)$$

که به وضوح برقرار است. (توجه کنید $C = L^2(\Omega)$) درنتیجه $z^* \in K^+ = K$ وجود دارد که

$$\langle f'(\bar{u}) + G'(\bar{u})^* z^*, u - \bar{u} \rangle \ge 0 \quad \forall u \in C \qquad (z^*, \bar{u} - u_b)_{L^2} = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$f'(\bar{u}) + z^* = 0$$

درنتیجه شرط لازم برای جواب این مسأله عبارت است از:

$$0 = \left(f'(\bar{u}),\ \bar{u} - u_b\right)_{L^2} = \int_\Omega \psi_u(x, \bar{u}(x)) \cdot (\bar{u} - u_b)\, dx$$

به علاوه
$$\psi_u(x, \bar{u}(x)) \leq 0$$

مثال ـ مسأله قبل با قید دوطرفه $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$

$$G(u) := \begin{pmatrix} u_a - u \\ u - u_b \end{pmatrix}, \qquad Z = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

داریم
$$G'(\bar{u})v = \begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix}$$

و شرط (ZK) معادل است با اینکه: برای هر $z_1, z_2 \in L^2$ توابع $v \in L^2$ و $u, w \geq 0$ و ثابت $\beta \geq 0$ وجود داشته باشد که

$$\begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_a - \bar{u} + u \\ \bar{u} - u_b + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

به وضوح چنین شرطی نمی‌تواند برقرار باشد.

مسأله کنترل شبه خطی :

$$\begin{cases} -\Delta y + y + y^3 = v & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,v) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|_{L^2}^2 + \lambda/2\,\|v\|_{L^2}^2$$

$$v \in V_{ad} = \{ v \in L^2 : -1 \le v(x) \le 1 \}$$

قرار دهید :

$$C = \{ (y,v) \in U : \partial_n y = 0 \,,\ v \in V_{ad} \} \,, \quad U = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

در نتیجه باید مسأله بهینه سازی $\min_{u \in C} J(u)$ با قید معادله دیفرانسیل که در بالا آمده است . برای تعریف قید معادله دیفرانسیل قرار دهید :

$$Y = H^1(\Omega) \,, \quad A = -\Delta + I : Y \longrightarrow Y^*$$

عملگر غیرخطی $y \mapsto y^3$ ، $\Phi : Y \longrightarrow L^2(\Omega)$ برای $N \le 3$ خوش تعریف است .

نشاندن طبیعی $B : L^2(\Omega) \longrightarrow Y^*$ نیز وجود دارد . در نتیجه معادله دیفرانسیل بالا به این صورت بیان می شود :

$$G(y,v) = Ay + B(\Phi(y) - v) = 0$$

بررسی شرط (ZK): چون قید تساوی $G(u)=0$ داریم بنابراین است که $K=\{0\}$ و شرط (ZK) معادل است با

$$G'(\bar{u})\,C(\bar{u}) = Z$$

$$G'(\bar{y},\bar{v})(y,v) = Ay + B\left(\Phi'(\bar{y})y - v\right)$$

$$C(\bar{u}) = \left\{ (y, \alpha(v-\bar{v})) : \partial_n y = 0 \;,\; v \in V_{ad} \;,\; \alpha \geq 0 \right\}$$

در نتیجه باید برای هر $z \in Z = Y^*$ توابع $y \in H^1$ و $v \in V_{ad}$ و ثابت $\alpha \geq 0$ وجود داشته باشند که

$$Ay + B\left(3\bar{y}^2 y - \alpha(v-\bar{v})\right) = z$$

یا به طور معادل y جواب معادله زیر باشد:

$$\begin{cases} -\Delta y + (1+3\bar{y}^2)y = z + \alpha(v-\bar{v}) \\ \partial_n y = 0 \end{cases}$$

که به وضوح برای $\alpha = 0$ جواب دارد.

