کنترل بهینه

جلسه اول ۹۸/۶/۳۰

y متغیر حالت سیستم

u متغیر کنترل

رابطه بین کنترل و حالت سیستم $\qquad G(y,u)=0$

y و u ممکن است در شرایط و قیدهای دیگری صدق کنند.

تابع هزینه : $\qquad J(y,u)$

هدف : از بین همه کنترلهای موجود تابع هزینه را مینیمم کنیم.

سوال : آیا کنترل $\bar{u}$ و رفتار سیستم متناظر $\bar{y}$ وجود دارند که

$$J(\bar{y},\bar{u})=\inf J(y,u)$$

مثال ۱ $y(t)$ مکان یک ماشین روی یک خط راست را نشان می دهد که با موتوری که نیروی $u(t)$ به آن وارد می کند حرکت می کند. درضمن فرض می کنیم $\boxed{-1 \leq u(t) \leq 1}$.

می خواهیم از نقطه A شروع به حرکت کند و در نقطه B توقف کند. روابط زیر برقرار است:

$$\boxed{\begin{aligned} & my'' = u \\ & y(0) = A \ , \ y'(0) = 0 \end{aligned}}$$

تابع هزینه را زمان رسیدن در نقطه B است.

$$\boxed{y(T) = B \ , \ y'(T) = 0}$$

$$\inf T$$

y, u در روابط بالا صدق کنند.

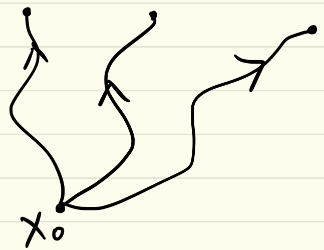
مثال - تابع کنترل $u : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ و حالت سیستم $X : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

که در ODE زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f\left(X(t), u(t)\right) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

همراه با تابع هزینه

$$J(X, u) = \int_0^T g\left(X(t), u(t)\right) dt + h\left(X(T)\right)$$



مثال ۳ ناحیه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید و مرز آن را با منبع دمایی u کنترل می‌کنیم

$$u : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

بنابراین اگر $y(t,x)$ دما در نقطه x در زمان t را نشان دهد در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = 0 & \text{in } [0,T] \times \Omega \\ \partial_n y = \alpha (u - y) & \text{on } (0,T) \times \partial\Omega \\ y(0,x) = y_0(x) & \end{cases}$$

به علاوه فرض می‌کنیم $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$ برای توابع ثابت u_a و u_b.

$$J(y,u) = \int_{\Omega} |y(x,T) - \underbrace{y_{\Omega}(x)}_{\text{دمای مطلوب}}|^2 \, dx + \lambda \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 \, dx$$

مثال ۴ـ منبع گرمایی را داخل ناحیه Ω در نظر می‌گیریم و فرض کنیم سیستم به حالت تعادل رسیده باشد

$$\begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

تابع هزینه $\quad J(y,u) = \int_\Omega |y(x) - y_\Omega(x)|^2 \, dx + \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx$

مثال ۵ : $u(t,x)$ سرعت یک سیال تراکم ناپذیر در نقطه x باشد. این تابع در معادلات زیر به نام Navier-Stokes صدق می‌کند:

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{R}\Delta u + (u.\nabla)u + \nabla p = f & \text{in } [0,T]\times\Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \\ u = 0 & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

R ثابت Reynolds است. $u=(u_1,u_2,u_3)$

p فشار سیال در نقطه x است که مجهول است

f نیروی وارده به سیال است که به عنوان کنترل در نظر می‌گیریم.

مسأله کنترل بهینه خطی در بعد متناهی

$$(OP)_1 \quad \begin{cases} \min \; J(y,u) \\ \underbrace{A}_{m\times m} y = \underbrace{B}_{m\times n} u, \quad u \in U_{ad} \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

به علاوه فرض کنیم A وارون پذیر است. در نتیجه

$$y = A^{-1} B u$$

و

$$J(y,u) = J(A^{-1}Bu, u) =: f(u)$$

قضیه: اگر تابع هزینه J پیوسته باشد و U_{ad} فشرده آنگاه $(OP)_1$ یک کنترل بهینه دارد یعنی $\bar{u} \in U_{ad}$ وجود دارد که

$$\min J(y,u) = f(\bar{u})$$

قضیه- اگر f مشتق‌پذیر باشد و $\bar{u}$ کنترل کننده بهینه برای آن باشد، آنگاه، رابطه زیر برقرار است:

$$f'(\bar{u})(u-\bar{u}) \geq 0 \qquad \forall\, u \in U_{ad}$$

$$f'(\bar{u})(u-\bar{u}) = \frac{d}{dt} f(\bar{u}+t(u-\bar{u}))\Big|_{t=0}$$

اگر شرط بالا را برحسب تابع هزینه J بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$f'(\bar{u})(v) = \nabla_y J \cdot (A^{-1}Bv) + \nabla_u J \cdot v$$

$$= \langle \underbrace{(A^{-1}B)^T}_{B^T(A^{-1})^T} \nabla_y J + \nabla_u J \,,\, v \rangle$$

نکته- محاسبه A^{-1} پیچیده است.

$$(A^{-1})^T \nabla_y J = P \rightsquigarrow A^T P = \nabla_y J(y,u)$$

شرط بهینگی سیستم عبارت خواهد بود از:

سیستم بهینگی

$$\boxed{\begin{aligned} &\langle B^T \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y},\bar{u}),\, u-\bar{u} \rangle \geq 0 \qquad \forall u \in \mathcal{U}_{ad} \\ &A\bar{y} = B\bar{u} \\ &A^T \bar{p} = \nabla_y J(\bar{y},\bar{u}) \end{aligned}}$$

معادله الحاقی ←

مثال- اگر تابع هزینه به صورت

$$J(y,u) = \frac{1}{2}|Cy - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2$$

$$\nabla_y J = C^T(Cy - y_d) \quad , \quad \nabla_u J = \lambda u$$

به علاوه اگر $\mathcal{U}_{ad} = \mathbb{R}^m$ آنگاه سیستم بهینگی به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{cases} B^T\bar{p} + \lambda\bar{u} = 0 \\ A\bar{y} = B\bar{u} \\ A^T\bar{p} = C^T(C\bar{y} - y_d) \end{cases} \longrightarrow \text{یک دستگاه خطی با مجهول‌های } (\bar{y},\bar{u},\bar{p})$$

روش لاگرانژین برای حل $(OP)_1$:

$$L(y,u,p) = J(y,u) - (Ay - Bu, p)$$

نقش ضریب لاگرانژین را دارد.

$$L : \mathbb{R}^m \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

معادله الحاقی $\longleftrightarrow$ $\nabla_y L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) = 0$

شرط بهینگی $\longleftrightarrow$ $\left(\nabla_u L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}), u - \bar{u}\right)_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}$

شرط سیستم $\longleftrightarrow$ $\nabla_p L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) = 0$

نکته: اگر مجموعه شدنی U_{ad} به صورت زیر تعریف شود:

$$U_{ad} = \{ u \in \mathbb{R}^n : u_a \leq u \leq u_b \}$$

شرط بهینگی به صورت

$$\left(B^T \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}) , \bar{u} \right)_{\mathbb{R}^n} \leq \left(B^T \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}) , u \right)_{\mathbb{R}^n} \quad \forall u \in U_{ad}$$

خواهد بود. یعنی

$$\left(B^T \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}) , \bar{u} \right)_{\mathbb{R}^n} = \min_{u \in U_{ad}} \left(B^T \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}) , u \right)_{\mathbb{R}^n}$$

در نتیجه

$$\bar{u}_i = \begin{cases} u_{b,i} & \text{if} \quad \left(B^T \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}) \right)_i < 0 \\ u_{a,i} & \text{if} \quad \left(B^T \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}) \right)_i > 0 \end{cases}$$

سیستم KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

$$\mu_a := \left(B^T \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u})\right)_+$$

$$\mu_b := \left(B^T \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u})\right)_-$$

از نکته صفحه قبل نتیجه می‌شود که

$$(u_a - \bar{u}, \mu_a)_{\mathbb{R}^n} = 0 , \qquad (\bar{u} - u_b, \mu_b)_{\mathbb{R}^n} = 0$$

این شرایط را KKT می‌نامیم.

کنترل بهینه

جلسه دوم ۹۸/۷/۱

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک ناحیه دلخواه در نظر بگیرید، برای $1 \le p < \infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ , \ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

برای $p = \infty$:

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} :$ f تقریبا همه جا کران دار است $\}$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

$C^k(\Omega)$ همه توابعی که مشتقات آنها تا مرتبه k-ام پیوسته است.

برای $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ تعریف می‌کنیم

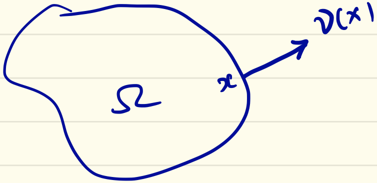
$$D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} u \,, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

$$\|u\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

که برای $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ منظور از $D^\alpha u$ همان تابع u است.

$C_0^k(\Omega)$ همه توابع k-بار مشتق پذیر که خود تابع و مشتقات آن روی $\partial\Omega$ برابر صفر هستند.

تعریف مشتق ضعیف :



فرمول گرین : برای $u,v\in C^1(\Omega)$

$$\int_\Omega u(x)\,\partial_i v(x)\,dx = -\int_\Omega v(x)\,\partial_i u(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\,v(x)\,\nu_i(x)\,ds$$

که $\vec{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ بردار عمود بر $\partial\Omega$ و برونگرا است.

اگر $v=0$ روی $\partial\Omega$ آنگاه

$$\int_\Omega u(x)\,\partial_i v(x)\,dx = -\int_\Omega v(x)\,\partial_i u(x)\,dx$$

حال اگر $u\in L^1(\Omega)$ به طوری که آیا $w\in L^1(\Omega)$ وجود داشته باشد که

$$\int_\Omega u(x)\,\partial_i v(x)\,dx = -\int_\Omega v(x)\,w(x)\,dx \qquad \forall v\in C_0^1(\Omega)$$

در این صورت w را مشتق ضعیف تابع u می‌نامیم و با $\partial_i u$ نشان می‌دهیم.

به طوری که برای هر دو تابع هموار u و v که $v \in C_0^k(\Omega)$ داریم

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)\, v(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\, D^\alpha v(x)\, dx$$

و به کمک آن مشتق ضعیف $D^\alpha u$ به طور زیر تعریف می‌شود.

مثال ـ $u : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $u(x) = |x|$ را در نظر بگیرید. مشتق ضعیف u برابر است با

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}$$

باید نشان دهیم:
$$-\int_{-1}^{1} |x|\, v'(x)\, dx = \int_{-1}^{1} u'(x)\, v(x)\, dx = \int_{-1}^{0} -v(x)\, dx + \int_{0}^{1} v(x)\, dx$$

برای هر تابع دلخواه $v \in C_0^1(-1,1)$

$$-\int_{-1}^{1} |x|\, v'(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x\, v'(x)\, dx - \int_{0}^{1} x\, v'(x)\, dx$$

$$= \left(x\, v(x)\right)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} v(x)\, dx \quad - \left(x\, v(x)\right)\Big|_{0}^{1} + \int_{0}^{1} v(x)\, dx$$

با توجه به رابطه $v(1) = v(-1) = 0$ (چون $v \in C_0^1$ است) رابطه بالا به عبارت زیر ساده می‌شود:

$$= -\int_{-1}^{0} v(x)\, dx + \int_{0}^{1} v(x)\, dx$$

مثال- تابع $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ مشتق ضعیف ندارد.

فضاهای سوبولف:

برای $1 \leq p \leq \infty$، فضای سوبولف $W^{k,p}(\Omega)$ را شامل همه توابع $u \in L^p(\Omega)$ می‌گیریم که دارای مشتق ضعیف $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ برای $|\alpha| \leq k$ هستند.

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

برای $p=2$، معمولاً فضای $W^{k,2}(\Omega)$ را با $H^k(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

قضیه: توابع $C^\infty(\bar{\Omega})$ در $W^{k,p}(\Omega)$ چگال هستند. یعنی اگر $u \in W^{k,p}$ دنباله توابع $\varphi_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ وجود دارد که

$$\|u - \varphi_n\|_{W^{k,p}} \longrightarrow 0$$

تعریف- بستار فضای $C_0^\infty(\Omega)$ در $W^{k,p}(\Omega)$ را با $W_0^{k,p}(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

درحقیقت $W_0^{k,p}(\Omega)$ یک زیرفضای بسته $W^{k,p}(\Omega)$ است.

گزاره: برای $\Omega=\mathbb{R}^n$ داریم $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)=W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

تعریف- اگر Ω یک ناحیه هموار باشد، عملگر $T: W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{خطی}} L^p(\partial\Omega)$ وجود دارد که به آن عملگر اثر (Trace) می‌گوییم که

- $\forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \quad , \quad T(\varphi) = \varphi\big|_{\partial\Omega}$
- $\exists\, C>0 \quad , \quad \|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

<u>گزاره:</u> $W_0^{1,p}(\Omega) = \{ u \in W^{1,p}(\Omega) \;:\; Tu = 0 \}$

مسأله پواسون:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

که $f \in L^2(\Omega)$ داده شده است.

تابع u را جواب کلاسیک گوییم هرگاه u دوبار مشتق پذیر باشد و در رابطه بالا صدق کند.

