معادلات دیفرانسیل

جلسه سیزدهم ۹۸/۸/۱۳

روش ضرایب نامعین $\mathcal{L}[y] = ay'' + by' + cy = g(t)$

حالت سوم -

$$g(t) = (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) e^{\alpha t} \begin{cases} \cos\beta t \\ \sin\beta t \end{cases}$$

می‌دانیم اگر $u_1(t)$ و $u_2(t)$ دو تابع حقیقی باشند که $\mathcal{L}[u_1 + i u_2] = g_1 + i g_2$ آنگاه $\mathcal{L}[u_1] = g_1$ و $\mathcal{L}[u_2] = g_2$. در نتیجه اگر $\phi(t) = u_1(t) + i u_2(t)$ جواب خصوصی معادله

$$\mathcal{L}[y] = (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)\, e^{\alpha t} (\cos\beta t + i \sin\beta t) \qquad (1)$$

باشد، آنگاه u_1 جواب خصوصی $\mathcal{L}[y] = (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) e^{\alpha t} \cos\beta t$ است.

برای جواب خصوصی (1) کافی است $\mathcal{L}[y] = (a_0 + \cdots + a_n t^n)\, e^{(\alpha + i\beta)t}$ را حل کنیم که دقیقاً مشابه حالت دوم است.

- اگر $\alpha+i\beta$ ریشه چندجمله‌ای مشخصه $ar^2+br+c=0$ نباشد، حدس جواب به صورت

$$y_p(t) = (C_0+C_1t+\cdots+C_nt^n)\,e^{(\alpha+i\beta)t}$$

است. دقت کنید در این حالت ضرایب چندجمله‌ای، C_i ها می‌توانند مقادیر مختلط داشته باشند.

با جایگذاری در (1) ضرایب C_i را پیدا می‌کنیم و قسمت حقیقی جواب به دست آمده متناظر جواب خصوصی

برای

(2) $$L[y] = (a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)\,e^{\alpha t}\cos\beta t$$

است و قسمت موهومی متناظر جواب خصوصی

(3) $$L[y] = (a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)\,e^{\alpha t}\sin\beta t$$

است. البته می‌توان از ابتدا جواب را به صورت یک تابع حقیقی حدس زد که به شکل زیر است:

$$y_p=\left[(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n)\cos\beta t+(B_0+B_1t+\cdots+B_nt^n)\sin\beta t\right]e^{\alpha t}$$

می‌توان حدس بالا را از استفاده در معادله (۲) یا (۳) جایگذاری کنیم و ضرایب حقیقی و مجهول $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n$ را پیدا کنیم.

- اگر $\alpha+i\beta$ ریشه چندجمله‌ای مشخصه $ar^2+br+c=0$ باشد یا $e^{\alpha t}\cos\beta t$ و $e^{\alpha t}\sin\beta t$ جواب‌های عمومی معادله همگن باشند، که در این صورت کافی است در حدس‌های قبلی t ضرب شود.

مثال- $y''+4y=\cos 2t$

چندجمله‌ای مشخصه $r^2+4=0$ دارای ریشه‌های $r=\pm 2i$ است. جواب عمومی $c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$ است.

در راه حل اول ابتدا جواب خصوصی معادله $y''+4y=e^{2it}$ را پیدا می‌کنیم. چون $2i$ ریشه چندجمله‌ای مشخصه است حدس جواب به صورت

$$y_p = c_0 t e^{2it}$$

است که با جایگذاری در معادله

$$\underbrace{4ic_0e^{2it} - 4c_0te^{2it}}_{y_p''} + \underbrace{4c_0te^{2it}}_{4y_p} = e^{2it}$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{1}{4i}, \quad y_p = \frac{-it}{4}e^{2it}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{-it}{4}e^{2it}\right) = \frac{t}{4}\sin 2t$$

جواب خصوصی معادله $y''+4y=\cos 2t$ است.

در راه حل دوم حدس جواب به صورت

$$y_p = t\left(A_0 \cos 2t + B_0 \sin 2t\right)$$

است که در معادله $y'' + 4y = \cos 2t$ جایگذاری می‌شود.

$$\underbrace{-4t\left(A_0\cos 2t + B_0 \sin 2t\right) + 4\left(-A_0 \sin 2t + B_0 \cos 2t\right)}_{y_p''} + \underbrace{4t\left(A_0 \cos 2t + B_0 \sin 2t\right)}_{4y_p} = \cos 2t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = 0 \\ B_0 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow y_p = \frac{t}{4} \sin 2t$$

مثال - $y'' + 2y' + y = te^t \sin t$

ضد معادله‌ای شخصی $r^2 + 2r + 1 = 0$ است که ریشه تکرار $r = -1$ دارد.

در راه حل اول که معادله $y'' + 2y' + y = te^{(1+i)t}$ را باید حل کنیم حدس جواب به صورت

$$y_p = (C_0 + C_1 t)e^{(1+i)t}$$

است. در راه حل دوم که معادله اصلی را در نظر بگیریم حدس جواب به صورت زیر است.

$$y_p = \left[(A_0 + A_1 t)\cos t + (B_0 + B_1 t)\sin t\right] e^t$$

در راه حل اول بعد از جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$2(1+i)C_1 e^{(1+i)t} + (1+i)^2 ((C_0 + C_1 t)e^{(1+i)t} + 2C_1 e^{(1+i)t} + 2((C_0 + C_1 t)(1+i)e^{(1+i)t}$$
$$+ (C_0 + C_1 t) e^{(1+i)t} = t e^{(1+i)t}$$

$$\begin{cases} 2(1+i)C_1+(1+i)^2C_0+2C_1+2(1+i)C_0+C_0=0 \\ (1+i)^2C_1+2(1+i)C_1+C_1=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{1}{(2+i)^2}\ , \qquad C_0=\frac{-2C_1}{2+i}=\frac{-2}{(2+i)^3}$$

$$\Rightarrow y_p=\left[\frac{-2}{(2+i)^3}+\frac{t}{(2+i)^2}\right]e^{(1+i)t}$$

$Im(y_p)$ جواب خصوصی معادله اصلی است.

جمع‌بندی: در روش ضرایب نامعین جواب خصوصی معادله خطی ناهمگن با ضرایب ثابت $ay''+by'+cy=g(t)$ را پیدا می‌کنیم که $g(t)$ به صورت حاصلضرب چندجمله‌ای، توابع مثلثاتی و توابع نمایی است.

حالت سوم یعنی

$$g(t)=(a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)\,e^{\alpha t}\begin{cases}\cos\beta t\\ \sin\beta t\end{cases} \qquad (4)$$

تمام حالتها را پوشش می‌دهد. همچنین اگر $g(t)$ به صورت جمع توابعی به صورت بالا باشند، یعنی $g(t)=g_1+\cdots+g_k$ که هر g_i به فرم (4) باشد، با پیدا کردن جواب خصوصی هر معادله

$$\mathcal{L}[y_i]=g_i$$

و قرار دادن $y_p=y_1+\cdots+y_k$ جواب خصوصی $\mathcal{L}[y]=g$ به دست می‌آید.

به عنوان مثال برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله $y'' + y' + y = t^2 + e^t + t\sin t$

باید جواب خصوصی هر کدام از سه معادله زیر را با روش ضرایب نامعین پیدا کرد :

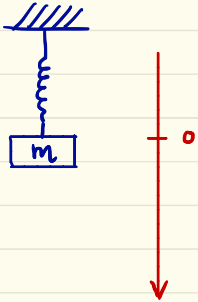
$$y_p = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} y_1'' + y_1' + y_1 = t^2 & \xrightarrow{\text{حدس جواب}} \quad y_1 = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 \\ y_2'' + y_2' + y_2 = e^t & \longrightarrow \quad y_2 = B_0 e^t \\ y_3'' + y_3' + y_3 = t\sin t & \longrightarrow \quad y_3 = (C_0 + C_1 t)\cos t + (D_0 + D_1 t)\sin t \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه چهاردهم ۹۸/۸/۱۸

مدل ارتعاشات فنر :



به یک فنر با ثابت K جسمی به جرم m آویزان شده است

که باعث اختلاف طول Δl شده است. در نتیجه

$$K\Delta l = mg$$

اگر نیروی $F(t)$ در راستای فنر به جسم وارد شود و $y(t)$ محل استقرار جسم در زمان t.

$$my'' = mg - k(\Delta l + y) - \underbrace{\gamma y'}_{\text{نیروی مقاومت هوا}} + F(t)$$

$$\Rightarrow \quad my'' + \gamma y' + Ky = F(t)$$

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

ارتعاشات آزاد : $F=0$ ، $\gamma=0$.