درنتیجه ضریب لاگرانژین وجود دارد و شرط لازم بهینگی عبارت است از:

$$L(y,v,z^*) = J(y,v) + \langle z^*, G(y,v) \rangle$$

درنتیجه $z^* \in Z^* = H^1(\Omega)$ وجود دارد که برای هر $(y,v) \in C$

$$(\bar{y} - y_\Omega, y)_{L^2} + \lambda(\bar{v}, v)_{L^2} + \langle z^*, Ay + B(3\bar{y}^2 y - v) \rangle_{Y,Y^*} \geq 0$$

از طرفی:

$$\langle z^*, Ay \rangle_{Y,Y^*} = \int_\Omega z^*(-\Delta y + y)\, dx = \int_\Omega (-\Delta z^* + z^*) y + \int_{\partial\Omega} \partial_n z^* y$$

درنتیجه:

$$\left(Az^* + B(\bar{y} - y_\Omega + 3\bar{y}^2 z^*), y \right)_{Y^*,Y} + \int_{\partial\Omega} \partial_n z^* \cdot y + \lambda(\bar{v}, v) - \langle z^*, Bv \rangle \geq 0$$

عبارت بالا نسبت به y و v خطی است و توابع y و v مستقل هستند. پس هر عبارت به صورت مجزا باید مثبت باشد.

$$\left(Az^* + B(\bar{y} - y_\Omega + 3\bar{y}^2 z^*)\,,\, y\right)_{Y^*, Y} + \int_{\partial\Omega} \partial_n z^* \cdot y \geq 0 \qquad \forall y \in H^1(\Omega)$$

$$\partial_n y = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \cdots\cdots \quad = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Az^* + B(\bar{y} - y_\Omega + 3\bar{y}^2 z^*) = 0 \\ \partial_n z^* = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\Delta z^* + z^* + 3\bar{y}^2 z^* = y_\Omega - \bar{y} & \text{in } \Omega \\ \partial_n z^* = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

به علاوه باید:

$$\lambda(\bar{v}, v) - \langle z^*, Bv \rangle \geq 0 \qquad \forall v \in V_{ad}$$

مسائل کنترل بهینه

$$\begin{cases} -\Delta y + y = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

$$y(x) \leq 0$$

سؤال: شرایط لازم برای کنترل بهینه تابع هزینه زیر با شرایط بالا چیست؟

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

فرض: $\tilde{u} \in U_{ad}$ وجود دارد که جواب متناظر آن $\tilde{y}$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\tilde{y}(x) < 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

به دو روش می‌توان به مسأله نگاه کرد:

روش اول: عملگر کنترل - حالت $u \longmapsto y = Su$ را در نظر بگیرید و مسأله بهینه‌سازی زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \min\limits_{u \in U_{ad}} f(u) = J(Su, u) \\ G(u) = Su \leq_K 0 \end{cases}$$

که K مخروط توابع مثبت است.

$$U_{ad} = \{ u : u_a \leq u \leq u_b \}$$

روش دوم: $C = \{ (y,u) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) : \ y \leq 0 \ , \ \partial_n y = 0 \ , u_a \leq u \leq u_b \}$ و مسأله بهینه‌سازی به صورت

زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \min\limits_{(y,u) \in C} J(y,u) \\ G(y,u) = -\Delta y + y - u = 0 \end{cases} \qquad G : H^1 \longrightarrow (H^1)^*$$

روش اول:

اگر $U = L^r(\Omega)$ که $r > \frac{N}{2}$ آنگاه PDE برای هر $u \in U$ دارای جواب $y \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ است. بنابراین عملگر کنترل ـ حالت به صورت $S : L^r \longrightarrow C(\bar{\Omega})$ تعریف می‌شود.

همچنین قرار دهید $Z = C(\bar{\Omega})$ و $G : U \longrightarrow Z$ را با ضابطه $G(u) = Su$ در نظر بگیرید.

Z^* فضای همه اندازه‌های برل روی $\bar{\Omega}$ خواهد بود.

$K \subseteq C(\bar{\Omega})$ مخروط توابع مثبت در نظر بگیرید. در این صورت K^+ همه اندازه‌های برل مثبت است.

$$\operatorname{Int} K = \{ \text{همه توابع اکیداً مثبت روی } \bar{\Omega} \}$$

بنابه فرض مسأله ضریب لاگرانژ $\mu \in K^+$ وجود دارد، یعنی

$$f'(\bar{u})(u-\bar{u}) + \langle \mu, G'(\bar{u})(u-\bar{u}) \rangle \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

$$\langle \mu, G(\bar{u}) \rangle = \int_{\Omega} \bar{y}(x)\, d\mu = 0,$$

$$f'(\bar u)(u-\bar u) = \left(\bar y - y_\Omega,\, S(u-\bar u)\right)_{L^2} + \lambda\left(\bar u,\, u-\bar u\right)_{L^2}$$

$$= \int_\Omega \left(S^*(\bar y - y_\Omega) + \lambda \bar u\right)(u-\bar u)\,dx$$