تعریف جواب ضعیف:

اگر معادله بالا را در تابع $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ضرب کنیم و انتگرال بگیریم

$$\int_\Omega f(x)v(x)\,dx = -\int_\Omega \Delta u \cdot v\,dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,dx$$

تابع $u \in H_0^1(\Omega)$ را جواب ضعیف مسأله پواسون گوییم هرگاه

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$a[u,v] := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$a : H_0^1 \times H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرم دوخطی است.

$$F(v) := \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx$$

$F : H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر خطی پیوسته است.

قضیه (Lax-Milgram) اگر V یک فضای هیلبرت باشد، $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرم دوخطی باشد که

الف) پیوسته (یا کران‌دار) باشد یعنی ثابت $0 < \alpha_0$ وجود دارد که

$$a[u,v] \leq \alpha_0 \|u\|_V \|v\|_V$$

ب) بیضوی باشد یعنی ثابت $0 < \beta_0$ وجود دارد که

$$a[u,u] \geq \beta_0 \|u\|_V^2$$

در این صورت به ازای هر عملگر خطی پیوسته $F: V \to \mathbb{R}$ عضو یکتای $u_F \in V$ وجود دارد که

$$a[u_F, v] = F(v) \qquad \forall v \in V$$

وجود جواب معادله پواسون :

$$a[u,v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

بنابر قضیه Lax-Milgram کافی است نشان دهیم

دارای دو خاصیت پیوستگی و کران داری است .

$$a[u,v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$a[u,u] = \int_\Omega |\nabla u|^2 \overset{?}{\geq} \beta_0 \|u\|^2_{H^1_0} = \beta_0 \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 dx\right]$$

یا به طور معادل

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq C \int_\Omega u^2$$

که این نامساوی به نامساوی پوانکاره معروف است، برای هر تابع دلخواه $u \in H^1_0(\Omega)$.

این نامساوی برای توابع $H^1(\Omega)$ درست نیست. (مثلاً تابع ثابت $u \equiv 1$)

ولی اگر $E \subseteq \Omega$ زیرمجموعه اندازه ناصفر باشد، ثابت $C > 0$ وجود دارد که نامساوی پوانکاره

برای همه توابع $u \in H^1(\Omega)$ ، $u|_E \equiv 0$

درست است.

همچنین اگر $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ ، ثابت $0<C_\Gamma$ وجود دارد که

$$C_\Gamma \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Gamma |u|^2 ds$$

به ازای هر $u \in H^1(\Omega)$.

مسأله شرط مرزی روبین :

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x) u = f & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u + \alpha u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

که $0 \leq a(x) \in L^\infty(\Omega)$ ، $0 \leq \alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$

اگر در تابع $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ضرب کنیم

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + a(x) u v \, dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\partial_\nu u}_{g-\alpha u} \cdot v \, d\sigma = \int_\Omega f v$$

بنابراین جواب ضعیف معادله تابع $u\in H^1(\Omega)$ است که

$$\int_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v + a(x)uv\,dx + \int_{\partial\Omega} \alpha uv\,d\sigma = \int_{\Omega} fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,d\sigma$$

بازای هر $v\in H^1(\Omega)$.

با تعریف فرم دوخطی

$$a[u,v] = \int_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v + a(x)\,uv\,dx + \int_{\partial\Omega} \alpha uv\,d\sigma$$

و تابعک خطی

$$F(v) = \int_{\Omega} fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,d\sigma$$

از قضیه Lax-Milgram وجود و یکتایی جواب اثبات می‌شود.

کنترل بهینه

جلسه چهارم 98/7/8

وجود کنترل بهینه :

مسأله بهینه‌سازی زیر را در حالت ایستا:

$$\begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

آیا کنترل بهینه برای تابع هزینه فوق با شرط $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$ وجود دارد؟ در صورت وجود آیا یکتا است؟

$$U_{ad} = \{ u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \}$$

$y = Su$ که $S : U_{ad} \subseteq L^2 \longrightarrow L^2$ عملگر

این عملگر خطی و پیوسته است.

سؤال: آیا $f(u) = J(Su, u)$ در U_{ad} می‌نیمم دارد؟

نکته ۱: $0 \leq f$ پس

$$0 \leq \alpha = \inf_{u \in U_{ad}} f(u)$$

و در نتیجه دنباله $u_n \in U_{ad}$ وجود دارد که

$$f(u_n) \longrightarrow \alpha$$

نکته ۲: چون U_{ad} در $\mathcal{L}^2(\Omega)$ کران‌دار است. بنابراین $\{u_n\}$ در $\mathcal{L}^2(\Omega)$ کران‌دار است و یک زیردنباله‌ای دارد که همگرای ضعیف است. فرض کنیم این زیردنباله همان $\{u_n\}$ باشد.

$$u_n \longrightarrow \bar{u}$$

نکته ۳: U_{ad} در $\mathcal{L}^2$ (به‌طور قوی) بسته و محدب است. در نتیجه در توپولوژی ضعیف نیز بسته است. بنابراین $\bar{u} \in U_{ad}$.

نکته ۴ : f به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است (چرا؟) در نتیجه

$$f(\bar{u}) \leq \liminf f(u_n) = \alpha$$

از طرفی $\alpha = \inf_{u \in U_{ad}} f \leq f(\bar{u})$.

$$\Rightarrow \quad f(\bar{u}) = \alpha \quad \Rightarrow$$ تابع $\bar{u} \in U_{ad}$ کنترل بهینه برای این سیستم است .

برای اینکه نشان دهیم f به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است ، دقت کنید

$$f(u) = \frac{1}{2}\|Su - y_\Omega\|_{L^2}^2 + \underbrace{\lambda/_2 \|u\|_{L^2}^2}_{\text{محدب و پیوسته است} \Rightarrow \text{به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است.}}$$

اگر $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ آنگاه $y_n = S u_n \xrightarrow{L^2} S\bar{u} = \bar{y}$ زیرا

$$-\Delta y_n = \beta u_n$$

بنابر تعریف جواب ضعیف $\Longrightarrow \displaystyle\int_\Omega \nabla y_n \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \beta u_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \beta \bar{u} v \, dx$$

$\Longrightarrow \quad -\Delta y = \beta \bar{u} \quad \overset{\text{یکتایی}}{\Longrightarrow} \quad y = \bar{y}$

در نتیجه $y_n \to \bar{y}$.

نکته ۵: تابع f وقتی $\lambda > 0$ به طور اکید محدب است. یعنی

$$f(\theta u+(1-\theta)v) < \theta f(u)+(1-\theta)f(v) \qquad 0<\theta<1$$

در نتیجه می‌نیمم f روی U_{ad} یکتا است. (U_{ad} محدب است)

نکته ۶: وقتی $\lambda=0$ ،
$$f(u)=\|Su-y_\Omega\|^2$$
(هر چند اکیداً محدب است) و اگر u_1 و u_2 می‌نیمم‌های تابع f باشند

در نتیجه f روی پاره خط واصل بین u_1 و u_2 مقدار ثابت می‌نیمم را می‌گیرد.

$$\inf = f(\theta u_1+(1-\theta)u_2) = \| S u_2+\theta S(u_1-u_2) - y_\Omega\|^2$$

به ازای هر $0\le\theta\le 1$.

$$\Rightarrow \quad S(u_1-u_2)=0 \Rightarrow Su_1=Su_2$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta(Su_1) = -\Delta(Su_2)$$

$$\Rightarrow \quad \beta u_1 = \beta u_2 \quad \Longrightarrow \quad u_1 = u_2 .$$

جمع‌بندی: اگر $\lambda>0$ یا $\beta\neq 0$ تقریباً همه جا در Ω، آنگاه مسأله کنترل بهینه فوق جواب یکتا دارد.

سؤال: اگر $u_b=+\infty$ یا $u_a=-\infty$، در این صورت درخصوص کنترل بهینه چه می‌توان گفت؟

پاسخ: اگر $\lambda>0$ کنترل بهینه وجود دارد.

$$\tilde{U}_{ad} = \{ u_a(x) \leq u(x) \ \text{ in } \Omega \}$$

$$\inf_{u\in \tilde{U}_{ad}} f = \inf_{U_{ad}^{*}} f$$

$$f(u) = \|Su - y_\Omega\|^2 + \lambda \|u\|^2$$

اگر $u_0 \in \tilde{U}_{ad}$ دلخواه باشد، آنگاه کاندیدات اینفیمم را با شرط

$$\|u\|^2 \le \frac{f(u_0)}{\lambda}$$

پیدا کنیم.

$$U^*_{ad} = \tilde{U}_{ad} \cap \left\{ u \in L^2 : \|u\|^2 \le \frac{f(u_0)}{\lambda} \right\}$$

به وضوح U^*_{ad} در $L^2(\Omega)$ کران‌دار است و اثبات قبل همچنان برقرار است.

مثال- کنترل مرزی در حالت تعادل زمانی.

$$\begin{cases} -\Delta y = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = \alpha(u-y) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$U_{ad} = \{ u \in L^2(\partial\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2} \| y - y_\Omega \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2} \| u \|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$S : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$u \longmapsto y$$

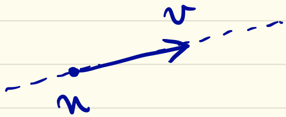
نگاشت خطی و پیوسته است.

قضیه: این مسأله کنترل بهینه جواب یکتا دارد اگر $\lambda > 0$ یا $\alpha(x) \neq 0$ برای هر $x \in \partial\Omega$.

تعریف مشتق گاتو در فضاهای باناخ:

$$F : X \longrightarrow Y$$

مشتق F در نقطه $u \in X$ در جهت $v \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\delta F(u,v) = \frac{d}{dt} F(u+tv)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}$$

اگر عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد که

$$Av = \delta F(u,v)$$

آنگاه F را در نقطه u به معنای گاتو مشتق‌پذیر گیریم و نشان می‌دهیم $F'(u)=A$.

مثال - $f: C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(u) = \sin(u(1))$$

$$\frac{f(u+tv)-f(u)}{t} = \frac{\sin\left(u(1)+tv(1)\right) - \sin(u(1))}{t}$$

$$\rightarrow \cos(u(1))\,v(1) =: Av$$

$$f'(u) : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(u)(v) = \cos(u(1))\,v(1)$$

نسبت به v عملگر خطی پیوسته است. پس f مشتق پیوسته دارد.

مثال-

$$f : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(u) = \|u\|^2$$

$$f'(u)(v) = \frac{d}{dt} f(u+tv)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \|u+tv\|^2\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\|u\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t\langle u,v\rangle\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \left(2t\|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle\right)\Big|_{t=0}$$

$$= 2\langle u,v\rangle$$

برای سادگی می‌نویسیم $f'(u) = 2u$.

مثال ـ اگر $S : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد، آنگاه $S'(u) = S$.

تعریف مشتق فرشه : اگر $F : X \longrightarrow Y$ در نقطه u مشتق‌پذیر (به معنای فرشه) است هرگاه عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد که

$$\lim_{v \to 0} \frac{F(u+v) - F(u) - Av}{\|v\|_X} = 0$$

که در این صورت می‌نویسیم $F'(u) = A$.

نکته ـ اگر F به معنای فرشه مشتق‌پذیر باشد، به معنای گاتو نیز هست .

تفاوت فرشه و گاتو:

$$\frac{F(u+tv)-F(u)-F'(u)v}{t} \to 0$$ در گاتو

$$\frac{F(u+v)-F(u)-F'(u)v}{\|v\|_X} \to 0$$ در فرشه

مثال - برای اینکه نشان دهیم $f(u) = \sin(u(1))$ به معنای فرشه مشتق‌پذیر است باید ثابت کنیم

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\sin(u(1)+v(1)) - \sin(u(1)) - \cos(u(1))\,v(1)}{\|v\|_\infty} = 0$$

$$g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{g(x+a) - g(a) - \cos a \cdot x}{|x|} = 0$$

$$\forall \epsilon\ \exists \delta,\quad |x| < \delta \Rightarrow \left| g(x+a) - g(a) - \cos a \cdot x \right| < \epsilon |x|$$

$$a = u(1), \qquad x = v(1)$$

$$|v(1)| < \delta \Rightarrow \left| \sin(u(1) + v(1)) - \sin(u(1)) - \cos(u(1))\, v(1) \right| < \epsilon |v(1)| \leq \epsilon \|v\|_\infty$$

$$\Uparrow$$

$$\|v\|_\infty < \delta$$

نکته- همه قوانینِ مشتق در بعد متناهی در حالت بعد نامتناهی برقرار است مثل مشتق جمع توابع یا ترکیب توابع.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[r, bend right, "f'(u)"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[r, bend right, "g'(f(u))"'] & Z \end{tikzcd} \qquad (g \circ f)'(u) = g'(f(u)) \circ f'(u)$$

مثال

$$f : L^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(u) = \| Su - y_\Omega \|^2$$

$$u \xmapsto{S} Su \xmapsto{T} Su - y_\Omega \xmapsto{g} \| \cdot \|^2$$

$$Tv = v - y_\Omega \qquad g(w) = \|w\|^2$$

$$f = g \circ T \circ S \,, \quad f'(u) = g'\big(T \circ S(u)\big) \circ T'(Su) \circ S'(u)$$

$$= g'\big(T \circ S(u)\big) \circ 1 \circ S$$

$$g'(w)\bar{v} = 2 \langle w, \bar{v} \rangle$$

$$f'(u)v = g'(TSu)(Sv) = 2 \langle TSu, Sv \rangle = 2 \langle Su - y_\Omega, Sv \rangle$$

$$= 2 \langle S^*(Su - y_\Omega), v \rangle$$

$$f'(u) = 2 S^*(Su - y_\Omega)$$

کنترل بهینه

جلسه پنجم ۹۸/۷/۱۳

عملگر الحاقی :

اگر A ماتریسِ $m\times n$ باشد، نگاشت خطی $x \longmapsto Ax$ از $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ توصیف می‌کند.