$$my'' + Ky = 0$$

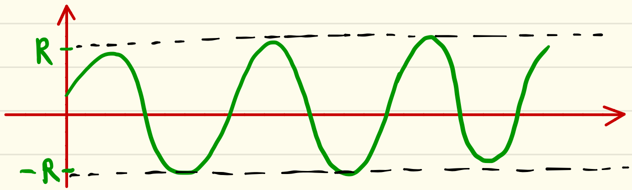
برای حل این معادله ، اگر معادله مشخصه آن را بنویسیم ، خواهیم داشت

$$mr^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} =: \pm i\omega_0$$

در این صورت $y(t)$ در حالت کلی به شکل زیر است :

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$R = \sqrt{a^2+b^2} \ , \quad \tan\delta = b/a$$



در این حالت $y(t)$ یک تابع تناوبی با دوره تناوب

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

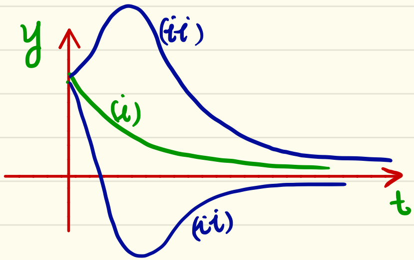
است. ω_0 را فرکانس ذاتی این نوسانگر می‌نامیم.

ارتعاشات آزاد میرا : $F=0$ و $\gamma>0$. $\quad my''+\gamma y'+ky=0$

$$mr^2+\gamma r+k=0 \Rightarrow r_1, r_2=\frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-4km}}{2m}$$

(i) $\gamma^2-4km>0$ در این حالت $r_1, r_2<0$ و

$$y(t)=ae^{r_1 t}+be^{r_2 t} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t\longrightarrow +\infty$$

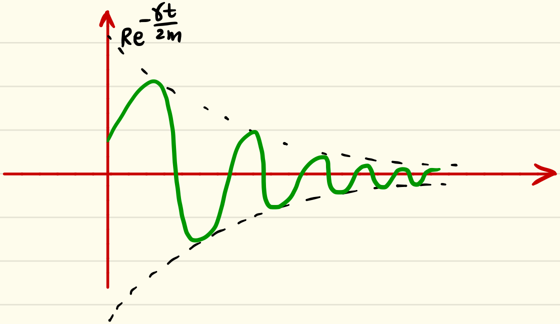


(ii) $\gamma^2-4km=0$ در این حالت $r_1=r_2=\frac{-\gamma}{2m}$ ریشه تکراری است و

$$y(t)=(a+bt)\,e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t\longrightarrow \infty$$

(iii) $\gamma^2-4km<0$ در این حالت دو ریشه مختلط $r_1, r_2=\frac{-\gamma}{2m}\pm i\beta$ داریم و

$$y(t)=e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left(a\cos\beta t+b\sin\beta t\right)=Re^{-\frac{\gamma t}{2m}}\cos(\beta t-\delta)$$



ارتعاشات غیرآزاد : $F(t)=F_0 \cos \omega t$

$$my''+\gamma y'+ky=F_0 \cos \omega t$$

اگر $\gamma>0$، $\cos \omega t$ نمی‌تواند جواب معادله همگن باشد، درنتیجه جواب خصوصی معادله بالا با روش حدسی به صورت زیر است:

$$y_p(t)=A\cos \omega t+B\sin \omega t$$

که با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(k-m\omega^2)A+\gamma B\omega=F_0\\ -\gamma\omega A+(k-m\omega^2)B=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad y_p(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \delta)}{\left[(K - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2\right]^{1/2}}$$

درنتیجه جواب معادله به صورت $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$ که $y_c(t)$ جواب عمومی معادله همگن است که در حالت

ارتعاشات آزاد محاسبه شد. همانطور که دیدیم $\lim\limits_{t\to\infty} y_c(t) = 0$ درنتیجه برای مقادیر بزرگ t

$y(t)$ تقریباً برابر $y_p(t)$ است و رفتار مجانبی آن مشابه y_p خواهد بود.

یعنی $y(t)$ برای مقادیر بزرگ t تقریباً نوسانی است با فرکانس ω.

اگر $\gamma = 0$ باشد، $m y'' + K y = F_0 \cos\omega t$

اگر $\omega \neq \omega_0$ محاسبات قبل معتبر است و جواب خصوصی به صورت کلی $A \cos\omega t + B \sin\omega t$ است.

و

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0 \cos\omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

اگر $\omega=\omega_0$ ، حدس جواب خصوصی به صورت زیر است

$$y_p(t) = t\left[A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right]$$

با جایگذاری در معادله $\Longrightarrow$ $y_p(t) = \dfrac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = y_c(t) + y_p(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t$$

پدیده تشدید .

معادلات دیفرانسیل

جلسه پانزدهم ۹۸/۸/۲۰

سری توانی :

به کمک سری توانی ی توانیم معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$L[y] = P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0 \quad , \quad y(t_0) = y_0 \ , \ y'(t_0) = y_0'$$

را حل کنیم. برای این کار جواب را به صورت یک سری توانی حول نقطه t_0 می نویسیم و در معادله جایگزین می کنیم:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$$

در واقع ضرایب این سری، c_0، c_1، c_2، ... مجهولات مورد نظر هستند که پس از جایگذاری $y(t)$ در معادله به صورت بازگشتی قابل محاسبه هستند.

مروری بر سری توانی :

تابع $y(t)$ را در نقطه t_0 تحلیلی گوییم هرگاه

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n = c_0 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + \cdots$$

برای یک سری ضرایب $c_0, c_1, \ldots$ و هر $t_0-\delta < t < t_0+\delta$.

سری فوق را در نقطه t همگرا گوییم هرگاه مجموع‌های جزئی $S_m(t)=\sum_{n=0}^{m} c_n (t-t_0)^n$ همگرا باشند

یعنی دنباله $\{S_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ همگرا باشد.

مقدار $\rho > 0$ را شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n$ گوییم هرگاه به ازای هر $|t-t_0|<\rho$

سری همگرا و برای مقادیر t در خارج این همسایگی واگرا باشد.

بنابر آزمون ریشه $\rho = 1/\lambda$ که $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

یا بنابر آزمون نسبت $\lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

در بازه همگرایی یک سری توانی خواص زیر برقرارند:

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (t-t_0)^{n-1} = c_1 + 2c_2(t-t_0) + \cdots \qquad (1)$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n\right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n (t-t_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n+d_n)(t-t_0)^n \qquad (2)$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-t_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n \qquad (3)$$

$$c_0 = a_0 b_0 \ , \ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \ , \ \ldots \ , \ c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-t_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n$$ به شرط آنکه $b_0 \neq 0$. ④

$$a_0 = b_0 c_0 \implies c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \implies c_1 = ?$$

$$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \implies c_2 = ?$$

⑤ اگر تابع $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$ در نقطه t_0 تحلیلی باشد، آنگاه $a_n = \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}$

و سری توانی فوق را سری تیلور تابع y در نقطه t_0 می‌نامیم.

مثال- $$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

← سری تیلور تابع $y(t) = \frac{1}{1-t}$ به مرکز $t_0 = 0$. شعاع همگرایی این سری $R = 1$ است.

مثال -
$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

شعاع همگرایی همچنان یک است.

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots$$

$$\frac{1}{2t-3} = \frac{-1/3}{1-\frac{2t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2t}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2^n}{3^{n+1}} t^n$$

این سری برای $\left|\frac{2t}{3}\right| < 1$ همگراست پس بازه همگرایی $|t| < \frac{3}{2}$ است.

$$\frac{1}{2t-3} = \frac{1}{2(t-1)-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(2(t-1)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2^n (t-1)^n$$

بازه همگرایی این سری $|t-1| < \frac{1}{2}$ است.

کاربرد سری توانی در حل معادلات دیفرانسیل :

می‌خواهیم معادله $y'' + y = 0$ را در همسایگی نقطه $t_0 = 0$ حل کنیم. فرض می‌کنیم

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

و در معادله جایگذاری می‌کنیم و ضرایب a_n را تعیین می‌کنیم. ضرایب a_n همگی برحسب a_0 و a_1 قابل محاسبه هستند. در واقع $a_0 = y(0)$ و $a_1 = y'(0)$ شرایط اولیه معادله هستند.

به شرطی می‌توان جواب معادله را به صورت سری توانی نوشت که بدانیم معادله دارای جواب تحلیلی در همسایگی $t_0 = 0$ دارد.

