امتحان میان‌ترم درس کنترل بهینه ۹۸،۹،۲۳

۱ـ روش لاگرانژین را برای پیدا کردن کنترل بهینه مسأله زیر شرح دهید که در آن $A$ یک ماتریس $m \times m$ وارون پذیر و $B$ یک ماتریس $m \times n$ است. سیستم بهینگی را بنویسید و توضیح دهید چگونه از آن شرایط KKT استخراج می‌شود.

$$\begin{cases} \min\ J(y,u) \\ Ay = Bu, \quad u \in U_{ad} = \{u \in \mathbb{R}^n :\ u_a \le u \le u_b\} \end{cases}$$

۲ـ مسأله
$$\begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$
را در نظر بگیرید.

الف) چرا عملگر کنترل-حالت $u \longmapsto y = Su$ فشرده است؟

ب) نقش فشردگی این عملگر در اثبات وجود کنترل بهینه چیست؟

ج) عملگر الحاقی $S^*$ را محاسبه کنید.

۳ـ در مسأله کنترل درونی سؤال قبل، با فرض اینکه می‌دانیم در نقطه کنترل بهینه $\bar{u}$ داریم: $f'(\bar{u}) = \beta p + \lambda \bar{u}$، با تعریف مخروط مماسی در نقطه $\bar{u}$ و عملگر تصویر روی این مخروط ثابت کنید $\bar{u} = \mathrm{Proj}(-\frac{1}{\lambda}\beta p)$.

۴ شرایط لازم کنترل بهینه در مسأله زیر را بنویسید :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = f & \text{in } Q = (0,T) \times \Omega \\ \partial_n y + \alpha y = \beta u & \text{on } \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega \\ y(x,0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$u \in U_{ad} \subseteq L^2(\Sigma)$$

$$\min J(y,u) = \frac{1}{2} \iint_Q |y - y_Q|^2 \, dx\,dt + \frac{1}{2} \int_\Omega |y(x,T) - y_T(x)|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \iint_\Sigma |u|^2 \, d\sigma\, dt$$