ماتریسِ A^T دارای این خاصیت است که

$$(Au, v)_{\mathbb{R}^m} = (u, A^T v)_{\mathbb{R}^n}$$

ماتریسِ $n\times m$، A^T ماتریسِ یک عملگر خطی $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است.

در بعد نامتناهی اگر $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد، عملگر الحاقی آن

$T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ است که دارای خاصیت زیر است :

$$\langle T^* f, x \rangle_{X^* \times X} = \langle f, Tx \rangle_{Y^* \times Y} \qquad \forall f \in Y^*, x \in X$$

اگر X و Y دو فضای هیلبرت باشند، آنگاه $T^*: Y \longrightarrow X$ و

$$(T^*y, x)_X = (y, Tx)_Y$$

ضرب داخلی روی X

ضرب داخلی روی Y

مثال- $A: L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$

$$(Au)(t) = \int_0^t K(s,t)\, u(s)\, ds$$

$$(A^*v, u)_{L^2} = (v, Au)_{L^2} = \int_0^1 v(t)\, (Au)(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 v(t) \int_0^t k(s,t) u(s)\, ds\, dt = \int_0^1 \int_0^t v(t)\, K(s,t)\, u(s)\, ds dt$$

$$= \int_0^1 \left[\int_s^1 v(t)\, K(t,s)\, dt \right] u(s)\, ds$$

$$\Longrightarrow \quad (A^* v)(s) = \int_s^1 v(t)\, K(t,s)\, dt$$

مثال - $S: \mathcal{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$ ، $y = Su$ جواب معادله زیر است.

$$\begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ \quad y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(S^* v, u)_{L^2(\Omega)} = (v, Su)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v(x)\, (Su)(x)\, dx$$

$$Su = y \;, \quad S^* v = z$$

$$(S^* v, u)_{L^2} = \int_\Omega z(x)\,u(x)\,dx = \int_\Omega -(\Delta y)\,\frac{z}{\beta}\,dx$$

$$= \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla\left(\frac{z}{\beta}\right) dx \; - \cancel{\int_{\partial\Omega} (\partial_n y) \cdot \frac{z}{\beta}\,dx}$$

با فرض $z|_{\partial\Omega} = 0$

$$= \int_\Omega -y\,\Delta\left(\frac{z}{\beta}\right) dx = \left(Su, -\Delta\left(\frac{z}{\beta}\right)\right)_{L^2}$$

$$\Longrightarrow \quad -\Delta\left(\frac{z}{\beta}\right) = v \quad \text{in } \Omega$$

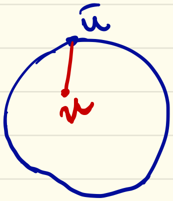
اگر $\begin{cases} -\Delta p = v & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ آنگاه $z = S^* v = \beta p$

سیستم بهینگی :

$$\begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on} \end{cases}$$

$$f(u) = J(Su, u) = \frac{1}{2}\|Su - y_\Omega\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2$$

می دانیم کنترل بهینه وجود دارد یعنی $f(\bar{u}) = \inf_{u \in U_{ad}} f(u)$ برای $\bar{u} \in U_{ad}$



چون تابع f مشتق پذیر به معنای گاتو است در نتیجه باید

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \qquad \forall\, u \in U_{ad}$$

(محدب بودن U_{ad} کافی است .)

تابع f روی پاره‌خط $tu+(1-t)\bar{u}$ می‌نیمم خود را در نقطه $t=0$ می‌گیرد.

$$\varphi(t)=f(tu+(1-t)\bar{u}) \qquad 0\leq t\leq 1$$ ،

$$\varphi(0)=\min_{0\leq t\leq 1}\varphi(t)$$

پس $0\leq \varphi'(0) \Longleftarrow 0\leq f'(\bar{u})(u-\bar{u})$

از طرفی بنابر محاسبات جلسه قبل $f'(u)=S^*(Su-y_\Omega)+\lambda u$ بنابراین شرط بهینگی $\bar{u}$ عبارتست از

$$\left(S^*(S\bar{u}-y_\Omega)+\lambda\bar{u}\,,\,u-\bar{u}\right)_{L^2(\Omega)}\geq 0 \qquad \forall u\in U_{ad}$$

داریم $S^*(\bar{y}-y_\Omega)=\beta P$ که

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta \bar{y} = \beta \bar{u} & \text{in } \Omega \\ \bar{y}=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta p = \bar{y}-y_\Omega & \text{in } \Omega \\ p=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\beta P+\lambda\bar{u},\, u-\bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u\in U_{ad}}$$

سیستم بهینگی

قضیه - اگر $U_{ad}=\{u_a(x)\leq u(x)\leq u_b(x)\}$ ، آنگاه

$$\bar{u}(x)=\begin{cases} u_a(x) & \beta(x)P(x)+\lambda\bar{u}(x)>0 \\ u_b(x) & \beta(x)P(x)+\lambda\bar{u}(x)<0 \end{cases}$$

$$(\beta p + \lambda \bar{u} \, , \, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0$$ از نامساوی

نتیجه می‌شود که

$$\min_{u \in U_{ad}} (\beta p + \lambda \bar{u} \, , \, u)_{L^2} = (\beta p + \lambda \bar{u} \, , \, \bar{u})_{L^2}$$

$$A_+ = \{ x \in \Omega : \beta p + \lambda \bar{u} > 0 \}$$

$$A_- = \{ x \in \Omega : \beta p + \lambda \bar{u} < 0 \}$$

$$\int_\Omega (\beta p + \lambda \bar{u}) \, u \, dx = \int_{A^+} \cdots + \int_{A^-} \cdots$$

$$\geq \int_{A^+} (\beta p + \lambda \bar{u}) \, u_a(x) + \int_{A^-} (\beta p + \lambda \bar{u}) \, u_b(x)$$

از طرفی
$$\mathcal{U}_{ad} \ni v(x) = \begin{cases} u_a(x) & x \in A_+ \\ u_b(x) & x \in A_- \end{cases}$$
بنابراین

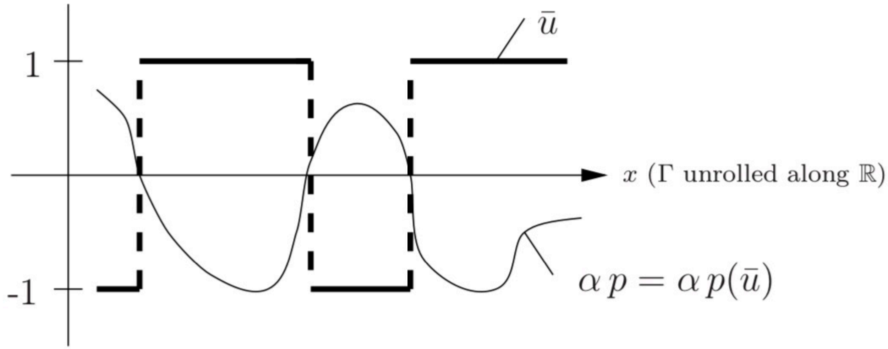
$$\min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} (\beta p + \lambda \bar{u}, u) = (\beta p + \lambda \bar{u}, v)$$

$$\Longrightarrow \quad v = \bar{u}$$

نکته- وقتی $\lambda = 0$ ،
$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_a(x) & \beta(x) p(x) > 0 \\ u_b(x) & \beta(x) p(x) < 0 \end{cases}$$

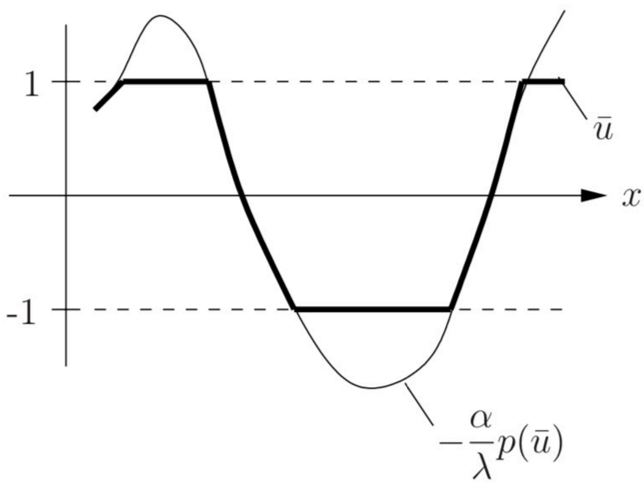
برای حالت $\beta(x) p(x) = 0$ ، اطلاعی برای $\bar{u}(x)$ نمی‌توانیم به دست بیاوریم.

اگر $\lambda > 0$ ، تساوی $0 = \beta(x) p(x) + \lambda \bar{u}(x)$ به این معناست که $\bar{u}(x) = -\frac{1}{\lambda} \beta(x) p(x)$. شرط $u_a(x) \leq \bar{u}(x) \leq u_b(x)$ به خودی خود در این حالت برقرار است.



Optimal control for $\lambda = 0$.

For $\lambda > 0$, we obtain $\bar{u}$ as the projection of the function $-\lambda^{-1}\alpha\, p$ onto $[-1, 1]$.



Optimal control for $\lambda > 0$.

قضیه- اگر $\lambda > 0$، آنگاه $\bar{u}$ یک کنترل بهینه است، اگر و تنها اگر

$$\bar{u}(x) = \mathbb{P}_{[u_a(x),\, u_b(x)]}\left\{-\frac{1}{\lambda}\beta(x)p(x)\right\}$$

که

$$\mathbb{P}_{[a,b]}(u) = \min\{b, \max\{a,u\}\}.$$

نکته-

$$\mathbb{P}_{[\alpha,\beta]}(u) = \begin{cases} \alpha & u < \alpha \\ u & \alpha \le u \le \beta \\ \beta & u > \beta \end{cases}$$

کنترل بهینه

جلسه ششم   ۹۸/۷/۱۵

تعریف- اگر U_{ad} مجموعه محدب باشد، عملگر $Proj : L^2 \longrightarrow U_{ad}$ را اینگونه تعریف می‌کنیم که $Proj(v)$ نزدیکترین عضو U_{ad} به v باشد، یعنی

$$\| Proj\, v - v \|_{L^2} = \min_{u \in U_{ad}} \| u - v \|_{L^2}$$

در واقع تابع مشتق‌پذیر $g(u) = \frac{1}{2} \| u - v \|^2_{L^2}$ در نقطه‌ی $\bar{v} = Proj\, v$ مینیمم خود را در نقطه اختیار کرده است. پس

$$g'(\bar{v})(u - \bar{v}) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

$$\Rightarrow \quad (\bar{v} - v, u - \bar{v}) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

مثال : اگر $\mathcal{U}_{ad} = \{u_a(x) \le u(x) \le u_b(x)\}$ آنگاه

$$
\operatorname{Proj} v = \begin{cases} u_a(x) & v(x) < u_a(x) \\ v(x) & u_a(x) \le v(x) \le u_b(x) \\ u_b(x) & u_b(x) < v(x) \end{cases}
$$

$$
\operatorname{Proj} : L^2 \longrightarrow \mathcal{U}_{ad}
$$

(نکته - مقایسه کنید عملگر تصویر را با تابع $\mathbb{P}_{[\alpha,\beta]}$ در آخرین قضیه جلسه قبل)

$$A_+ = \{x \in \Omega : \quad u_b(x) < v(x)\} \xrightarrow{x \in A_+} u(x) < v(x)$$

$$A_- = \{x \in \Omega : \quad v(x) < u_a(x)\}$$

$$A_0 = \{x \in \Omega : \ u_a(x) \leq v(x) \leq u_b(x)\}$$

برای یک $u \in V_{ad}$ دلخواه داریم:

$$\int_\Omega |v-u|^2 dx = \int_{A_+} \cdots + \int_{A_-} \cdots + \int_{A_0} \cdots$$

$$\geq \int_{A_+} |v(x)-u_b(x)|^2 + \int_{A_-} |v(x)-u_a(x)|^2$$

$$= \int_\Omega |v(x) - \mathrm{Proj}\, v(x)|^2 dx$$

شرط بهینگی جلسه قبل

$$(\beta p + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}$$

$$\Big\downarrow \lambda > 0$$

(1) $$\left(\bar{u} - \left(-\tfrac{1}{\lambda}\beta p\right), u - \bar{u}\right) \geq 0$$

از مقایسه با تعریف عملگر تصویر ادعا می‌کنیم که

$$\mathrm{Proj}_{\mathcal{U}_{ad}}\left(-\tfrac{1}{\lambda}\beta p\right) = \bar{u}$$

اثبات ادعا: $\bar{v} = \mathrm{Proj}_{\mathcal{U}_{ad}}\left(-\tfrac{1}{\lambda}\beta p\right)$ بنابراین داریم:

(2) $$\left(\bar{v} - \left(-\tfrac{1}{\lambda}\beta p\right), u - \bar{v}\right) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}$$

در (1) قرار دهید $u=\bar{v}$ و در (2) $u=\bar{u}$.

$$\left(\bar{u}+\frac{1}{\lambda}\beta p,\ \bar{v}-\bar{u}\right)\geq 0$$

$$\left(\bar{v}+\frac{1}{\lambda}\beta p,\ \bar{u}-\bar{v}\right)\geq 0$$

$$\Longrightarrow\ \left(\bar{u}-\bar{v},\ \bar{v}-\bar{u}\right)\geq 0$$

$$\Longrightarrow\ \bar{u}=\bar{v}.$$

مسأله کنترل مرزی :

h تابع ثابت

$$\begin{cases} -\Delta y + c_0 y = h & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha y = u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$c_0 \geq 0$ in Ω