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad ,$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 t + 12 a_4 t^2 + \cdots$$

$$0 = y'' + y = \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}\right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right]$$

$$= \left[2a_2 + 6a_3 t + 12 a_4 t^2 + \cdots\right] + \left[a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\right]$$

$$= (2a_2 + a_0) + (6a_3 + a_1) t + (12 a_4 + a_2) t^2 + \cdots$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \Longrightarrow a_2 = -\frac{1}{2} a_0 \\ 6a_3 + a_1 = 0 \Longrightarrow a_3 = -\frac{1}{6} a_1 \\ 12 a_4 + a_2 = 0 \Longrightarrow a_4 = -\frac{1}{12} a_2 = \frac{1}{4!} a_0 \\ 5\times 4 a_5 + a_3 = 0 \Longrightarrow a_5 = \frac{-1}{5\times 4} a_3 = \frac{1}{5!} a_1 \end{cases}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 , \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1$$

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n = a_0\underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}\right]}_{\cos t}+a_1\underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}\right]}_{\sin t}$$

نکته ـ همانطور که داریم $y''(t)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}$ که قرار است با سری

$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$ جمع کنیم. برای راحتی اندیس‌ها در سری تیلور y'' قرار دهیم $n=m+2$ و سری

توانی را بازنویسی کنیم. در این صورت m از مقدار صفر تا بی‌نهایت خواهد بود.

$$y''(t)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}t^m$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$$

$$0 = y'' + y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n \right] t^n$$

$$\Rightarrow \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}$$

نکته - همانطور که از جواب به دست آمده مشخص است ، سری تیلور جواب $y(t)$ دارای شعاع همگرایی بی نهایت است .
بنابراین جواب به دست آمده برای هر $t \in \mathbb{R}$ معتبر است . یعنی اگر شرایط اولیه $y(0)$ و $y'(0)$
داشته باشیم ، مقدار y در هر زمان دیگری به دست می آید .

قضیه: اگر در معادله $P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$، توابع $p = \frac{Q}{P}$ و $q = \frac{R}{P}$

در نقطه t_0 تحلیلی باشند، آنگاه هر جواب معادله در t_0 تحلیلی است و شعاع همگرایی

سری تیلور جواب حداقل برابر مینیمم شعاعهای همگرایی سریهای p و q است.

مثال - $(1-t^2)y'' + 3ty' + y = 0$

همه جوابهای این معادله در همسایگی $t_0 = 0$ تحلیلی هستند و شعاع همگرایی سری تیلور جواب

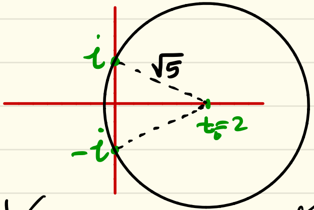
حداقل برابر یک است. زیرا شعاع همگرایی سری تیلور $q(t) = \frac{1}{1-t^2}$ و $p(t) = \frac{3t}{1-t^2}$

حول نقطه $t_0=0$ برابر یک هستند.

همچنین لزومی ندارد که جواب معادله در نقطه $t_0=1$ تحلیلی باشد. به علاوه جوابهای معادله در نقطه $t_0=3$

تحلیلی هستند و شعاع همگرایی سری تیلور جواب 2 است. یعنی جواب در بازه $|t-3|<2$ تحلیلی است.

نکته - اگر $f(t)$ تابع تحلیلی باشد و $f(t_0)\neq 0$ آنگاه تابع $\frac{1}{f(t)}$ در t_0 تحلیلی است. برای اینکه شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{1}{f(t)}$ را به دست آوریم، ریشه‌های $f(t)=0$ در صفحه مختلط را در نظر می‌گیریم. شعاع همگرایی برابر شعاع بزرگترین دایره به مرکز t_0 در صفحه مختلط است که شامل هیچ ریشه‌ای از $f(t)$ نباشد. به عنوان مثال شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{1}{1+t^2}$ به مرکز $t_0=2$ برابر $\sqrt{5}$ است. زیرا دایره‌ای با این شعاع شامل ریشه‌ای $1+t^2=0$ نیست.



مثال - جوابهای معادله $(2-2t+t^2)y''+2ty=0$ در نقطه $t_0=1$ تحلیلی هستند و شعاع همگرایی سری تیلور جواب یک است.

مثال - $ty''+\sin t\, y'+t^2y=0$ جوابهای این معادله در $t_0=0$ تحلیلی هستند، زیرا توابع $p(t)=\frac{\sin t}{t}$ و $q(t)=\frac{t^2}{t}=t$ تحلیلی هستند که شعاع همگرایی سری تیلور آنها بی‌نهایت است.

مثال - $(t^2-2t)y''+5(t-1)y'+3y=0$ جوابهای این معادله لزوماً در $t=0$ و $t=2$ تحلیلی نیستند. به غیر از این دو نقطه در بقیه نقاط جواب تحلیلی است.

مثال - $(1-t)y'' + y' + (1-t)y = 0$ دارای جواب تحلیلی در همسایگی $t_0=0$ است و شعاع همگرایی سری تیلور جواب حداقل یک است. می‌توان فرض کرد

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}, \qquad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

$$0 = (1-t)y'' + y' + (1-t)y = (1-t)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$+ (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,a_{n+2}\,t^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,n\,a_{n+1}\,t^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\,t^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n$$

$$= \left[2a_2 + a_1 + a_0\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)\,n\,a_{n+1} + (n+1)a_{n+1}$$

$$+ a_n - a_{n-1}\Big]\,t^n$$

$$\Rightarrow\ 2a_2 + a_1 + a_0 = 0 \quad , \quad a_{n+2} = \frac{(n^2-1)a_{n+1} + a_n - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

اگر بخواهیم تقریبی از جواب این معادله تا جمله t^5 و با شرایط اولیه $y(0)=y'(0)=1$ بدست آوریم، خواهیم داشت:

$$a_0 = a_1 = 1 \ , \ a_2 = -1 \ , \ a_3 = 0 \ , \ a_4 = -1/6 \ , \ a_5 = \frac{-1}{60}$$

$$\Rightarrow\ y(t) = 1 + t - t^2 - \tfrac{1}{6}t^4 - \frac{1}{60}t^5 + O(t^6)$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه شانزدهم ۹۸/۸/۲۵

روش سری توانی :

اگر در معادله $P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$ ، ضرایب معادله تحلیلی باشد و $P(t_0) \neq 0$ آنگاه جوابهای معادله در همسایگی نقطه t_0 تحلیلی هستند. در نتیجه می‌توان جواب را به صورت سری توانی $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$ نوشت و با جایگذاری در معادله ضرایب سری را تعیین کرد.

اگر $P(t_0)=0$ ، نقطه t_0 را نقطه تکین (Singular) می‌نامیم. در این حالت ممکن است جواب تحلیلی نداشته باشد.

به عنوان مثال معادله اویلر که به صورت زیر است :

$$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0$$

که α, β دو عدد حقیقی هستند. نقطه $t_0=0$ یک نقطه تکین این معادله است. همانطور که خواهیم دید برای بعضی مقادیر α و β معادله جوابی دارد که حتی در $t=0$ بی‌کران است.

یک حدس معقول برای جواب معادله اویلر $y(t)=t^r$ است که r می‌تواند هر عدد دلخواه حقیقی باشد. منظور از t^r تابع $\exp(r\ln t)$ است که برای $0<t$ یک تابع مشتق‌پذیر است. با این توصیف خواهیم داشت:

$$y'(t)=\frac{r}{t}\cdot\exp(r\ln t)=r\exp((r-1)\ln t)=r\,t^{r-1}$$

$$y''(t)=r(r-1)\,t^{r-2}$$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$0=t^2y''+\alpha t y'+\beta y=[r(r-1)+\alpha r+\beta]\,t^r$$

اگر $F(r)=r(r-1)+\alpha r+\beta=0$ آنگاه $y(t)=t^r$ (برای $0<t$) جواب معادله اویلر است.

حالت اول: اگر $F(r)=0$ دو ریشه حقیقی متمایز r_1, r_2 داشته باشد، آنگاه t^{r_1}, t^{r_2} دو جواب مستقل معادله اویلر است.

$$W[t^{r_1},t^{r_2}]=\begin{vmatrix} t^{r_1} & t^{r_2} \\ r_1t^{r_1-1} & r_2t^{r_2-1}\end{vmatrix}=(r_2-r_1)\,t^{r_1+r_2-1}\neq 0$$

مثال –
$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0$$

$$0 = 2r(r-1) + 3r - 1 = 2r^2 + r - 1 \Rightarrow r = -1, \tfrac{1}{2}$$

برای $t>0$
$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{c_1 t^{-1}}_{} + \underbrace{c_2 t^{1/2}}_{}$$

در نزدیکی $t=0$ بی‌کران است.