اگر $p_1 = S^*(\bar y - y_\Omega)$ باید

$$\begin{cases} -\Delta p_1 + p_1 = \bar y - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ \partial_n p_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(چرا؟)

(در اینجا برای محاسبه عملگر الحاقی S^*، عملگر S را از L^r به L^2 در نظر گرفته‌ام)

$$G'(\bar u) = S \Rightarrow \langle \mu, G'(\bar u)(u-\bar u)\rangle_{Z^*,Z} = \langle S^*\mu, u-\bar u\rangle_{L^{r'},L^r}$$

$$\langle \mu, G'(\bar u)(u-\bar u)\rangle_{Z^*,Z} = \int_\Omega (y-\bar y)\,d\mu, \qquad \langle S^*\mu, u-\bar u\rangle_{L^{r'},L^r} = \int_\Omega p_2(u-\bar u)\,dx$$

که $p_2 = S^*\mu$ در مسئله زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} -\Delta p_2 + p_2 = \mu_\Omega & \text{in } \Omega \\ \partial_n p_2 = \mu_\Gamma & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

که $\mu = \mu_\Omega + \mu_\Gamma$ و تکیه‌گاه اندازه‌های μ_Ω و μ_Γ به ترتیب در Ω و $\partial\Omega$ قرار دارد.

(در اینجا برای محاسبه S^*، عملگر S را از L^r به Z در نظر گرفته‌ام.)

منظور از جواب این PDE تابع $p_2 \in H^1(\Omega)$ است که برای هر $v \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ داشته باشیم:

$$\int_\Omega \left(\nabla p_2 \cdot \nabla v + p_2 v\right) dx = \int_\Omega v \, d\mu_\Omega + \int_{\partial\Omega} v \, d\mu_p$$

شرط لازم بهینگی: $\mu \geq 0$ ، $\int_{\bar{\Omega}} \bar{y}(x)\, d\mu = 0$ ، $\bar{y}(x) \leq 0$ ،

$$\int_\Omega \left(p_1(x) + p_2(x) + \lambda \bar{u}(x)\right)\left(u(x) - \bar{u}(x)\right) dx \geq 0$$

کنترل بهینه

جلسه بیست و چهارم ۹۸/۱۰/۹

بهینه‌سازی حالت سیستم در یک نقطه

$$\begin{cases} -\Delta y + y = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha y = u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

$$\min J(y) := y(x_0)$$

برای هر $u \in L^p(\partial\Omega)$ که $p > N-1$ معادله بالا دارای جواب $y \in Y = H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ است.

$$S : L^p(\partial\Omega) \xrightarrow{\text{Control-State}} Y$$

تابع هزینه یک عملگر خطی از کنترل است. در واقع اگر δ_{x_0} اندازه دیراک در نقطه x_0 باشد، آنگاه

$$J(y) = \langle \delta_{x_0}, y \rangle = \langle \delta_{x_0}, Su \rangle = \langle S^* \delta_{x_0}, u \rangle$$

شرط لازم بهینگی :

$$f'(\bar{u})(u-\bar{u}) = \langle S^*\delta_{x_0}, u-\bar{u} \rangle \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

محاسبه S^* :

$$S : L^p \longrightarrow C(\bar{\Omega})$$

$$S^* : M(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^{p'}$$

$$\langle S^*\mu, u \rangle_{L^{p'},L^p} = \langle \mu, Su \rangle = \int_\Omega y(x)\, d\mu$$

اگر p جواب مسئله

$$\begin{cases} -\Delta p + p = \mu & \text{in } \Omega \\ \partial_n p + \alpha p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

باشد، آنگاه

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v + p v\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha p v\, d\sigma(x) = \int_\Omega v\, d\mu \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