$\alpha \geq 0$ on $\partial\Omega$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_1}{2}\|y - y_\Gamma\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{\lambda_2}{2}\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$y = y_0 + Su \quad , \quad S : L^2(\partial\Omega) \xrightarrow[\text{پیوسته}]{\text{افص}} L^2(\Omega)$$

تیر

$$\begin{cases} -\Delta y_0 + c_0 y_0 = h & \text{in } \Omega \\ \partial_n y_0 + \alpha y_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_1}{2}\|y - y_p\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{\lambda_2}{2}\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$f(u) = J(y_0 + Su, u)$$

$$f'(\bar u)(v) = \left(\nabla_u J(\bar y, \bar u), v\right)_{L^2(\partial\Omega)} + \left(\nabla_y J(\bar y, \bar u), Sv\right)_{L^2(\Omega)}$$

$$= \left(\lambda_2 \bar u, v\right)_{L^2(\partial\Omega)} + \left(\bar y - y_\Omega, Sv\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\lambda_1(\bar y - y_p), Sv\right)_{L^2(\partial\Omega)}$$

شرط بهینگی : $f'(\bar u)(u - \bar u) \geq 0$ برای هر $u \in U_{ad}$

ادعا:

$$(\bar{y}-y_{\Omega}, Sv)_{L^2(\Omega)} + (\lambda_1(\bar{y}-y_p), Sv)_{L^2(\partial\Omega)} = (p, v)_{L^2(\partial\Omega)}$$

که p جواب معادله زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta p + c_0 p = \bar{y} - y_{\Omega} \\ \partial_n p + \alpha p = \lambda_1(\bar{y}-y_p) \end{cases}$$

اثبات ادعا:

$$z = Sv = y - y_0$$

$$\begin{cases} -\Delta y + c_0 y = h & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha y = v & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta y_0 + c_0 y_0 = h & \text{in } \Omega \\ \partial_n y_0 + \alpha y_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta z + c_0 z = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n z + \alpha z = v & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\bar{y} - y_\Omega, Sv)_{L^2(\Omega)} + (\lambda_1(\bar{y} - y_p), Sv)_{L^2(\partial\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega (-\Delta p + c_0 p) z \, dx + \int_{\partial\Omega} (\partial_n p + \alpha p) z \, d\sigma$$

$$= \int_\Omega (\underbrace{\cancel{-\Delta z + c_0 z}}_{0}) p \, dx + \int_{\partial\Omega} (\partial_n z \cdot p - \cancel{\partial_n p \cdot z}) \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} (\cancel{\partial_n p} + \alpha p) z \, d\sigma$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\partial_n z + \alpha z) p \, d\sigma = (p, v)_{L^2(\partial\Omega)}$$

سیستم الحاقی :

$$\begin{cases} -\Delta \bar{y} + c_0 \bar{y} = h & \text{in } \Omega \\ \partial_n \bar{y} + \alpha \bar{y} = \bar{u} & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta p + c_0 p = \bar{y} - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ \partial_n p + \alpha p = \lambda_1 (\bar{y} - y_p) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\left(p + \lambda_2 \bar{u} \,,\, u - \bar{u} \right)_{L^2(\partial\Omega)} \geq 0 \qquad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}$$

مشابه مثال قبل نامساوی تغییراتی بالا به تساوی

$$\bar{u} = \mathrm{Proj}_{\mathcal{U}_{ad}} \left(-\frac{1}{\lambda_2} p \right)$$

تبدیل می شود.

نکته ـ با استفاده از مسأله الحاقی و محاسبه عملگر الحاقی، در واقع نشان می‌دهیم که

$$f'(\bar{u}) = p + \lambda_2 \bar{u} \qquad (3)$$

یا همچنین در مثال قبل

$$f'(\bar{u}) = \beta p + \lambda \bar{u} . \qquad (4)$$

این تساوی فایده کارکردن با فضاهای هیلبرت است. اگر به جای $\mathcal{L}^2$، فرض کنیم $U_{ad} \subseteq \mathcal{L}^\infty$،

مفهوم گرادیان برای تابع $f : U_{ad} \to \mathbb{R}$ برقرار نیست و تساوی‌های بالا بی‌معنا هستند.

نکته ـ اگر به مسأله کنترل بهینه به صورت یک مسأله بهینه‌سازی $f : U_{ad} \to \mathbb{R}$ نگاه کنیم که f یک تابع مشتق‌پذیر است و

$$f(\bar{u}) = \min_{u \in U_{ad}} f(u)$$

آنگاه در صورتی که $\bar{u}$ یک نقطه درونی U_{ad} باشد، آنگاه $f'(\bar{u}) = 0$.

در این حالت از روابط (3) و (4) نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} \bar{u} = -\frac{1}{\lambda_2} p & \text{مسأله کنترل مرزی} \\ \\ \bar{u} = -\frac{1}{\lambda} \beta p & \text{مسأله کنترل درونی} \end{cases}$$

اما در اکثر مسائل جواب بهینه یک نقطه درونی نیست. به عنوان مثال مجموعه $\mathcal{U}_{ad} = \{ u_a \le u \le u_b \}$ در L^2 نقطه درونی ندارد. (چرا؟)

وقتی $\bar{u}$ نقطه درونی $\mathcal{U}_{ad}$ نیست، نامساوی تغییراتی

$$\left(f'(\bar{u}) , u - \bar{u} \right)_{L^2} \ge 0 \qquad \forall\, u \in \mathcal{U}_{ad}$$

نتیجه می‌دهد که

$$(5) \qquad \left(f'(\bar{u}) , v \right) \ge 0 \qquad \forall\, v \in TC(\bar{u})$$

$$TC(\bar{u}) = \left\{ v \in L^2 \;:\; \bar{u} + \varepsilon v + o(\varepsilon) \in \mathcal{U}_{ad} \right\}$$

مجموعه $TC(\bar{u})$ را مخروط مماسی $\mathcal{U}_{ad}$ در نقطه $\bar{u}$ می‌نامیم. اگر $\mathcal{U}_{ad}$ هموار باشد، $TC(\bar{u})$

یک زیرفضای برداری است (در حالت کلی یک مخروط است یعنی $v \in TC \Rightarrow \lambda v \in TC$ برای هر $\lambda > 0$)

در حالتی که $\mathcal{U}_{ad}$ در نقطه $\bar{u}$ هموار باشد، آنگاه نامساوی (5) به تساوی تبدیل می‌شود:

$$\left(f'(\bar{u}), v\right) = 0 \qquad \forall v \in TC(\bar{u})$$

یعنی $f'(\bar{u})$ بر $TC(\bar{u})$ عمود است. با توجه به روابط (3) و (4) خواهیم $\bar{u} + \frac{1}{\lambda_2} p$ یا $\bar{u} + \frac{1}{\lambda}\beta p$

بر $TC(\bar{u})$ عمود هستند. در نتیجه باید

$$\bar{u} = Proj\left(-\frac{1}{\lambda_2} p\right) \quad \text{یا} \quad \bar{u} = Proj\left(-\frac{1}{\lambda}\beta p\right)$$

کنترل بهینه

جلسه هفتم

۹۸/۷/۲۰

روشهای عددی :

۱- روش گرادیان شرطی :

اگر $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $U_{ad} \subset U$ کراندار، بسته و محدب باشد.

به دنبال حل مسأله بهینه‌سازی زیر هستیم.

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u)$$

دنباله بازگشتی $\{u_n\}$ را به صورت زیر می‌سازیم :

گام اول: مسأله بهینه‌سازی خطی زیر را حل می‌کنیم :

$$f'(u_n)v_n = \min_{v \in U_{ad}} f'(u_n)v$$

درواقع v_n در نامساوی $f'(u_n)(v_n - u_n) \leq 0$ صدق می‌کند. بنابراین $v_n - u_n$ یک راستای کاهشی در نقطه

u_n است. با فرضیاتی که برای U_{ad} در نظر گرفتیم این مسأله بهینه‌سازی همواره جواب دارد.

گام دوم: مقدار $s_n \in (0,1]$ را از حل مسأله بهینه‌سازی یک بعدی زیر پیدا می‌کنیم:

$$f(u_n + s_n(v_n - u_n)) = \min_{s \in (0,1]} f(u_n + s(v_n - u_n))$$

قرار دهید:

$$u_{n+1} = u_n + s_n(v_n - u_n)$$

نکته:

$$f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

شرط توقف الگوریتم: $u_{n+1} - u_n$ خیلی کوچک باشد.

کاربرد روش گرادیان شرطی در مسئله کنترل بهینه:

$$\begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2$$

$$f(u) := J(Su, u)$$

که $y = Su$ جواب PDE است.

می‌دانیم $f'(u) = \lambda u + \beta p$ که p جواب مسئله الحاقی زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta p = y - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

S1 : برای u_n و حل PDE مربوط تابع y_n را پیدا می‌کنیم.

S2 : به کمک y_n و حل مساله الحاقی p_n را حساب می‌کنیم.

S3 : مساله بهینه‌سازی خطی زیر را حل می‌کنیم.

$$\min_{v \in U_{ad}} \int_\Omega (\beta p_n + \lambda u_n) v \, dx$$

v_n را جواب مساله بالا بگیرید.

S4 : s_n را جواب مساله بهینه‌سازی

$$\min_{s \in [0,1]} f(u_n + s(v_n - u_n))$$

درنظر می‌گیریم.

$$u_{n+1} = u_n + s_n (v_n - u_n)$$

نکته - اگر $U_{ad} = \{u : u_a \leq u \leq u_b\}$، جواب مرحله S3 به صورت صریح به دست می‌آید:

$$v_n(x) = \begin{cases} u_a(x) & \text{if} \quad \beta p_n + \lambda u_n > 0 \\ \frac{1}{2}(u_a(x) + u_b(x)) & \quad \beta p_n + \lambda u_n = 0 \\ u_b(x) & \text{if} \quad \beta p_n + \lambda u_n < 0 \end{cases}$$

نکته - اگر تابع هزینه به صورت درجه دوم

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2$$

باشد، جواب S4 به صورت صریح به دست می‌آید.

$$f(u_n + s(v_n - u_n)) = \frac{1}{2} \| y_n + s(z_n - y_n) - y_\Omega \|^2 + \frac{\lambda}{2} \| u_n + s(v_n - u_n) \|_{L^2}^2$$

که z_n در PDE روبرو صدق می‌کند:

$$\begin{cases} -\Delta z_n = \beta v_n & \text{in } \Omega \\ z_n = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

عبارت بالا یک چندجمله‌ای درجه ۲ برحسب s است که مینیمم آن در بازه $[0,1]$ به راحتی برحسب u_n، v_n و z_n قابل محاسبه است.

روش گرادیان تصویر شده :

با گام‌های s_1 و s_2 مشابه قبل گرادیان تابع f در نقطه u_n به دست می‌آید.

$$v_n = -f'(u_n) = -(\beta P_n + \lambda u_n)$$

یک راستای کاهشی برای تابع f در نقطه u_n است.

عدد s_n را از حل مسئله بهینه‌سازی یک بعدی زیر پیدا می‌کنیم :

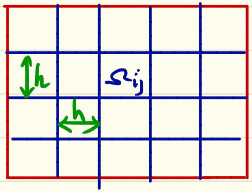
$$\min_{s>0} f\left(\mathrm{Proj}_{U_{ad}}(u_n + s v_n)\right)$$

قرار دهید :

$$u_{n+1} = \mathrm{Proj}_{U_{ad}}(u_n + s_n v_n)$$

گسسته‌سازی مسأله و تبدیل به بعد متناهی:

فرض می‌کنیم برای سادگی $\Omega = (0,1)\times(0,1)$. (هر چند این روش وقتی Ω را به صورت اجتماع مستطیل‌ها می‌توان نوشت، کارایی دارد.)



$$\Omega_{ij} = \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \times \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$$

نقطه وسط Ω_{ij} را x_{ij} می‌نامیم.

$$y_{ij} = y(x_{ij})$$

مسأله $-\Delta y = \beta u$ تبدیل می‌شود به معادلات زیر:

$$\beta_{ij} u_{ij} = -\Delta y(x_{ij}) \sim \frac{4y_{ij} - (y_{i-1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j})}{h^2}$$

که $h = \frac{1}{n}$ طول گام گسسته‌سازی است. (اگر x_{ij} خارج ناحیه Ω قرار بگیرد، $y_{ij}=0$ خواهد بود.)

اگر همه نقاط y_{ij} را در بردار $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{(n-1)^2})$ وارد دهیم منظور $\vec{u}$.

رابطه $-\Delta y = \beta u$ به صورت $A\vec{y} = B\vec{u}$ ساده می‌شود.

ماتریس B یک ماتریس قطری است که درایه‌ای روی قطر آن مقادیر $\beta(x_{ij})$ هستند.