در نزدیکی $t=0$ کران‌دار است

مثال –
$$t^2y'' + 2ty' - 2y = 0$$

$$0 = r(r-1) + 2r - 2 = r^2 + r - 2 \,, \quad r = -2, 1$$

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{c_1 t^{-2}}_{} + \underbrace{c_2 t}_{}$$

تابع غیرتحلیلی

تحلیلی است

نکته – تابع $y(t)=t^r$ برای مقادیر غیرصحیح r فقط در $t>0$ تعریف شده است. لذا جواب‌های مستقل که در بالا به‌دست آمده‌اند در $t>0$ معتبر هستند. برای مقادیر $t<0$، تعریف کنید $u(t):=y(-t)$. تابع u در بازه $(0,\infty)$

تعریف شده است و در معادله زیر برای $t>0$ صدق می‌کند:

$$u'(t) = -y'(-t) \quad , \quad u''(t) = y''(-t)$$

$$0 = (-t)^2 y''(-t) + \alpha(-t)y'(-t) + \beta y(-t) = t^2 u''(t) + \alpha t u'(t) + \beta u(t)$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2} \qquad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad y(-t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2} \qquad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = c_1 |t|^{r_1} + c_2 |t|^{r_2} \qquad t < 0$$

در نتیجه می‌توانیم جواب عمومی معادله اویلر را وقتی $F(r)=0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد به صورت زیر بنویسیم:

$$y(t) = c_1 |t|^{r_1} + c_2 |t|^{r_2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

حالت دوم: اگر $F(r)=r(r-1)+\alpha r+\beta=0$ دو ریشه مختلط $\lambda\pm i\mu$ داشته باشد. در این حالت تابع

$y(t)=t^{\lambda+i\mu}$ در معادله صدق می‌کند.

$$y(t)=\exp((\lambda+i\mu)\ln t)=\exp(\lambda\ln t)\exp(i\mu\ln t)$$

$$=t^{\lambda}\left[\cos(\mu\ln t)+i\sin(\mu\ln t)\right]$$

در نتیجه دو تابع $t^{\lambda}\cos(\mu\ln t)$ و $t^{\lambda}\sin(\mu\ln t)$ دو جواب مستقل معادله هستند.

(رونسکین این دو تابع را حساب کنید.) بنابراین جواب معادله به صورت زیر است:

$$y(t)=c_1|t|^{\lambda}\sin(\mu\ln|t|)+c_2|t|^{\lambda}\cos(\mu\ln|t|)$$

مثال – $t^2y''+ty'+y=0$

$$0=r(r-1)+r+1=r^2+1\Rightarrow r=\pm i$$

$$y(t)=c_1\sin(\ln|t|)+c_2\cos(\ln|t|)$$

حالت سوم: $F(r)=0$ ریشه تکراری $r_1=r_2$ دارد. در این حالت t^{r_1} یک جواب معادله اویلر است.

جواب دیگر به روش کاهش مرتبه با وارد دادن $y(t)=t^{r_1}u(t)$ به دست می‌آید. اگر محاسبات مربوط را انجام دهیم خواهیم داشت $u(t)=\ln t$. بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y(t)=c_1|t|^{r_1}+c_2|t|^{r_1}\ln|t|$$

راه حل دیگر برای پیدا کردن جواب دوم:

$$\mathcal{L}[y]=t^2y''+\alpha ty'+\beta y$$

$$\mathcal{L}[t^r]=(r(r-1)+\alpha r+\beta)\,t^r=(r-r_1)^2t^r$$

چون $r(r-1)+\alpha r+\beta=0$ ریشه تکراری r_1 دارد پس برابر $(r-r_1)^2$ است.

از تساوی بالا نسبت به r مشتق بگیرید:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial r}t^r\right]=2(r-r_1)t^r+(r-r_1)^2\frac{\partial}{\partial r}t^r$$

می‌دانیم $\frac{\partial}{\partial r}t^r=(\ln t)t^r$. حال اگر در رابطه بالا قرار دهیم $r=r_1$، نتیجه می‌شود $\mathcal{L}[(\ln t)t^{r_1}]=0$.

نکته- برای حل معادله $(t-t_0)^2 y'' + \alpha(t-t_0) y' + \beta y = 0$ که $t=t_0$ یک نقطه تکین است،

که با تغییر متغیر $x = t-t_0$ و $u(x) = y(t)$ به معادله اویلر

$$x^2 u'' + \alpha x u' + \beta u = 0$$

تبدیل می‌شود و مشابه حالتهای قبل جواب $u(x)$ به دست می‌آید. در واقع مثل این است که معادله اصلی را

با فرض $y(t) = (t-t_0)^r$ حل کنیم.

تعریف- در معادله $P(t) y'' + Q(t) y' + R(t) y = 0$ که ضرایب P، Q و R تحلیلی هستند، اگر

توابع $(t-t_0)\dfrac{Q(t)}{P(t)}$ و $(t-t_0)^2 \dfrac{R(t)}{P(t)}$ در نقطه t_0 تحلیلی باشند، آنگاه نقطه t_0

یک نقطه تکین منظم است. (فرض می‌کنیم t_0 نقطه تکین هست، یعنی $P(t_0)=0$.) این تعریف معادل است با اینکه

$\lim\limits_{t \to t_0} (t-t_0)\dfrac{Q(t)}{P(t)}$ و $\lim\limits_{t \to t_0} (t-t_0)^2 \dfrac{R(t)}{P(t)}$ متناهی باشد.

مثال- معادله اویلر $t^2y''+\alpha t y'+\beta y=0$ نقطه $t=0$ یک نقطه تکین منظم است.

$P(t)=t^2,\ Q(t)=\alpha t,\ R(t)=\beta$. توابع $t\,\dfrac{Q(t)}{P(t)}$ و $t^2\,\dfrac{R(t)}{P(t)}$ تحلیلی هستند.

مثال- معادله بسل $t^2y''+ty'+(t^2-\nu^2)y=0$ برای مقدار ثابت ν . نقطه $t=0$ نقطه تکین منظم است.

مثال- معادله چبیشف $(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y=0$

نقاط $t=\pm1$ نقاط تکین منظم هستند.

$$(t-1)\frac{Q(t)}{P(t)}=(t-1)\frac{(-t)}{1-t^2}=\frac{t}{1+t}$$

در نقطه $t=1$ تحلیلی است.

$$(t-1)^2\frac{R(t)}{P(t)}=(t-1)^2\frac{\alpha}{1-t^2}=\frac{\alpha(1-t)}{1+t}$$

$\Rightarrow$ $t=1$ تکین منظم است.

مثال- $t^2y''+3y'+ty=0$ نقطه $t=0$ تکین و نامنظم است چون تابع $t\,\dfrac{Q(t)}{P(t)}=\dfrac{3}{t}$ در نقطه $t=0$ تحلیلی نیست.

معادلات دیفرانسیل

جلسه هفدهم ۹۸/۸/۲۷

روش فربنیوس (Frobenius)

اگر در معادله $P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0$ ضرایب P، Q و R تحلیلی باشند و $P(t_0)\neq 0$ آنگاه جوابهای معادله در نقطه t_0 تحلیلی هستند و به روش سری توانی می‌توان جواب را پیدا کرد.

اگر $P(t_0)=0$ نقطه t_0 را تکین می‌گوییم و در این حالت لزوماً جواب معادله تحلیلی نیست.

به کمک روش فربنیوس می‌توان جواب معادله را در همسایگی نقطه t_0 پیدا کرد وقتی t_0 یک نقطه تکین منظم است.

نقطه تکین t_0 منظم است هرگاه توابع $(t-t_0)\dfrac{Q(t)}{P(t)}$ و $(t-t_0)^2\dfrac{R(t)}{P(t)}$ در نقطه t_0 تحلیلی باشند.

بعنوان مثال نقطه $t_0=0$ یک نقطه تکین منظم برای معادله اولر $t^2y''+\alpha t y'+\beta y=0$ است و در جلسه قبل دیدیم که با حدس $y(t)=t^r$ می‌توان جواب این معادله را پیدا کرد.