بنابراین برای $\mu = \delta_{x_0}$ و $v = y$ خواهیم داشت:

$$\langle S^* \delta_{x_0}, u \rangle = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla y + py \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha p y \, d\sigma(x)$$

$$= \int_{\Omega} p(-\Delta y + y) \, dx + \int_{\partial\Omega} (\partial_n y + \alpha y) p \, d\sigma(x)$$

$$= \int_{\partial\Omega} u p \, d\sigma(x) = \langle p, u \rangle$$

$$\boxed{\forall u \in U_{ad} \qquad \int_{\partial\Omega} p(u - \bar{u}) \, d\sigma(x) \geq 0 \qquad \text{شرط لازم بهینگی}}$$

تابع هزینه با نرم سوپریمم :

$$\min \ J(y,u) := \|y-y_\Omega\|_{C(\bar{\Omega})} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$\begin{cases} -\Delta y + y = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha y = u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

مشکل مبدی : J مشتق‌پذیر نیست .

راه‌حل : $\eta \geq \|y-y_\Omega\|_{C(\bar{\Omega})}$ قرار دهید

مسأله بهینه‌سازی زیر را حل کنید :

$$\min_{\substack{\eta\in\mathbb{R} \\ u\in U_{ad}}} \left\{ \eta + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right\}$$

باقیدهای

$$(PDE) + \begin{cases} y(x) \leq y_\Omega(x) + \eta \\ -y(x) \leq -y_\Omega(x) + \eta \end{cases} \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad (*)$$

شرط (PDE) را می‌توانیم در داخل ناحیه شدنی قرار دهیم. یعنی

$$C = \{ (y,u,\eta) \in H^1(\Omega) \times L^2(\partial\Omega) \times \mathbb{R} : \ y \text{ satisfies } (PDE) \ \& \ u \in U_{ad} \}$$

و مسأله بهینه‌سازی را به صورت

$$\begin{cases} \min\limits_{(y,u,\eta)\in C} \left\{ \eta + \frac{\lambda}{2} \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right\} \\ \text{با شرط } (*) \end{cases}$$

لاگرانژین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(y,u,\eta,\mu_1,\mu_2) = \eta + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \int_\Omega (y - y_\Omega - \eta)\, d\mu_1 + \int_\Omega (-y + y_\Omega - \eta)\, d\mu_2$$

دوباره به شرط وجود کنترل $\tilde{u}$ به طوری که جواب متناظر آن $\tilde{y}$ نقطه درونی مخروط باشد، نیاز است.

$$\tilde{y}(x) < y_\Omega(x) + \eta$$

$$-\tilde{y}(x) < -y_\Omega(x) + \eta$$

کافیست برای یک $\tilde{u}$ دلخواه، η را به اندازه کافی بزرگ بگیریم.

وجود ضریب لاگرانژ یعنی اندازه برل مثبت μ_1 و μ_2 وجود دارند که

$$\langle z^*, G(\bar{u}) \rangle = \boxed{\int_\Omega (\bar{y} - y_\Omega - \bar{\eta})\, d\mu_1 + \int_\Omega (-\bar{y} + y_\Omega - \bar{\eta})\, d\mu_2 = 0}$$

$$\operatorname{supp} \mu_1 \subseteq \{\bar{y} - y_\Omega = \bar{\eta}\}$$

$$\operatorname{supp} \mu_2 \subseteq \{\bar{y} - y_\Omega = -\bar{\eta}\}$$

$$D_{(y,u,\eta)} \mathcal{L} \cdot (y - \bar{y},\, u - \bar{u},\, \eta - \bar{\eta}) \geq 0 \qquad \forall (y,u,\eta) \in C$$

$$\Rightarrow D_\eta \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \boxed{\int_\Omega d\mu_1 + d\mu_2 = 1}$$

$$D_{(y,u)}\mathcal{L}\,(y-\bar{y}\,,\,u-\bar{u}) = \lambda\int_{\partial\Omega} \bar{u}\,(u-\bar{u})\,d\sigma + \int_{\bar{\Omega}} (y-\bar{y})\,d(\mu_1-\mu_2)$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\lambda\bar{u}+p)(u-\bar{u})\,d\sigma \geq 0 \qquad \forall\, u\in U_{ad}$$

که p جواب مسأله الحاقی زیر است :

$$\begin{cases} -\Delta p + p = (\mu_1-\mu_2)\big|_{\Omega} & \text{in } \Omega \\ \partial_n p + \alpha p = (\mu_1-\mu_2)\big|_{\partial\Omega} & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$