و مسأله بهینه‌سازی تبدیل می‌شود به

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|\vec{y} - \vec{y}_{\Omega}\|^2 + \lambda \|\vec{u}\|^2 = \min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} |y_i - y_{\Omega,i}|^2 + \lambda u_i^2 \\ A\vec{y} = B\vec{u}, \quad u_a \le \vec{u} \le u_b \end{cases}$$

کنترل بهینه

جلسه هشتم ۹۸/۷/۲۲

کنترل معادلات سهموی :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = 0 & \text{in } Q := \Omega \times (0,T) \\ \partial_n y + \alpha y = \beta u & \text{on } \Sigma := \partial\Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$\min_{u \in U_{ad}} J(y,u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| y(x,T) - y_{\Omega}(x) \right|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(x,t)|^2 \, d\sigma \, dt$$

روش لاگرانژین برای محاسبه معادله الحاقی :

$$\mathcal{L}(y,u,P_1,P_2) = J(y,u) - \iint_Q (y_t - \Delta y) P_1 \, dx\, dt - \iint_{\Sigma} (\partial_n y + \alpha y - \beta u) P_2 \, d\sigma\, dt$$

با راحت سازی متغیرهای y ، u ، تابع $\mathcal{L}$ می‌نیمم خود را در فضای $u\in U_{ad}$ و y تنها در شرط $y(x,0)=y_0(x)$ صدق می‌کند. اگر می‌نیمم در نقطهٔ $(\bar{y},\bar{u},P_1,P_2)$ بدست بیاید:

$$(1) \qquad D_y\mathcal{L}(\bar{y},\bar{u},P_1,P_2)\cdot(y-\bar{y})\geq 0 \qquad \forall y \text{ sth. } y(x,0)=y_0(x)$$

$$(2) \qquad D_u\mathcal{L}(\bar{y},\bar{u},P_1,P_2)\cdot(u-\bar{u})\geq 0 \qquad \forall u\in U_{ad}$$

در (1) تابع $z=y-\bar{y}$ یک تابع دلخواه است که $z(x,0)=0$.

در این صورت تابع z نیز در این شرط اولیه صدق می‌کند. بنابراین در (1) باید تساوی برقرار باشد.

$$0=D_y\mathcal{L}(\bar{y},\bar{u},P_1,P_2)\cdot z = D_yJ(\bar{y},\bar{u})\cdot z-\iint_Q(z_t-\Delta z)\cdot P_1\,dx\,dt$$

$$-\iint_\Sigma(\partial_n z+\alpha z)\cdot P_2\,d\sigma\,dt$$

برای هر z که $z(x,0)=0$.

$$= \int_{\Omega} \left(\bar{y}(x,T) - y_{\Omega}(x) \right) \cdot z(x,T)\, dx + \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t p_1 \cdot z)\, dx\, dt - \int_{\Omega} p_1(x,t)\, z(x,t)\, dx \Big|_{t=0}^{T}$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega} \Delta p_1 \cdot z \, dx\, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\partial_n z \cdot p_1 - \partial_n p_1 \cdot z)\, d\sigma\, dt$$

$$- \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\partial_n z + \alpha z)\, p_2 \, d\sigma\, dt$$

$z(x,0)=0$

$$= \int_{\Omega} \left(\bar{y}(x,T) - y_{\Omega}(x) - p_1(x,T) \right) z(x,T)\, dx + \iint_{Q} (\partial_t p_1 + \Delta p_1) \cdot z \, dx\, dt$$

$$+ \iint_{\Sigma} \partial_n z \cdot (p_1 - p_2)\, d\sigma\, dt - \iint_{\Sigma} (\partial_n p_1 + \alpha p_2) \cdot z \, d\sigma\, dt$$

عبارت بالای برای هر z که تنها در شرط $z(x,0)=0$ صدق می‌کند برابر صفر است. درنتیجه باید:

$$\begin{cases} \bar{y}(x,T) - y_\Omega(x) - P_1(x,T) = 0 & x \in \Omega \\ \partial_t P_1 + \Delta P_1 = 0 & \text{in } Q = \Omega \times (0,T) \\ P_1 = P_2 \,, \quad \partial_n P_1 + \alpha P_2 = 0 & \text{on } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

با برابر قرار دادن P_1 و P_2 روی مرز شرط بالا به صورت زیر خلاصه می‌شود که معادله الحاقی متناظر مسأله را می‌دهد:

$$\begin{cases} \partial_t P + \Delta P = 0 \\ \partial_n P + \alpha P = 0 \\ P(x,T) = \bar{y}(x,T) - y_\Omega(x) \end{cases}$$

که به جای مسأله با شرط اولیه، یک PDE سهموی با شرط انتهایی ارائه می‌دهد.

شرط (2) نیز به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\iint_{\Sigma} (\lambda \bar{u} + \beta p)(u - \bar{u}) \, d\sigma dt \geq 0 \qquad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}$$

نکته- در واقع اگر S عملگری باشد که کنترل u را به حالت y تبدیل کند، یعنی $y = Su$

و $f(u) = J(Su, u)$، محاسبات بالا نشان می‌دهد که

$$f'(\bar{u}) = \lambda \bar{u} + \beta p$$

محاسبه عملگر S به کمک سری فوریه :

فرض کنید $\Omega = (0,1)$ یک بعدی است . معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f(x,t) \\ y_x(0,t) = 0 \\ y_x(1,t) + \alpha y(1,t) = u(t) \\ y(x,0) = y_0(x) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید .

برای حل معادله بالا ابتدا تابع $\tilde{y}(x,t)$ را پیدا می‌کنیم که در شرایط مرزی صدق کند . می‌توان قرار داد :

$$\tilde{y}(x,t) = \frac{u(t)}{2+\alpha} x^2$$

در این صورت اگر $z = y - \tilde{y}$ ، آنگاه

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} = f(x,t) - \dfrac{u'(t)}{2+\alpha} x^2 + \dfrac{2u(t)}{2+\alpha} = \tilde{f}(x,t) \\ z_x(0,t) = z_x(1,t) + \alpha z(1,t) = 0 \\ z(x,0) = y_0(x) - \dfrac{u(0)}{2+\alpha} x^2 \end{cases}$$

اگر $z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \varphi_n(x)$ که $\{\varphi_n\}$ یک پایه مناسب برای $L^2[0,1]$ است

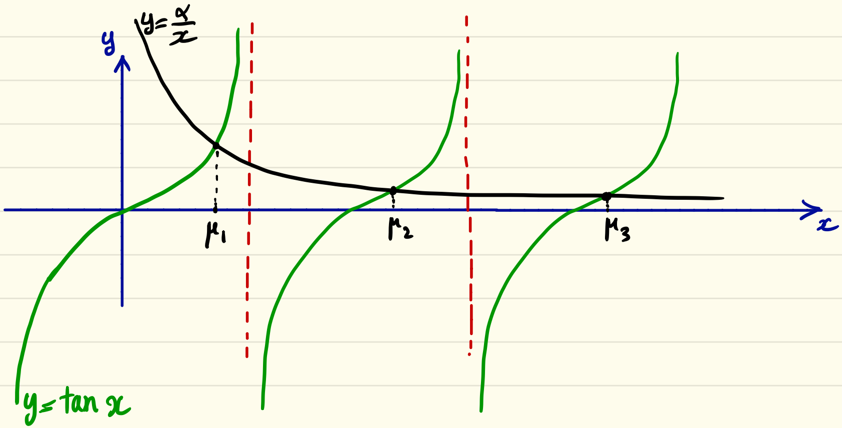
که باید جواب مسأله مقدار ویژه

$$\begin{cases} -\varphi_n'' = \lambda_n \varphi_n \quad \text{in } (0,1) \\ \varphi_n'(0) = \varphi_n'(1) + \alpha \varphi_n(1) = 0 \end{cases}$$

باشد.

اگر $\alpha=0$ ، آنگاه $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$. (در این حالت $\mu_n=n\pi$)

اگر $\alpha>0$ ، $\varphi_n(x)=\cos(\mu_n x)$ که $\mu_n \tan \mu_n=\alpha$.



اگر $z(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\varphi_n(x)$ آنگاه داریم:

$$\begin{cases} a_n' + \mu_n^2 a_n = b_n , & \tilde{f}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)\varphi_n(x) \\ y_0(x) - \frac{u(0)}{2+\alpha} x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\varphi_n(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left(e^{t\mu_n^2} a_n\right)' = e^{t\mu_n^2} b_n$$

$$e^{t\mu_n^2} a_n(t) - a_n(0) = \int_0^t e^{s\mu_n^2} b_n(s)\, ds$$

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-t\mu_n^2} + \int_0^t e^{(s-t)\mu_n^2} b_n(s)\, ds$$

$$z(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(\mu_n x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0) \cos(\mu_n x) e^{-t\mu_n^2} + \cdots$$

بنابر نظریه سری فوریه $\{\varphi_n(x)\}$ یک پایه متعامد برای $\mathcal{L}^2[0,1]$ است. در نتیجه

$$a_n(0) = \left(y(x,0) - \tilde{y}(x,0)\,,\ \varphi_n\right) \Big/ \|\varphi_n\|^2$$

$$b_n(t) = \left(\tilde{f}(x,t), \varphi_n\right) \Big/ \|\varphi_n\|^2$$

$$\Rightarrow \quad z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{\Omega} \left(y_0(\xi) - \tilde{y}(\xi,0)\right) \cos(\mu_n \xi) \cos(\mu_n x)\, e^{-\mu_n^2 t}\, d\xi$$

$$+ \cdots$$

$$= \int_{\Omega} \left(y_0(\xi) - \tilde{y}(\xi,0)\right) \Bigg(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \cos(\mu_n \xi) \cos(\mu_n x)\, e^{-\mu_n^2 t}}_{G(x,\xi;t)} \Bigg) d\xi$$

$$+ \cdots$$

$$G(x,\xi;t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\cos(\mu_n x)\cos(\mu_n \xi)e^{-\mu_n^2 t}$$ تابع

را تابع گرین می‌نامیم. جواب PDE گفته شده به صورت انتگرالی زیر ساده می‌شود:

$$y(x,t)=\int_0^1 G(x,\xi;t)y_0(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi,t-s)f(\xi,s)\,d\xi ds$$
$$+\int_0^t G(x,1,t-s)u(s)\,ds$$

نکته: $G(x,\xi;t)=G(\xi,x;t)$ به علاوه $\partial_t G=\partial_{xx}G$ که در شرط اولیه

$$G(x,\xi;0)=\delta(x-\xi)$$

صدق می‌کند.

نتیجه - در مسأله کنترل مرزی،

$$\begin{cases} y_t = y_{xx} \\ y_x(0,t)=0, \quad y_x(1,t)+\alpha y(1,t) = \beta(t)u(t) \\ y(x,0) = y_0(x) \end{cases}$$

در رابطه صفحه قبل اگر $f=0$ قرار دهیم و به جای u ، تابع βu را جایگزین کنیم. در نتیجه داریم

$$y(x,T) = \int_0^1 G(x,\xi,T)\, y_0(\xi)\, d\xi$$

$$+ \int_0^T G(x,1;T-s)\beta(s)u(s)\, ds = y_1(x) + Su$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y(\cdot,T) - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(0,T)}$$

$$= \frac{1}{2}\|Su - (y_\Omega - y_1)\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda/2\, \|u\|^2_{L^2(0,T)}$$

در نتیجه شرط بهینگی به صورت زیر است :

$$\left(S^*\left(S\bar{u}-(y_\Omega-y_1)\right)+\lambda\bar{u}\,,\,u-\bar{u}\right)_{L^2(0,T)}\geq 0 \qquad \forall u\in U_{ad}$$

محاسبه S^* :

$$S:\mathcal{L}^2[0,T]\longrightarrow\mathcal{L}^2(0,1)$$

$$(Su)(x)=\int_0^T G(x,1;T-s)\,\beta(s)\,u(s)\,ds$$

$$(v,Su)_{L^2(0,1)}=(S^*v,u)_{L^2(0,T)} \qquad \forall u\in L^2(0,T),\ v\in L^2(0,1)$$

$$(v,Su)_{L^2(0,1)}=\int_0^1 v(x)\int_0^T G(x,1;T-s)\,\beta(s)\,u(s)\,ds\,dx$$

$$=\int_0^T\left[\int_0^1 v(x)\,G(x,1;T-s)\,dx\right]\beta(s)\,u(s)\,ds$$

$$\Rightarrow (S^*v)(t) = \beta(t)\int_0^1 v(\xi)\, G(\xi, 1; T-t)\, d\xi$$

گزاره $(S^*v)(t) = \beta(t)\, p(1,t)$ است که $p(x,t)$ در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} P_t + P_{xx} = 0 \\ p(x,T) = v(x) \quad \text{in } \Omega \\ \partial_x p(0,t) = \partial_x p(1,t) + \alpha\, p(1,t) = 0 \end{cases}$$

نکته - گزاره بالا محاسبات ابتدای جلسه برای عملگر الحاقی S^* را تأیید می‌کند.

کنترل بهینه

جلسه نهم ۹۸/۷/۲۹

معادلات سهموی :

$$(PE)\begin{cases} y_t-\Delta y+c_0 y=f & \text{in } Q=\Omega\times(0,T) \\ \partial_n y+\alpha y=g & \text{on } \Sigma=\partial\Omega\times(0,T) \\ y(x,0)=y_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

برای اینکه ببینیم جواب ضعیف معادله بالا چه معنی دارد، معادله را در تابع هموار $\varphi\in C^\infty(Q)$ ضرب می‌کنیم.

$$\int_\Omega f(x,t)\varphi(x,t)\,dx=\int_\Omega y_t\varphi+\nabla y\cdot\nabla\varphi+c_0 y\varphi\,dx-\underbrace{\int_{\partial\Omega}\partial_n y\cdot\varphi\,d\sigma}_{\int_{\partial\Omega} g\varphi-\alpha y\varphi}$$

برای اینکه روابط بالا برای هر تابع هموار $\varphi \in C^\infty(Q)$ معنی داشته باشد، لازم است که $y(\cdot,t) \in H^1(\Omega)$ برای هر $t \in (0,T)$. به علاوه باید عبارت

$$\int_\Omega y_t \varphi \, dx$$

معنی داشته باشد. به علاوه باید y در یک کلاس مناسب از توابع باشد که شرط اولیه $y(\cdot,0)=y_0(\cdot)$ معنی داشته باشد. (مثلاً y نسبت به t پیوسته باشد.)