فرض کنید $t_0=0$ نقطه تکین منظم معادله $P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0$ باشد و

$$p(t)=\frac{Q(t)}{P(t)}\quad,\quad q(t)=\frac{R(t)}{P(t)}$$

بنابر تعریف نقطه تکین منظم توابع $tp(t)$ و $t^2q(t)$ تحلیلی هستند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$tp(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots$$

$$t^2 q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots$$

قرار است معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ را حل کنیم پس معادله

$$0 = t^2 y'' + t^2 p(t) y' + t^2 q(t) y = t^2 y'' + t\left(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots\right) y' + \left(q_0 + q_1 t + \cdots\right) y$$

که تقریباً شبیه معادله اویلر است با تغییر کوچک ضرایب در همسایگی نقطه $t=0$. در روش فربنیوس یک حدس اولیه برای

جواب

$$y(t) = t^r \times \text{تابع تحلیلی} = t^r \times \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$$

است که ضرایب این سری توابع و عدد حقیقی r پس از جایگذاری در معادله مشخص می‌شوند. جواب به دست آمده

برای مقادیر $t>0$ معتبر است مگر آنکه r یک عدد صحیح باشد.

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \quad , \quad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2}$$

$$0 = t^2 y'' + t^2 p(t) y' + t^2 q(t) y = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r}\right)$$

$$+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}\right)$$

$$= \left[r(r-1) + p_0 r + q_0\right] a_0 t^r + \left(\left[(r+1)r + p_0(r+1) + q_0\right] a_1 + (r p_1 + q_1) a_0\right) t^{r+1}$$

$$+ \cdots + \left(\left[(n+r)(n+r-1) + p_0(n+r) + q_0\right] a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+r) p_{n-k} + q_{n-k}\right] a_k\right) t^{n+r}$$

$$+ \cdots$$

می‌توانیم فرض کنیم که $a_0 \neq 0$ (با تغییرِ توان r همیشه می‌توان این فرض را در نظر گرفت) در نتیجه

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

$$a_n = \frac{-\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\right)a_k}{F(n+r)} \qquad n=1,2,\dots$$

اگر $r_1<r_2$ دو ریشه حقیقی متمایز $F(r)=0$ باشند، برای $r=r_2$ از رابطه بالا می‌توان همه ضرایب a_n را برحسب a_0 به‌دست آورد. همچنین اگر r_2-r_1 یک عدد صحیح نباشد، داریم $F(n+r_1)\neq 0$ برای هر $n\geq 1$ و در نتیجه ضرایب a_n همگی به‌دست خواهند آمد.

اگر $F(r)=0$ ریشه مختلط $r_1,r_2=\alpha\pm i\beta$ داشته باشد، چون r_2-r_1 هیچ موقع عدد صحیح نیست، مشابه بالا می‌توان ضرایب a_n را پیدا کرد. ضرایب a_n در این حالت مختلط هستند و قسمت حقیقی و موهومی جواب به‌دست آمده دو جواب معادله خواهند بود.

چالش جدی در این روش در دو حالت زیر است:

۱- وقتی که $F(r)=0$ ریشه تکراری دارد.

۲- وقتی که تفاضل دو ریشه $F(r)=0$ یک عدد صحیح است.

مثال - $2ty'' + y' + ty = 0$

$t=0$ یک نقطه تکین منظم است. بنابراین جواب به صورت $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$ است که $a_0 \neq 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r+1} = 0$$

$$F(r) = 2r(r-1) + r = 0 \quad , \quad r = 0, \tfrac{1}{2}$$

برای $r=0$ جواب معادله تحلیلی است و برای $r=\frac{1}{2}$ جواب غیرتحلیلی که ضرایب سری به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2(n+r)(n+r-1) + (n+r)\right] a_n t^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^{n+r-1}$$

$$= F(r) a_0 t^{r-1} + F(r+1) a_1 t^{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(F(n+r) a_n + a_{n-2}\right) t^{n+r-1}$$

$$r = \tfrac{1}{2} \Rightarrow F(\tfrac{1}{2}) = 0 \ , \ F(\tfrac{3}{2}) \neq 0 \Rightarrow a_1 = 0 \quad , \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{F(n+\frac{1}{2})} = \frac{a_{n-2}}{n(2n+1)}$$

مثال - $2t(1+t)y'' + (3+t)y' - ty = 0$

$t=0,-1$ دو نقطه تکین منظم هستند. جواب در همسایگی نقاط $t=0$ و $t=-1$ به صورت زیر هستند:

در همسایگی $t=0$ $\quad y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} \quad , \quad a_0\neq 0 \qquad 0,-1/2$

در همسایگی $t=-1$ $\quad y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (t+1)^{n+r} \quad , \quad b_0\neq 0$

برای محاسبه توان r دیدیم که اگر $t=0$ نقطه تکین منظم $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ باشد و $tp(t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$

$t^2q(t)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$ مقدار r از حل $F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=0$ به دست می‌آید.

در همسایگی نقطه تکین $t=0$ ، در معادله بالا $tp(t)=\frac{3+t}{2(1+t)}$ و $t^2q(t)=\frac{-t^2}{2(1+t)}$

که $p_0=3/2$ و $q_0=0$ و $F(r)=r(r-1)+3/2\, r$ که ریشه‌های آن $r=0,-1/2$ است. بنابراین معادله

یک جواب تحلیلی $y_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 t^n$ و یک جواب غیر تحلیلی $y_2(t)=\sum a_n^2 t^{n-1/2}$ دارد.

در همسایگی نقطه $t=-1$ ، $(t+1)p(t) = \dfrac{3+t}{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (t+1)^n$, $(t+1)^2 q(t) = -\frac{1}{2}(t+1) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (t+1)^n$

$$p_0 = -1 , \quad q_0 = 0 \quad , \quad F(r) = r(r-1) - r = 0$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = 0 \, , \quad r_2 = 2$$

بنابراین معادله حداقل جواب تحلیلی به صورت $y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+2}$ دارد. برای ریشه $r_1 = 0$ در مرحله بعد خواهیم دید که جواب به چه صورتی است. (چون تفاضل دو ریشه یک عدد صحیح است، روش مطرح شده در این مرحله فقط برای ریشه بزرگتر کار می‌کند.)

معادلات دیفرانسیل

جلسه هجدهم ۹۸/۹/۲

قضیه- فرض کنید $t=0$ نقطه‌ی تکین منظم معادله $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ باشد که سری‌های تیلور

$tp(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n t^n$ و $t^2q(t)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n t^n$ در بازه $-\rho<t<\rho$ همگرا هستند. فرض کنید r_1 و r_2 ریشه‌های

حقیقی معادله $F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0$ باشند که $r_2\leq r_1$. آنگاه معادله در هر یک از بازه‌های $0<t<\rho$

یا $-\rho<t<0$ جوابی به صورت زیر دارد.

$$y_1(t)=|t|^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_1)t^n$$

(i) اگر r_1-r_2 صفر یا عدد صحیح مثبت نباشد، در هر کدام از بازه‌های $0<t<\rho$ یا $-\rho<t<0$ جواب

دیگری به صورت زیر وجود دارد.

$$y_2(t)=|t|^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_2)t^n$$

(ii) اگر $r_1=r_2$، جواب دوم به صورت زیر است:

$$y_2(t)=y_1(t)\ln|t|+|t|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(r_1)t^n$$

(ثالثاً) اگر $r_1 - r_2 = N$ یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$y_2(t) = a\, y_1(t) \ln|t| + |t|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)\, t^n\right]$$

برای یک مقدار ثابت a.

نکته - ضرایب $a_n(r_1)$ در جواب اول از رابطهٔ بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند:

$$a_n(r) = \frac{-\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+r)P_{n-k} + q_{n-k}\right)a_k(r)}{F(n+r)}$$

نکته - اگر نقطهٔ تکینِ منظم غیر از صفر باشد، قضیهٔ فوق با در نظر گرفتن سری به مرکز t_0 به جای صفر برقرار است. به عنوان مثال

$$y_1(t) = |t-t_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)(t-t_0)^n$$

<u>ریشه تکراری</u> $r_1 = r_2$. $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = (r-r_1)^2$

روش اول (کاهش مرتبه) : می‌دانیم $y_1(t) = |t|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ یک جواب معادله است و $a_0 \neq 0$.

قرار می‌دهیم $y_2 = y_1 u$. از روش کاهش مرتبه (جلسه دهم) می‌دانیم که :

$$u(t) = \int^t \frac{\exp\left[\int^t -p\right]}{y_1^2}$$

از طرفی $t\,p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ در نتیجه

$$\int^t p(s)ds = \int^t \left(\frac{p_0}{s} + p_1 + p_2 s + \cdots\right) ds = p_0 \ln t + p_1 t + \frac{p_2}{2} t^2 + \cdots$$

$$\exp\left[\int^t -p(s)\,ds\right] = e^{-p_0 \ln t} \times \exp[\text{تابع تحلیلی}] = t^{-p_0} \times \text{تابع تحلیلی}$$

$$u(t) = \int^t \frac{t^{-p_0} \times \text{تابع تحلیلی}}{t^{2r_1} \times \left(\sum a_n t^n\right)^2}$$

چون $a_0 \neq 0$ ، پس $\dfrac{\text{تابع تحلیلی}}{\left(\sum a_n t^n\right)^2}$ یک تابع تحلیلی است که با $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ نشان می‌دهیم:

$$u(t) = \int^t t^{-p_0-2r_1} \times \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

چون r_1 ریشه تکراری است پس $2r_1 = 1-p_0$ و

$$u(t) = \int^t t^{-1} \times \sum c_n t^n = c_0 \ln t + c_1 t + \frac{c_2}{2} t^2 + \dots = c_0 \ln t + \text{تابع تحلیلی}$$

$$\Rightarrow y_2(t) = u(t) \times y_1(t) = \left[\ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} t^n\right] \times \underbrace{t^{r_1} \times \text{تابع تحلیلی}}_{y_1}$$

(می‌توان فرض کرد $c_0=1$)

$$= y_1(t)\ln t + t^{r_1} \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$$

روش دوم:

$$y(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, t^{n+r}$$

$$\mathcal{L}[y] = a_0(r)F(r)t^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(r)F(n+r) + \sum_{k=0}^{n-1}\big((k+r)P_{n-k} + q_{n-k}\big)a_k(r)\right]t^{n+r}$$

بعلاوه اگر برای هر مقدار r که $F(n+r)\neq 0$ برای هر n قرار دهیم:

$$a_n(r) = \frac{-\sum_{k=0}^{n-1}\big((k+r)P_{n-k} + q_{n-k}\big)a_k(r)}{F(n+r)} \qquad (1)$$

آنگاه

$$\mathcal{L}[y(t,r)] = a_0(r)F(r)t^r = a_0(r)(r-r_1)^2 t^r \qquad (2)$$

اگر $a_0(r)=a_0$ یک تابع ثابت باشد، آنگاه $y(t,r_1)$ یک جواب معادله است که قبلاً با y_1 نشان دادیم. اگر از عبارت (2) نسبت به r مشتق بگیریم

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial r}y(t,r)\right] = 2a_0(r-r_1)t^r + a_0(r-r_1)^2(\ln t)\,t^r$$

اکنون اگر قرار دهیم $r=r_1$ نتیجه می‌شود که

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r}y(t,r)\Big|_{r=r_1}\right]=0$$

پس $\frac{\partial}{\partial r}y(t,r)\Big|_{r=r_1}$ یک جواب معادله است.

$$\frac{\partial}{\partial r}y(t,r_1)=\frac{\partial}{\partial r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)\,t^{n+r}\right]\Bigg|_{r=r_1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n'(r_1)\,t^{n+r_1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_1)\,t^{n+r_1}\ln t$$

$$=y_1(t)\ln t+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)\,t^{n+r_1}$$

(دقت کنید $a_0(r)=a_0$ تابع ثابت است و در نتیجه $a_0'(r_1)=0$)

مثال ـ معادله بسل مرتبه صفر $\quad t^2y''+ty'+t^2y=0$

$$p(t)=\frac{1}{t}\,,\quad q(t)=1\quad\Rightarrow\quad tp(t)=\sum p_n t^n\,,\ p_0=1\,,\ p_1=p_2=\cdots=0$$

$$t^2q(t)=\sum q_n t^n\,,\quad q_2=1\,,\ q_0=q_1=q_3=q_4=\cdots=0$$

درنتیجه $F(r)=r^2$ که دو ریشه تکراری $r_1=r_2=0$ دارد.

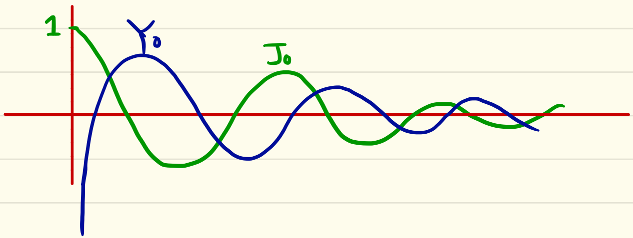
تمرین - با جایگذاری $y_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ و $y_2(t)=y_1(t)\ln t+\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$ در معادله

ضرایب a_n و b_n را پیدا کنید.

جواب $y_1(t)$ یک تابع تحلیلی است که با $J_0(t)$ نشان می‌دهیم و جواب $y_2(t)$ که غیرتحلیلی است و در $t=0$ بی‌کران است

با $Y_0(t)$ نشان داده می‌شود. در واقع $J_0(0)=1$ ، $Y_0(t)=\frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma+\ln\frac{t}{2}\right)J_0(t)+\text{تابع تحلیلی}\right]$.

J_0 و Y_0 یک پایه برای جوابهای معادله بسل هستند.



$$J_0(t)\cong\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\quad \text{as } t\to\infty$$

$$Y_0(t)\cong\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\quad \text{as } t\to\infty$$

محاسبه جواب معادله بسل مرتبه صفر به روش دوم :

$$a_n(r) = \frac{-\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+r)p_{n-k} + q_{n-k}\right)a_k(r)}{F(n+r)} = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)^2} \quad , \quad a_1 = a_3 = \cdots = 0$$

$$y(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, t^{n+r} \Rightarrow \mathcal{L}\left[y(t,r)\right] = a_0 r^2 t^r$$

$$r=0,\ a_0 = 1,\quad a_2 = \frac{-1}{2^2},\quad a_4 = \frac{1}{2^2 \times 4^2},\ \ldots,\ a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$y_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}\, t^{2m}$$

بنابر محاسبات سه صفحه قبل :

$$y_2(t) = y_1(t)\ln t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0)\, t^n$$

$$a_2(r) = \frac{-1}{(r+2)^2},\quad a_4(r) = \frac{1}{(r+2)^2(r+4)^2},\ \ldots,\ a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m}{(r+2)^2\cdots(r+2m)^2}$$

$$\frac{a_{2m}'(0)}{a_{2m}(0)} = \frac{d}{dr} \ln |a_{2m}(r)| \Big|_{r=0} = -2\frac{d}{dr}\left[\ln(r+2) + \cdots + \ln(r+2m)\right]\Big|_{r=0}$$

$$= -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}\right]$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right) =: -H_m$$

$$a_{2m}'(0) = -H_m \times a_{2m}(0) = \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$y_2(t) = J_0(t) \ln t + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} t^{2m}$$

حالت $r_1-r_2=N$ یک عدد صحیح مثبت. $\quad F(r)=(r-r_1)(r-r_2)$

تمرین - به روش کاهش مرتبه و با اطلاع از جواب $y_1(t)=t^{r_1}\times$(تابع تحلیلی) ثابت کنید جواب دیگر به صورت زیر است:

$$y_2(t)=a\,y_1(t)\ln t+t^{r_2}\times\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n t^n\right]$$

روش دوم: مشابه حالت ریشه تکراری قرار دهید $y(t,r)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)t^{n+r}$ که ضرایب $a_n(r)$ با فرمول (1) تعریف می‌شوند.

در حالت کلی تابع $a_N(r)$ در نقطه r_2 پیوسته نیست، چون $F(\underbrace{N+r_2}_{r_1})=0$. ولی اگر قرار دهیم $a_0(r)=r-r_2$ آنگاه

همه جملات $a_n(r_2)=0$ که $0\le n\le N-1$. در نتیجه صورت و مخرج کسر (1) برای جمله a_N در نقطه $r=r_2$ هر دو صفر می‌شوند.

و تابع $a_N(r)$ در $r=r_2$ پیوسته خواهد شد. لذا همه ضرایب $a_n(r)$ توابعی خوش‌تعریف و مشتق‌پذیر برای $r>r_2-1$ هستند.

با این انتخاب ضرایب داریم:

$$(3)\qquad \mathcal{L}[y(t,r)]=a_0(r)F(r)t^r=(r-r_1)(r-r_2)^2t^r$$

حال از رابطه (3) نسبت به r در نقطه r_2 مشتق بگیرید.