می‌توان همچنین از روابط صفحه قبل نسبت به t انتگرال گرفت:

$$\int_0^T\int_\Omega f\varphi \, dx dt = \int_0^T\int_\Omega y_t\varphi + \nabla y\cdot\nabla\varphi + c_0 y\varphi \, dx\, dt$$

$$-\int_0^T\int_{\partial\Omega} (g-\alpha y)\varphi \, d\sigma\, dt$$

$(*)$

$$\int_0^T\int_\Omega y_t\varphi\, dx\,dt = -\int_0^T\int_\Omega y\,\varphi_t\, dx\,dt + \int_\Omega y\cdot\varphi\, dx\Big|_{t=0}^{T}$$

$$= -\int_0^T\int_\Omega y\,\varphi_t\, dx\,dt + \int_\Omega y(x,T)\,\varphi(x,T)\, dx$$

$$- \int_\Omega y_0(x)\,\varphi(x,0)\, dx$$

تعریف: فرض کنید X فضای باناخ باشد،

$$C(a,b;X) = \{\, y:[a,b]\longrightarrow X \;:\; \text{یک تابع پیوسته است } y \,\}$$

$$\|y\|_{C(a,b;X)} = \max_{t\in[a,b]} \|y(t)\|_X$$

$$L^p(a,b;X) = \left\{ y:[a,b] \to X \ : \ \int_a^b \|y(t)\|_X^p \, dt < \infty \right\}$$

در تعریف بالا به طور ضمنی فرض می‌کنیم تابع $t \longmapsto \|y(t)\|_X^p$ انتگرال‌پذیر است.

فضاهای توابع برداری مقداری که در بالا تعریف شد، فضای Bochner نامیده می‌شوند. عموماً برای $X = L^q(\Omega)$ یا $X = H^1(\Omega)$ مورد استفاده قرار می‌گیرند.

نکته- برای اینکه جواب ضعیف معادله سهموی خوش‌تعریف باشد باید $y \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ (برای اینکه انتگرال‌ها خوش‌تعریف باشند) و به علاوه $y \in C(0,T;L^2(\Omega))$ (تا شرط اولیه معنی داشته باشد).

در ضمن برای اینکه انتگرال $\int_\Omega y_t \varphi \, dx$ معنی داشته باشد، کافیست $y_t \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$.

تعریف - $W(0,T) = \{ y \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) : y_t \in L^2(0,T; (H^1(\Omega))') \}$

$$\|y\|_{W(0,T)} = \left[\int_0^T \|y(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|y_t\|^2_{(H^1(\Omega))'} \, dt \right]^{1/2}$$

قابل توجه است که منظور از y_t در بالا مشتق ضعیف y نسبت به t است یعنی

$$\int_0^T \langle y_t, \varphi \rangle_{(H^1)' \times H^1} \, dt = -\int_0^T \langle y, \varphi_t \rangle_{L^2 \times L^2} \, dt \qquad \varphi \in C_0^1(0,T, H^1(\Omega))$$

قضیه: نشاندن پیوسته $W(0,T) \hookrightarrow C(0,T; L^2(\Omega))$ برقرار است. به علاوه

اگر $y, z \in W(0,T)$ آنگاه

$$\int_0^T \langle y_t, z \rangle_{(H^1)' \times H^1} \, dt = \langle y(T), z(T) \rangle_{L^2} - \langle y(0), z(0) \rangle_{L^2} - \int_0^T \langle z_t, y \rangle_{(H^1)' \times H^1} \, dt$$

تعریف جواب ضعیف: تابع $y \in W(0,T)$ جواب ضعیف معادله سهموی (PE) است، هرگاه $y(0) = y_0$ و $(*)$ برای هر $\varphi \in W(0,T)$ برقرار باشد.

قضیه- معادله (PE) دارای جواب ضعیف یکتای $y \in W(0,T)$ است که

$$\|y\|_{W(0,T)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

که ثابت C تنها به Ω و α و C_0 و T وابسته است.

نتیجه- نگاشت‌های خطی پیوسته $G_Q : L^2(Q) \longrightarrow W(0,T)$ ، $G_\Sigma : L^2(\Sigma) \longrightarrow W(0,T)$ و $G_0 : L^2(\Omega) \longrightarrow W(0,T)$ وجود دارند که $y = G_Q(f) + G_\Sigma(g) + G_0(y_0)$ جواب معادله (PE) است.

به عنوان مثال $G_Q(f)$ جواب معادله (PE) است وقتی $y_0 = 0$ و $g = 0$.

<u>مسأله کنترل مرزی</u>:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = 0 & \text{in } Q \\ \partial_n y + \alpha y = \beta u & \text{on } \Sigma \\ y(0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad , \quad u \in U_{ad} \subseteq L^2(\Sigma)$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |y(x,T) - y_\Omega(x)|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \iint_\Sigma |u(x,t)|^2 \, d\sigma \, dt$$

چون $y \in W(0,T) \subseteq C(0,T; L^2(\Omega))$ است این انتگرال معنی دارد

از نتیجه صفحه قبل می‌دانیم که $y = G_\Sigma(\beta u)$. از طرفی $E_T : W(0,T) \to L^2(\Omega)$ را با ضابطه

$$E_T(y) = y(T)$$

درنظر بگیرید و قرار دهید $S(u) := E_T G_\Sigma(\beta u)$ که یک نگاشت پیوسته خطی است.

مسأله کنترل بهینه فوق معادل بهینه سازی

$$\min f(u) := J(Su, u)$$

است. مشابه حالت بیضوی قضیه وجود و یکتایی کنترل بهینه برقرار است.

قضیه: اگر U_{ad} یک مجموعه محدب و بسته باشد، آنگاه یک کنترل بهینه $\bar{u} \in U_{ad}$ وجود دارد.

به علاوه اگر $\lambda > 0$، این کنترل بهینه یکتا است.

برای محاسبه f' باید S^* را بشناسیم. در واقع باید عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$f'(u)(v) = \int_{\Omega} \left(y(x,T) - y_{\Omega}(x)\right)(Sv)\, dx + \lambda \iint_{\Sigma} u v \, d\sigma\, dt$$

$$= \langle Sv, y(\cdot,T) - y_{\Omega} \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Sigma)} = \langle \nabla f(u), v \rangle_{L^2(\Sigma)}$$

قضیه زیر برای این محاسبه کمک خواهد کرد:

قضیه - فرض کنید y جواب (PE) باشد و p در معادله زیر صدق کند:

$$(PE)^* \quad \begin{cases} -p_t - \Delta p + c_0 p = a_Q \\ \partial_n p + \alpha p = a_\Sigma \\ p(\cdot, T) = a_\Omega \end{cases}$$

آنگاه

$$\int_\Omega a_\Omega\, y(\cdot, T)\, dx + \iint_Q a_Q\, y\, dx\, dt + \iint_\Sigma a_\Sigma\, y\, d\sigma\, dt$$

$$= \iint_\Sigma g\, p\, d\sigma\, dt + \iint_Q f\, p\, dx\, dt + \int_\Omega y_0(x)\, p(\cdot, 0)\, dx$$

نتیجه- با قرار دادن $f = 0$ ، $g = \beta v$ ، $y_0 = 0$ ،

$a_Q = 0$ ، $a_\Sigma = 0$ ، $a_\Omega = y(\cdot,T) - y_\Omega$

$$\iint_\Sigma \beta v p \, d\sigma dt = \langle S v , y(\cdot,T) - y_\Omega \rangle_{L^2(\Omega)}$$

و در نتیجه $\nabla f(u) = \lambda u + \beta p$ که p جواب معادله الحاقی زیر است:

$$\begin{cases} -p_t - \Delta p = 0 \\ \partial_n p + \alpha p = 0 \\ p(\cdot,T) = y(\cdot,T) - y_\Omega \end{cases}$$

شرط بهینگی: $(\nabla f(\bar{u}), u - \bar{u}) \geq 0$ برای هر $u \in U_{ad}$.

یا به طور معادل: $\bar{u} = \mathrm{Proj}_{U_{ad}} \left(-\frac{1}{\lambda} \beta p \right)$

کنترل بهینه

جلسه دهم ۹۸/۸/۴

مسأله کنترل درونی:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = \beta u & \text{in } Q \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \Sigma \\ y(0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma} |y(x,t) - y_{\Sigma}(x,t)|^2 \, d\sigma dt + \frac{\lambda}{2}\iint_{Q} |u(x,t)|^2 \, dx dt$$

بنابر نمادهای جلسه پیش داریم:

$$y = G_Q(\beta u)$$

اگر $E_{\Sigma} : y \longmapsto y|_{\Sigma}$ آنگاه

عملگر $Su := E_{\Sigma} \circ G_Q(\beta u) : L^2(Q) \longrightarrow L^2(\Sigma)$ خطی و پیوسته است.

$$f(u) = J(Su, u)$$

درنتیجه وقتی $\lambda>0$ ، مسأله کنترل بهینه جواب یکتای $\bar{u}$ دارد.

شرط بهینگی

$$f'(\bar{u})\cdot\underbrace{(u-\bar{u})}_{v} \geq 0 \qquad \forall u\in U_{ad}$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} (\bar{y}-y_{\Sigma})\cdot Sv \, d\sigma\, dt + \lambda \iint_{Q} \bar{u}\, v \, dx\, dt \geq 0$$

بنابر قضیه جلسه قبل (برای محاسبه عملگر الحاق) اگر p جواب مسأله

$$\begin{cases} -p_t-\Delta p = 0 & \text{in } Q \\ \partial_n p = \bar{y}-y_{\Sigma} & \text{on } \Sigma \\ p(x,T) = 0 & x\in\Omega \end{cases}$$

$$\iint_{\Sigma} (\bar{y}-y_{\Sigma})(Sv)\, d\sigma\, dt = \iint_{Q} \beta\, v\, p \, dx\, dt$$

$$\Rightarrow \quad f'(\bar{u}) = \beta p + \lambda \bar{u}$$

و شرط بهینگی معادل این است که

$$\operatorname{Proj}_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{\lambda}\beta p\right) = \bar{u}$$

مثال - اگر در مسأله مثل تابع هزینه را به صورت زیر بگیریم:

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left|y(x,T) - y_{\Omega}(x)\right|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\iint_{Q} |u(x,t)|^2 \, dx\, dt$$

(تذکر: عملگر $y \longmapsto y(\cdot,T)\big|_{\partial\Omega}$ برای توابع $y \in W(0,T)$ خوشتعریف نیست. چون

$y(\cdot,T) \in L^2(\Omega)$ است و در $L^2(\Omega)$ عملگر trace تعریف نمی‌شود.)

برای این تابع هزینه عملگر کنترل به حالت به صورت

$$y = Su = E_T \circ G_Q(\beta u)$$

تعریف می‌شود.

برای محاسبه ∇f در این حالت مسأله الحاق به صورت

$$\begin{cases} -p_t - \Delta p = 0 \\ \partial_n p = 0 \\ p(x,T) = \bar{y}(x,T) - y_\Omega(x) \end{cases}$$

خواهد بود، که نتیجه می‌شود:

$$\int_\Omega \left(\bar{y}(x,T) - y_\Omega(x)\right) Sv \, dx = \iint_Q \beta v p \, dx\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(\bar{u}) = \beta p + \lambda \bar{u}$$

روشهای عددی :

دقیقاً مشابه مسائل بیضوی روشهای قبل کاربرد دارند :

بعنوان مثال روش گرادیان شرطی به صورت زیر خواهد بود :

گام اول : با حل مسأله PDE و کنترل u_n حالت y_n را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم : با حل مسأله الحاقی متناظر مسأله کنترل p_n را محاسبه می‌کنیم.

گام سوم :

$$v_n := \underset{v \in U_{ad}}{\operatorname{argmin}} \int (\beta p_n + \lambda u_n) v$$

گام چهارم : u_{n+1} را جواب مسأله بهینه‌سازی زیر قرار دهیم :

$$f(u_{n+1}) = \min_{s \in [0,1]} f(u_n + s(v_n - u_n))$$

روش کاهش بعد:

دامنه تعریف کنترل را به m قسمت تقسیم کنید. توابع $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ بدین صورت تعریف کنید که e_i در قسمت i-ام برابر یک است و در بقیه زیربازه‌ها صفر.