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial r} y(t,r_2)\right] = \left((r-r_2)^2 t^r + 2(r-r_1)(r-r_2)t^r + (r-r_1)(r-r_2)^2(\ln t)\, t^r\right)\Big|_{r=r_2} = 0$$

در نتیجه $\frac{\partial}{\partial r} y(t,r_2)$ جواب معادله است.

$$\frac{\partial}{\partial r} y(t,r_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)\, t^{n+r_2} \ln t + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_2)\, t^{n+r_2}$$

اما $a_0(r_2) = 0$ و از رابطه (1) نتیجه می‌شود که $a_1(r_2) = \cdots = a_{N-1}(r_2) = 0$

و در کسر (1) در نقطه $r=r_2$ صورت و مخرج صفر می‌شود که $r=r_2$ ریشه ساده مخرج است. بنابراین $a_N(r)$

در نقطه $r=r_2$ تعریف می‌شود و قرار می‌دهیم $a = \lim\limits_{r\to r_2} a_N(r)$.

$$a_{N+1}(r_2) = \frac{-((N+r_2)P_1+q_1)a}{F(N+1+r_2)} = \frac{-(r_1P_1+q_1)a}{F(1+r_1)}$$

از طرف دیگر برای محاسبه $y_1(t)=\sum \tilde{a}_n(r_1)t^{n+r_1}$ با قرار دادن $\tilde{a}_0(r_1)=1$ و روابط بازگشتی (1) می‌دانیم

$$\tilde{a}_1(r_1) = \frac{-(r_1 P_1 + q_1)}{F(1+r_1)} = a_{N+1}(r_2)/a$$

به طور مشابه نتیجه می‌شود $a_{N+n}(r_2) = \tilde{a}_n(r_1)\times a$ برای $n\geq 0$.

$$\frac{\partial}{\partial r} y(t,r_2) = a\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_n(r_1)t^{n+N+r_2}\ln t + t^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a'_n(r_2)t^n\right]$$

$$= a\,y_1(t)\ln t + t^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a'_n(r_2)t^n\right]$$

مثال ـ معادله بسل مرتبه یک $t^2y''+ty'+(t^2-1)y=0$

$$tp(t)=1 \quad , \quad t^2q(t)=t^2-1$$

$$P_0=1,\ P_1=P_2=\cdots=0 \ , \quad q_0=-1,\ q_2=1,\ q_1=q_3=q_4=\cdots=0$$

$$F(r) = r(r-1) + r - 1 = r^2 - 1 \,, \quad r_1 = 1 \,, \; r_2 = -1 \,, \quad N = r_1 - r_2 = 2$$

از رابطه (1) نتیجه می‌شود

$$a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)^2 - 1} \,, \quad a_1 = 0$$

اگر $a_0(r) \equiv 1$ آنگاه

$$a_{2m}(r_1) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\, m!\, (m+1)!}$$

و

$$y_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, t^{2m+1}}{2^{2m}\, m!\, (m+1)!} .$$

برای پیداکردن جواب دوم قرار می‌دهیم $a_0(r) = r - r_2 = r + 1$ و خواهیم داشت:

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m \cancel{(r+1)}}{(2m+r+1)(2m+r-1)^2(2m+r-3)^2 \cdots (r+3)^2 \cancel{(r+1)}} \,, \quad \lim_{r \to -1} a_2(r) = \lim_{r \to -1} \frac{-1}{r+3} = -\frac{1}{2}$$

$$a_{2m}(r_2) = \frac{(-1)^m}{(2m)(2m-2)^2 \cdots (2)^2} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}\, m!\, (m-1)!}$$

$$\frac{a_{2m}'(r_2)}{a_{2m}(r_2)} = \frac{d}{dr} \ln |a_{2m}(r)| \Big|_{r=-1} = -\frac{1}{2m} - \frac{2}{2m-2} - \cdots - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}\left[H_m + H_{m-1}\right]$$

$$y_2(t) = a\, y_1(t) \ln t + t^{r_2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_2)\, t^n\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, t^{2m+1}}{2^{2m}\, m!\, (m+1)!} + t^{-1}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\left[H_m + H_{m-1}\right]}{2^{2m}\, m!\, (m-1)!}\, t^{2m}\right)$$

تمرین - به کمک قضیه ابتدای جلسه و تنها به کمک جایگذاری سری‌ها در معادله جواب‌های معادله بسل مرتبه اول را پیدا کنید. (برای جواب دوم ضریب
a نیز با جایگذاری باید پیدا شود)

معادلات دیفرانسیل

جلسه نوزدهم ۹۸/۹/۴

تبدیل لاپلاس

$$f(t) \longmapsto F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$:= \mathcal{L}[f]$$

مهمترین خاصیت تبدیل لاپلاس رابطه زیر است :

$$\mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

در نتیجه از این خاصیت برای حل معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت می‌توان بهره برد. فرض کنید به دنبال یک جواب معادله

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad , \quad y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = y'_0$$

هستیم. اگر از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس بگیریم :

$$\mathcal{L}[g] = \mathcal{L}[ay'' + by' + cy] = a\mathcal{L}[y''] + b\mathcal{L}[y'] + c\mathcal{L}[y]$$

$$= a\left(s^2\mathcal{L}[y] - s\,y(0) - y'(0)\right) + b\left(s\mathcal{L}[y] - y(0)\right) + c\,\mathcal{L}[y]$$

$$= (as^2+bs+c)\,\mathcal{L}[y] - (as+b)\,y_0 - a\,y_0'$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{\mathcal{L}[g] + (as+b)\,y_0 + a\,y_0'}{as^2+bs+c}$$

به شرط آنکه بتوانیم وارون تبدیل لاپلاس را محاسبه کنیم، می‌توانیم جواب معادله دیفرانسیل را پیدا کنیم.

در روش بالا فرض بر آن است که مجاز هستیم از جواب معادله تبدیل لاپلاس بگیریم. در واقع روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دارای این محدودیت است که تنها جواب‌هایی را پیدا می‌کند که تبدیل لاپلاس داشته باشند.

سؤال: از چه توابعی می‌توانیم تبدیل لاپلاس بگیریم؟

مثال- برای $f(t)=e^{t^2}$ به ازای هر s انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-st}\,e^{t^2}\,dt = \infty$ واگرا است و در نتیجه $f(t)=e^{t^2}$ تبدیل لاپلاس ندارد.

مثال - $f(t)\equiv 1$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,1\,dt=\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty=\left[\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-st}}{-s}\right]+\frac{1}{s}$$

درنتیجه تنها برای $s>0$ انتگرال فوق همگرا است و $F(s)=1/s$.

مثال - $f(t)=e^{\alpha t}$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\,dt=\frac{e^{(-s+\alpha)t}}{-s+\alpha}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s-\alpha}$$

برای $s>\alpha$.

مثال - $f(t)=\cos\omega t$

$$\int_0^\infty e^{-st}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\,dt=\int_0^\infty e^{(i\omega-s)t}\,dt$$

$$=\left[\frac{e^{(i\omega-s)t}}{i\omega-s}\right]_{t=0}^{\infty}=\frac{1}{s-i\omega}$$

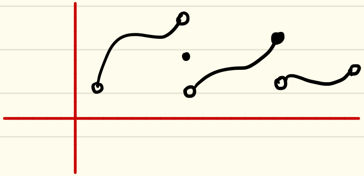
برای $s>0$

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \operatorname{Re}\frac{1}{s-i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \operatorname{Im}\frac{1}{s-i\omega} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

مثالهای فوق نشان میدهند که نه تنها ممکن است تبدیل لاپلاس وجود نداشته باشد، بلکه برای توابعی که تبدیل دارند به ازای مقادیرِ محدودی از s تبدیلِ لاپلاس تعریف می‌شود.

تعریف- تابع f را قطعه‌قطعه پیوسته در بازه $[a,b]$ گوییم هرگاه نقاط $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b$ وجود داشته باشند که f در (t_i, t_{i+1}) پیوسته و حدِ چپ و راست f در نقاط t_i وجود داشته باشد.



به‌علاوه اگر تابع قطعه‌قطعه پیوسته f برای مقادیرِ $M\le t$ در $|f(t)|\le Ke^{\alpha t}$ صدق کند، آن را از مرتبه نمایی می‌گوییم.

نکته- اگر تابع قطعه‌بپوسته f از مرتبه نمایی $e^{\alpha t}$ باشد، آنگاه بنابر آزمون مقایسه انتگرال، انتگرال

$$\int_M^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \leq \int_M^\infty K e^{-st} e^{\alpha t}\, dt < \infty$$

برای مقادیر $s > \alpha$ همگرا است. در نتیجه تبدیل لاپلاس $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ برای $s \in (\alpha, \infty)$ تعریف شده است.