زیرفضای تولیدشده توسط $\{e_i\}$ها در L^2 را E بنامید. مسأله کنترل بهینه را با جایگزینی $U_{ad} \cap E$ به جای U_{ad} به یک مسأله کنترل بهینه در بعد متناهی تبدیل می‌کنیم.

$$u = \sum_{i=1}^{m} u_i e_i$$

چون عملگر S خطی است

$$Su = \sum_{i=1}^{m} u_i Se_i = \sum_{i=1}^{m} u_i y_i$$

به عنوان مثال در مسئله کنترل مرزی

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = 0 \\ \partial_n y + \alpha y = \beta u \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

با تابع هزینه

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left| y(x,T) - y_\Omega(x) \right|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \iint_\Sigma |u|^2 \, d\sigma \, dt$$

$$u \in U_{ad} = \{ u \in L^2(\Sigma) : u_a \le u \le u_b \}$$

$$u_a^i = \underset{\text{در ناحیه } i \text{ ام}}{\max} u_a \quad , \quad u_b^i = \underset{\text{در ناحیه } i\text{-}1 \text{ ام}}{\min} u_b$$

در این صورت

$$U_{ad} \cap E = \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i e_i : \vec{u}_a \le \vec{u} \le \vec{u}_b \right\}$$

$$f(u_1,\dots,u_m) = J(Su,u) = \frac{1}{2}\Big\| \sum_{i=1}^{m} u_i y_i(T) - y_\Omega \Big\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\Big\| \sum_{i=1}^{m} u_i e_i \Big\|_{L^2(\Sigma)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} u_i u_j \big(y_i(T), y_j(T)\big)_{L^2} - \sum_{i=1}^{m} u_i \big(y_i(T), y_\Omega\big)_{L^2} + \frac{1}{2}\|y_\Omega\|^2$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\sum_{i,j} u_i u_j (e_i, e_j)_{L^2(\Sigma)}$$

در نتیجه مسأله بهینه سازی در بعد متناهی به صورت زیر ساده می شود:

$$\min \left\{ \frac{1}{2}\vec{u}^T (C+\lambda D)\vec{u} + \vec{a}^T\vec{u} \right\}$$

$$\vec{u}_a \le \vec{u} \le \vec{u}_b$$

یک ماتریس قطری است.

$$C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \big(y_i(T), y_j(T)\big)_{L^2}, \quad D = (d_{ij}), \quad d_{ij} = (e_i, e_j)_{L^2(\Sigma)}$$

$$\vec{a} = (a_i) \qquad a_i = -\big(y_i(T), y_\Omega\big)$$

کنترل بهینه مسائل غیرخطی

فرض کنیم بخواهیم مسأله کنترل

$$\begin{cases} -\Delta y + y^3 = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

را حل کنیم. نگاشت $y = S(u)$ دیگر خطی نیست.

سؤال: نگاشت S بین چه فضاهایی به صورت خوش تعریف قابل بیان است؟

برای اولین گام باید مفهوم جواب ضعیف را برای معادلات غیرخطی تعریف کنیم.

اگر معادله بالا را در تابع آزمون $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ ضرب کنیم،

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi + y^3 \varphi \, dx = \int_\Omega u \varphi \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

اگر فرض کنیم $y \in H^1(\Omega)$ باید جمله $\int_\Omega y^3 \varphi \, dx$ انتگرال‌پذیر باشد تا عبارت بالا معنی بدهد.

وقتی $\varphi \in L^2(\Omega)$ برای اینکه انتگرال معنی داشته باشد باید $y^3 \in L^2(\Omega)$.

در نتیجه نگاشت $\Phi : y \longmapsto y^3$ باید فضای $H^1(\Omega)$ را حداقل به $L^2(\Omega)$ تصویر کند.

به طور معادل باید $\int |y|^6 < \infty$ یا $y \in L^6(\Omega)$.

ابزار مناسب برای این مطلب قضایای نشاندن سوبولف است.

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \qquad 2 \leq p \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

که N بعد فضا است. حداقل این قضیه برای $N=3$ نشان می‌دهد که $\Phi : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ خوش‌تعریف است.

مسأله شبه‌خطی :

$$(SEP)\begin{cases} -\Delta y + c_0(x)y + d(x,y) = f & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha(x)y + b(x,y) = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

تعریف جواب ضعیف : تحت شرایطی برای $d(x,y)$ و $b(x,y)$ که بعداً تعیین می‌کنیم، $y \in H^1(\Omega)$ جواب ضعیف معادله فوق است هرگاه

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v + c_0(x) y v + d(x,y) v \, dx + \int_{\partial\Omega} (b(x,y) + \alpha y) v \, d\sigma = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma$$

برای هر $v \in H^1(\Omega)$ برقرار باشد.

دو چالش زیر برای حل مسائل PDE شبه‌خطی وجود دارند:

۱- تعیین شرایطی برای $a(x,y)$ و $b(x,y)$ که انتگرال‌های مربوط خوش‌تعریف شوند.

۲- قضیه Lax-Milgram را برای حالت غیرخطی تعمیم دهیم که بتوان وجود جواب را برای مسأله تغییراتی به‌دست آمده تضمین کند.

کنترل بهینه

جلسه یازدهم ۹۸/۸/۱۱

ایده اثبات قضیه لکس - میلگرام در حالت خطی:

اگر $a(y,v)$ یک فرم دوخطی پیوسته باشد که در شرایط قضیه صدق کند و $F \in (H^1)^*$

به دنبال $y \in H^1$ هستیم که

$$(1) \quad a(y,v) = \langle F, v \rangle \qquad \forall v \in H^1$$

عملگر $A : H^1 \to (H^1)^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\langle Ay, v \rangle = a(y,v)$$

رابطه (1) به معنی این است که برای $y \in H^1$ داشته باشیم $Ay = F$.

درحالتی که $a(y,v)$ فرم دوخطی است، عملگر A یک عملگر خطی پیوسته و وارون پذیر می‌شود.

درحالتی که $a(y,v)$ غیرخطی باشد، که در مسأله شبه‌خطی مطلب قبل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a(y,v) = \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v + c_0(x) y v + d(x,y) v \, dx + \int_{\partial\Omega} (b(x,y) + \alpha y) v \, d\sigma$$

همچنین در این مسأله $F \in (H^1)^*$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود،

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma$$

مشابه قضیه لکس-میلگرام عملگر $A: H^1 \to (H^1)^*$ با ضابطه

$$\langle Ay, v \rangle = a(y,v)$$

قابل تعریف است. ($a(y,v)$ نسبت به v خطی و پیوسته است.) هرچند A یک عملگر غیرخطی است.

تعریف ـ V یک فضای باناخ است. عملگر $A : V \longrightarrow V^*$ را یکنوا گوییم هرگاه

$$\langle Ay_1 - Ay_2 , y_1 - y_2 \rangle \geq 0 \qquad \forall y_1 , y_2 \in V$$

آن را یکنوای اکید گوییم اگر در نامساوی بالا، تساوی اتفاق افتاد داشته باشیم $y_1 = y_2$.

به علاوه A را به طور قوی یکنوا گوییم هرگاه ثابت $\beta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\langle Ay_1 - Ay_2 , y_1 - y_2 \rangle \geq \beta \, \| y_1 - y_2 \|_V^2$$

همچنین A را ترالکی (Coercive) گوییم اگر $\dfrac{\langle Ay , y \rangle}{\| y \|_V} \longrightarrow \infty$ وقتی $\| y \| \to \infty$.

هر عملگر به طور قوی یکنوا، ترالکی است.

عملگر A را شبه پیوسته گوییم اگر تابع حقیقی $\varphi(t) = (A(y+tv), w)$ برای هر $y, v, w \in V$ نسبت به $t \in [0,1]$ پیوسته باشد.

قضیه: اگر فضای هیلبرت جدایی پذیر باشد و $A: V \longrightarrow V^*$ یکنوا، کراندار و شبه پیوسته باشد. آنگاه معادله $Ay = F$ برای هر $F \in V^*$ دارای لااقل یک جواب $y \in V$ است. مجموعه همه جوابها، بسته، کران‌دار و محدب است. به علاوه اگر A یکنوای اکید باشد آنگاه جواب معادله یکتا است. اگر A به طور قوی یکنوا باشد، آنگاه A وارون پذیر است و وارون آن لیپشیتز است.

برای اثبات وجود جواب مسأله شبه خطی باید نشان دهیم $A: H^1 \longrightarrow (H^1)^*$ در شرایط قضیه بالا صدق می‌کند. به ناچار فرضیات زیر را لازم داریم:

(H1) توابع $d(x,y): \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $b(x,y): \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر و کران‌دار هستند.

به‌علاوه برای تقریباً هر x، نسبت به y پیوسته و صعودی هستند.

نکته- شرط کران‌داری توابع d و b تضمین می‌دهد که فرم $a(y,v)$ خوش‌تعریف شود.

یعنی انتگرال جملات غیرخطی وجود دارند. و در ضمن برای هر $y \in H^1$ ثابت نسبت به v خطی و پیوسته است.

این شرط دوم برای تعریف شدن $A: H^1 \to (H^1)^*$ ضروری است.

(H2) $d(x,0) = 0$ و $b(x,0) = 0$ برای تقریباً هر x.

(H3) توابع c_0 و α اندازه‌پذیر و کران‌دار هستند. به علاوه تقریباً همه‌جا نامنفی هستند. همچنین فرض می‌کنیم هر دو تابع صفر نباشند یعنی

$$\|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} > 0.$$

اثبات وجود جواب معادله شبه‌خطی :

یکنوایی A : در واقع $A = A_1 + A_2 + A_3$ که

$$\langle A_1 y, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v + c_0(x) y v + \int_{\partial\Omega} \alpha y v \, d\sigma$$

$$\langle A_2 y, v \rangle = \int_{\Omega} d(x, y(x)) \, v(x) \, dx \quad , \quad \langle A_3 y, v \rangle = \int_{\partial\Omega} b(x, y) v \, d\sigma$$

عملگر A_1 که قسمت خطی عملگر A است شبیه حالت خطی به سادگی دیده می‌شود که به طور قوی یکنوا است.

یعنی $0 < \beta_1$ وجود دارد که

$$\beta_1 \|y\|_{H^1}^2 \le \langle A_1 y, y \rangle$$

خاصیتِ یکنوایِ A_2 و A_3 از یکنوایی ترابع d و b نسبت به y نتیجه میشود. به عنوان مثال چون $d(x,y)$ نسبت به y صعودی است پس

$$\big(d(x,y_1)-d(x,y_2)\big)\cdot(y_1-y_2)\geq 0$$

و در نتیجه انتگرال این عبارت مثبت است یعنی

$$0\leq\langle A_2y_1-A_2y_2\,,\,y_1-y_2\rangle=\int_\Omega\big(d(x,y_1(x))-d(x,y_2(x))\big)(y_1(x)-y_2(x))dx$$

یکنوایی قوی :

چون A_1 به طور قوی یکنوا است پس A نیز به طور قوی یکنوا است.

$$\langle Ay_1-Ay_2\,,y_1-y_2\rangle=\langle A_1y_1-A_1y_2\,,y_1-y_2\rangle+\underbrace{\langle A_2y_1-A_2y_2\,,y_1-y_2\rangle}_{\geq 0}$$

$$+\underbrace{\langle A_3y_1-A_3y_2\,,y_1-y_2\rangle}_{\geq 0}$$

شبه پیوستگی A :

باید نشان دهیم $\varphi(t) = \langle A(y+tv), w \rangle$ پیوسته است.

کافی است برای هر کدام از عملگرهای A_1، A_2 و A_3 شبه پیوستگی را اثبات کنیم. برای A_1 واضح است.

(چرا؟) برای A_2 داریم:

$$\varphi(t) = \langle A_2(y+tv), w \rangle = \int_\Omega d(x, y+tv)\, w(x)\, dx$$

برای اینکه نشان دهیم $\varphi(t)$ پیوسته است باید ثابت کنیم $\lim_{t_n \to \tau} \varphi(t_n) = \varphi(\tau)$ یا به عبارتی

$$\int_\Omega \underbrace{d(x, y(x)+t_n v(x))}_{u_n(x)}\, w(x)\, dx \longrightarrow \int \underbrace{d(x, y(x)+\tau v(x))}_{u(x)}\, w(x)\, dx$$

چون d نسبت به مولفه دوم پیوسته است پس $u_n \longrightarrow u$ تقریبا همه جا در Ω.

برای نشان دادن همگرایی $\int u_n \longrightarrow \int u$ از قضیه تسلط لبگ استفاده می‌کنیم یعنی باید تابع انتگرال‌پذیر $U(x)$ وجود داشته باشد که

$$|u_n(x)| \leq U(x)$$

یا به طور معادل

$$\left| d(x, y(x)+t_n v(x))\, \omega(x) \right| \leq M |\omega(x)| = U(x)$$

که M کران بالای تابع d است که بنابر (H1) وجود دارد.

<u>جمع‌بندی</u> : به کمک قضیه عملگرهای یکنوا معادله شبه‌خطی ملبه‌قبل با فرض‌های (H1) و (H2) و (H3)

جواب یکتا دارد. به علاوه ثابت $0 < C$ وجود دارد که

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \qquad (2)$$

نامساوی آخر صفحه قبل از این نتیجه می‌شود که $A: H^1 \longrightarrow (H^1)^*$ وارون لیپشیتز دارد. در واقع اگر $y \in H^1$

جواب $Ay = F$ باشد، آنگاه $y = A^{-1}F$. از طرفی

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma$$

و

$$\|F\|_{(H^1)^*} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

در نتیجه برای نامساوی صفحه قبل کافی است داشته باشیم

$$\|A^{-1}F\| \leq C\|F\|$$

از طرفی وقتی $F=0$ تابع $y=0$ در معادله شرط صدق می‌کند (به خاطر فرض (H2))

یعنی $A^{-1}0 = 0$. و بنابر خاصیت لیپشیتز

$$\|A^{-1}F\| = \|A^{-1}F - A^{-1}0\| \leq C\|F - 0\| = C\|F\|$$

نکته - اثبات دیگر برای نامساوی (2) :

A یک عملگر به طور قوی یکنوا است . یعنی $\langle Ay_1 - Ay_2 , y_1 - y_2 \rangle \geq \beta \|y_1 - y_2\|^2$

بنابر شرط $(H2)$ می‌دانیم $A0 = 0$. پس در رابطه بالا $y_2 = 0$ قرار می‌دهیم و $y_1 = y$ جواب $Ay = F$ قرار دهید :

$$\langle F, y \rangle = \langle Ay , y \rangle \geq \beta \|y\|^2_{H^1}$$

$$\|$$

$$\int_\Omega f y \, dx + \int_{\partial\Omega} g y \, d\sigma \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|y\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \cdot \|y\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$\leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \cdot \|y\|_{H^1(\Omega)}$$

نکته- شرط (H2) ضروری نیست. همانطور که در اثبات دیدیم در وجود و یکتایی جواب احتیاجی به این فرض نداشتیم. تنها در نامساوی (2) استفاده می‌شود که بدون (H2) نامساوی (2) به صورت زیر خواهد بود:

$$(2)' \qquad \|y\|_{H^1} \le c\left(\|f-d(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} + \|g-b(\cdot,0)\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)$$

اگر در مسأله شبه‌خطی به جای f قرار دهیم $\tilde{f} = f-d(\cdot,0)$ و به جای d قرار دهیم $\tilde{d}(x,y)=d(x,y)-d(x,0)$. (یعنی از دو طرف معادله $d(x,0)$ را کم کنیم.) همین برای شرط مرزی و توابع $\tilde{g}$ و $\tilde{b}$ تعریف کنیم. آنگاه $\tilde{d}$ و $\tilde{b}$ در (H2) صدق می‌کنند و نامساوی (2) برای $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ برقرار است که در واقع همین نامساوی $(2)'$ است.

نکته- اگر $d(x,y)=y^3$ شرط کران‌داری در (H1) برقرار نیست. در واقع خاصیت کران‌داری توابع d و b در خوش‌تعریفی $A: H^1 \to (H^1)^*$ و شبه‌پیوستگی A (آنجا که از قضیه تسلط لبگ استفاده کردیم) استفاده می‌شوند. سؤال مهم این است که چقدر می‌توان شرط کران‌داری d و b را ضعیف کرد.

مثلاً برای $d(x,y)=y^3$ آیا اثبات قبل برقرار است؟

کنترل بهینه

جلسه دوازدهم ۹۸/۸/۱۳

قضیه 1. اگر شرایط (H1)، (H2) و (H3) برقرار باشد، $f \in L^r(\Omega)$, $g \in L^s(\partial\Omega)$ که $r > N/2$ و $s > N-1$، آنگاه مسئله (SEP) دارای جواب یکتای $y \in H^1(\Omega)$ است.

به علاوه $y \in L^\infty(\Omega)$ و ثابت $0 < C_\infty$ وجود دارد که مستقل از f، g، d و b است و

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\infty \left(\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\partial\Omega)} \right)$$

در ضمن تابع y پیوسته نیز هست.

تذکر- اگر شرط (H2) برقرار نباشد، مشابه بحث جلسه قبل نتیجه بالا برای $f - d(x,0)$ و $g - b(x,0)$ به جای f و g برقرار است.

قضیه (نشاندن فضاهای سوبولف) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ناحیه لیپ‌شیتز و کران‌دار باشد و $1 < p < \infty$ و m عدد صحیح.
آنگاه نشاندنهای زیر پیوسته هستند:

- اگر $mp < N$ آنگاه $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ برای $1 \leq q \leq \frac{NP}{N-mp}$

یعنی ثابت $c > 0$ وجود دارد که

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

- اگر $mp = N$ آنگاه $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ برای هر $1 \leq q < \infty$

- اگر $mp > N$ آنگاه $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$

قضیه (Rellich) تحت شرایط قضیه قبل نشاندنهای فوق فشرده هستند. یعنی هر دنباله کران‌دار در $W^{m,p}(\Omega)$ یک زیردنباله همگرا در $L^q(\Omega)$ دارد.

قضیه: اگر $\partial\Omega$ از کلاس $C^{m-1,1}$ باشد. برای $mp>N$ عملگر trace

$$\tau : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

تعریف می‌شود که $1 \le q \le \frac{(N-1)p}{N-mp}$. اگر $mp=N$، آنگاه نتیجه قبل برای $1 \le q < \infty$ درست است.

اثبات قضیه ۱: بنابر قضیه وجود جواب (SEP) در مطلب قبل $y \in H^1(\Omega)$ جواب مسئله هست.

$$y_k(x) = \begin{cases} y(x) - k & y(x) \ge k \\ 0 & |y(x)| \le k \\ y(x) + k & y(x) \le -k \end{cases}$$

می‌دانیم که $y_k \in H^1(\Omega)$. می‌خواهیم نشان دهیم k به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که $y_k = 0$.

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : |y(x)| \ge k\}, \quad \Gamma_k := \{x \in \partial\Omega : |y(x)| \ge k\}$$

گام اول: داریم $\int_{\partial\Omega} b(x,y)\,y_k(x)\,d\sigma \geq 0$, $\int_{\Omega} d(x,y)\,y_k(x)\,dx \geq 0$

زیرا اگر $y_k(x) < 0$ آنگاه باید $y(x) \leq -k$ و بنابر خاصیت صعودی $d(x,y)$ نسبت به y

و شرط $d(x,0)=0$ داریم $d(x,y(x)) \leq 0$. به طور مشابه اگر $y_k(x) > 0$ آنگاه

$d(x,y(x)) \geq 0$.

گام دوم: $$\int_{\Omega} f\,y_k\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,y_k\,d\sigma \geq \int_{\Omega} \nabla y\cdot\nabla y_k + c_0\,y\,y_k\,dx + \int_{\partial\Omega} \alpha\,y\,y_k\,d\sigma$$

از تعریف جواب ضعیف و جایگزینی $v = y_k$ و استفاده از گام اول.

گام سوم: $$\int_{\Omega} |\nabla y_k|^2 + c_0\,y_k^2\,dx + \int_{\partial\Omega} \alpha\,y_k^2\,d\sigma \leq \int_{\Omega} f\,y_k\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,y_k\,d\sigma$$

از تساوی $\nabla y_k = \begin{cases} \nabla y & |y(x)| \geq k \\ 0 & |y(x)| \leq k \end{cases}$ به وضوح نتیجه می‌شود که

$$\int_\Omega |\nabla y_k|^2 dx = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla y_k \, dx$$

به علاوه

$$\int_\Omega c_0 \, y \, y_k \, dx = \int_{\{y>k\}} c_0 (y_k + k) y_k \, dx + \int_{\{y<k\}} c_0 (y_k - k) y_k \, dx$$

$$= \int_\Omega c_0 y_k^2 \, dx + \int_{\underbrace{\{y>k\}}_{y_k>0}} k c_0 y_k \, dx - \int_{\underbrace{\{y<k\}}_{y_k<0}} k c_0 y_k \geq \int_\Omega c_0 y_k^2$$

گام چهارم: به کمک نامساوی پوانکاره و مشابه قضایای وجود معادلات خطی ثابت $0<\beta$ وجود دارد که

$$\beta \|y_K\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \int_\Omega f y_k \, dx + \int_{\partial\Omega} g y_k \, d\sigma$$

گام پنجم: بنابر نامساوی هولدر

$$\left|\int_\Omega f\, y_k\, dx\right| \le \|f\|_{L^r(\Omega)} \cdot \|y_k\|_{L^{r'}(\Omega)}$$

که $\frac{1}{r'}+\frac{1}{r}=1$. از طرفی داریم:

$$\int_\Omega |y_k(x)|^{r'}dx = \int_{\Omega_k} |y_k(x)|^{r'}dx \le \left[\int_{\Omega_k} |y_k(x)|^{2r'}dx\right]^{1/2}\cdot\left[\int_{\Omega_k} 1\, dx\right]^{1/2}$$

$$\le \|y_k\|^{r'}_{L^{2r'}(\Omega)} \cdot |\Omega_k|^{1/2}$$

درنتیجه

$$\left|\int_\Omega f\, y_k\, dx\right| \le \|f\|_{L^r(\Omega)} \cdot \|y_k\|_{L^{2r'}(\Omega)} \cdot |\Omega_k|^{\frac{1}{2r'}}$$

و بنابر قضیه نشاندن سوبولف:

$$\le C\, \|f\|_{L^r(\Omega)} \cdot \|y_k\|_{H^1(\Omega)} \cdot |\Omega_k|^{\frac{1}{2r'}}$$

به طور مشابه

$$\left|\int_{\partial\Omega} g\, y_k \, d\sigma\right| \le \|g\|_{L^s(\partial\Omega)} \cdot \|y_k\|_{L^{2s'}(\partial\Omega)} \cdot |\Gamma_k|^{\frac{1}{2s'}}$$

که $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ و بنابر قضیه trace

$$\le C\, \|g\|_{L^s(\partial\Omega)} \cdot \|y_k\|_{H^1(\Omega)} \cdot |\Gamma_k|^{\frac{1}{2s'}}$$

تا اینجا از گام چهارم و پنجم نشان دادیم

$$\|y_k\|_{H^1(\Omega)} \le C\left[\|f\|_{L^r(\Omega)} \cdot |\Omega_k|^{\frac{1}{2r'}} + \|g\|_{L^s(\partial\Omega)} \cdot |\Gamma_k|^{\frac{1}{2s'}}\right]$$

گام ششم:

$$\left[\int_{\Omega_k} (\underbrace{|y|-k}_{|y_k|})^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\Gamma_k} (\underbrace{|y|-k}_{|y_k|})^q \, d\sigma\right]^{\frac{1}{q}} \le C\, \|y_k\|_{H^1}$$

نامساوی بالا ترکیب قضایای نشاندن سوبولف و trace است برای $1 \le p \le \frac{2N}{N-2}$ و $1 \le q \le \frac{2(N-1)}{N-2}$

گام هفتم: فرض کنید $h>k$. واضح است که $\Omega_h \subseteq \Omega_k$ و $\Gamma_h \subseteq \Gamma_k$.

$$\left[\int_{\Omega_k} (|y|-k)^p \, dx\right]^{1/p} \geq \left[\int_{\Omega_h} (|y|-k)^p \, dx\right]^{1/p} \geq \left[\int_{\Omega_h} (h-k)^p \, dx\right]^{1/p}$$

$$= (h-k)\, |\Omega_h|^{1/p}$$

به طور مشابه

$$\left[\int_{\Gamma_k} (|y|-k)^q \, dx\right]^{1/q} \geq (h-k)\, |\Gamma_h|^{1/q}$$

در نتیجه:

$$(h-k)\left[|\Omega_h|^{1/p} + |\Gamma_h|^{\frac{1}{q}}\right] \leq C\left[\|f\|_{L^r(\Omega)} \cdot |\Omega_k|^{\frac{1}{2r'}} + \|g\|_{L^s(\partial\Omega)} \cdot |\Gamma_k|^{\frac{1}{2s'}}\right]$$

$$\leq C\left[\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\partial\Omega)}\right]\left[|\Omega_k|^{\frac{1}{2r'}} + |\Gamma_k|^{\frac{1}{2s'}}\right]$$

قرار دهید: $\varphi(h) = |\Omega_h|^{\frac{1}{p}} + |\Gamma_h|^{\frac{1}{q}}$ و p و q را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم

$$1 \leq p = 2\lambda r' \leq \frac{2N}{N-2} \qquad 1 \leq q = 2\lambda s' \leq \frac{2(N-1)}{N-2}$$

برای $\lambda > 1$. (بررسی کنید که چنین انتخابی با شرط $r > \frac{N}{2}$ و $s > N-1$ ممکن است) در این صورت خواهیم داشت:

$$(h-k)\varphi(h) \leq c\left(\|f\|_{L^r} + \|g\|_{L^s}\right)\left[|\Omega_k|^{\lambda/p} + |\Gamma_k|^{\lambda/s}\right]$$

$$\leq c\left(\|f\|_{L^r} + \|g\|_{L^s}\right)\underbrace{\left[|\Omega_k|^{1/p} + |\Gamma_k|^{1/s}\right]^{\lambda}}_{[\varphi(k)]^{\lambda}}$$

گام هشتم: لم- اگر تابع نامنفی و غیرصعودی φ در بازه $[k_0, \infty)$ تعریف شده باشد و برای $h > k$

داشته باشیم $(h-k)\varphi(h) \leq C_0[\varphi(k)]^{\lambda}$ آنگاه

برای $\varphi(k_0+\delta)=0$ $\quad \delta = C_0[\varphi(k_0)]^{\lambda-1} \cdot 2^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}$.

بنابراین لم فوق برای $k_0=0$ ، $\varphi(\delta)=0$ است که δ تنها به پارامترهای C_0 ، λ و $|\Omega|$ و $|\partial\Omega|$ وابسته است.

درنتیجه برای هر $k \geq C_\infty(\|f\|_{L^r(\Omega)}+\|g\|_{L^s(\partial\Omega)})$ باید $\varphi(k)=0$

$$\Rightarrow |\Omega_k|=0 \Rightarrow |\{x : |y(x)|>k\}|=0$$

$$\Rightarrow y\in L^\infty(\Omega), \quad \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k$$

اثبات پیوستگی جواب :

$$\Delta y + c_0 y + d(x,y) = f \in L^r$$

$$\Rightarrow \Delta y + c_0 y \in L^r \Rightarrow y \in W^{2,r}(\Omega)$$

فضاهای نظم جواب معادلات بیضوی

با قضیه نشاندن سوبولف وقتی $r > \frac{N}{2}$ است $W^{2,r} \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.