مثال- توابع $f(t) \equiv 1$ و $f(t) \equiv \cos \omega t$ از مرتبه نمایی $(\alpha = 0)$ هستند و همانطور که دیدیم تبدیل لاپلاس آنها برای $s > 0$ تعریف شده است.

نکته- هر تابع کران‌دار از مرتبه نمایی $(\alpha = 0)$ است. زیرا اگر f کران‌دار باشد، باید $|f(t)| \leq K$ برای یک مقدار ثابت K. در نتیجه $|f(t)| \leq K e^{\alpha t}$ برای $\alpha = 0$.

خواص تبدیل لاپلاس :

① خطی بودن :
$$\mathcal{L}[af+bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

با فرض اینکه تبدیل لاپلاس f و g برای $s_0 < s$ تعریف شده باشد. بنابر خاصیت خطی بودن انتگرال داریم :

$$\int_0^\infty e^{-st}(af+bg)\,dt = a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt$$
$$= a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

② تبدیل مشتق : اگر f مشتق‌پذیر و از مرتبه‌ی $e^{\alpha t}$ باشد و f' قطعه‌قطعه پیوسته، آنگاه $\mathcal{L}[f']$ برای $\alpha < s$ وجود دارد و

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0) \qquad s > \alpha$$

$$\mathcal{L}[f'] = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = \int_0^\infty -\frac{d}{dt}\left(e^{-st}\right)f(t)\,dt + \left[e^{-st}f(t)\right]_{t=0}^{\infty}$$

چون تابع f از مرتبه نمایی α است پس $|f(t)| \le Ke^{\alpha t}$ برای $M \le t$. درنتیجه

$$\left| e^{-st} f(t) \right| \le K e^{(\alpha - s)t}$$

و برای $\alpha < s$ وقتی $t \to \infty$ داریم

$$\lim_{t \to \infty} e^{-st} f(t) = 0$$

و از رابطه صفحه قبل نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

نکته -

$$\mathcal{L}[f''] = s\mathcal{L}[f'] - f'(0) = s\left(s\mathcal{L}[f] - f(0) \right) - f'(0)$$

$$= s^2 \mathcal{L}[f] - s f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

رابطه بالا به شرطی برقرار است که $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ از مرتبه نمایی $e^{\alpha t}$ باشند و $f^{(n)}$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد.

مثال - چون هر چندجمله‌ای از مرتبه نمایی است، می‌توانیم در رابطه قبل قرار دهیم $f(t) = t^n$ داریم $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] \Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}[n!]}_{n!\,\mathcal{L}[1] = \frac{n!}{s}} = s^n \mathcal{L}[t^n]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

مثال - $f(t) = \sin \omega t$ در رابطه $f'' = -\omega^2 f$ صدق می‌کند:

$$-\omega^2 \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[f''] = s^2 \mathcal{L}[f] - s f(0) - f'(0) = s^2 \mathcal{L}[f] - \omega$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

تمرین - مشابه مثال قبل تبدیل $\cos \omega t$ را محاسبه کنید.

مثال - در رابطه $f(t) = \sinh(\omega t)$ $f'' = \omega^2 f$ صدق می‌کند. بنابراین

$$\omega^2 \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[f''] = s^2 \mathcal{L}[f] - s\underset{0}{\cancel{f(0)}} - \underset{\omega}{\cancel{f'(0)}}$$

$$\mathcal{L}[f] = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$

تمرین - تبدیل $\cosh(\omega t)$ را محاسبه کنید.

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیستم ۹۸/۹/۱۱

تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در حل معادله دیفرانسیل

$$f(t) \longmapsto F(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

اگر f یک تابع قطعه‌ای پیوسته و از مرتبه نمایی α باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس برای $\alpha < s$ تعریف شده است.

$$|f(t)| \leq K e^{\alpha t} \qquad t > M$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y_0' \end{cases}$$

با فرض اینکه این معادله جواب از مرتبه نمایی داشته باشد، قرار می‌دهیم

$$Y(s) = \mathcal{L}[y]$$

اگر از دو طرف معادله دیفرانسیل، تبدیل لاپلاس بگیریم، معادله دیفرانسیل تبدیل به یک معادله تابعی می‌شود با مجهول $Y(s)$.

$$a\underbrace{[s^2Y(s)-sy_0-y_0']}_{\mathcal{L}[y'']} + b\underbrace{[sY(s)-y_0]}_{\mathcal{L}[y']} + cY(s) = \mathcal{L}[f] = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{(as+b)y_0 + ay_0' + F(s)}{as^2+bs+c}$$

مثال - $y''-y'-2y=0$ با شرایط اولیه $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$.

$$Y(s)=\mathcal{L}[y] \Rightarrow [s^2Y(s)-s]-[sY(s)-1]-2Y=0$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s-1}{s^2-s-2}=\frac{1/3}{s-2}+\frac{2/3}{s+1}$$

از طرفی می‌دانیم که $\mathcal{L}[e^{2t}]=\frac{1}{s-2}$ و $\mathcal{L}[e^{-t}]=\frac{1}{s+1}$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}$$

تذکر- همانطور که در مثال بالا دیدیم، یک خاصیت مهم برای حل معادله دیفرانسیل خاصیت یک به یکی تبدیل لاپلاس است. قضیه زیر این امکان را فراهم می‌کند.

قضیه- اگر f و g دو تابع از مرتبه نمایی α باشند، که $\mathcal{L}[f]=\mathcal{L}[g]$ برای $\alpha < s$. در این صورت $f(t)=g(t)$ برای $0<t$.

مثال- $y''-3y'+2y=e^{3t}$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$.

$Y(s)=\mathcal{L}[y]$ ، $[s^2Y-s]-3[sY-1]+2Y=\dfrac{1}{s-3}$

$$Y(s)=\left(s-3+\frac{1}{s-3}\right)/(s^2-3s+2)=\frac{1/2}{s-3}+\frac{5/2}{s-1}+\frac{-2}{s-2}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{3t}-2e^{2t}+5/2\, e^{t}$$

خاصیت - اگر تابع f از مرتبه نمائی باشد، هر جواب $ay''+by'+cy=f(t)$ از مرتبه نمائی است.

اثبات - تمرین

ایده‌های محاسباتی تبدیل وارون لاپلاس.

① اگر $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ آنگاه $\mathcal{L}[-tf(t)]=F'(s)$.

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \implies F'(s)=\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}f(t)\right)dt$$

$$=\int_0^\infty \left(-tf(t)\right)e^{-st}\,dt=\mathcal{L}[-tf(t)]$$

مثال - $\mathcal{L}[te^{\alpha t}]=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right)=\frac{1}{(s-\alpha)^2}$

مثال - $\mathcal{L}\left[(-t)^n f(t)\right] = F^{(n)}(s)$

مثال - $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-1}\right)\right] = \frac{1}{2}(-t)^2\mathcal{L}\left[\frac{1}{s-1}\right] = \frac{1}{2}t^2e^t$

نکته - با این خاصیت می‌توانیم تبدیل وارون هر عبارت به صورت $\frac{1}{(s-\alpha)^n}$ را حساب کنیم. در واقع

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^n}\right] = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right)\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right] = \frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}$$

مثال - $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right] = \frac{t}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{t}{2}\sin t$

مثال - $\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1} \Leftarrow \mathcal{L}[-t\cos t] = \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s^2+1}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\left(\sin t - t\cos t\right)$$

نکته- با این روش می‌توان تبدیل وارون عبارتهای به صورت $\frac{1}{(s^2+\omega^2)^n}$ و $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^n}$ را محاسبه کرد. این مطلب را به صورت استقرایی نشان می‌دهیم. فرض کنید $f_n(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^n}\right]$ و $g_n(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\omega^2)^n}\right]$. می‌دانیم $f_1(t)=\frac{\sin\omega t}{\omega}$ و $g_1(t)=\cos\omega t$

در نتیجه

$$\mathcal{L}[(-t)f_n(t)]=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s^2+\omega^2)^n}\right)=\frac{-2ns}{(s^2+\omega^2)^{n+1}} \Rightarrow g_{n+1}(t)=\frac{t}{2n}f_n(t)$$

همچنین تابع f_{n+1} را می‌توان برحسب g_n و f_n به دست آورد.

$$\mathcal{L}[(-t)g_n(t)]=\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{(s^2+\omega^2)^n}\right)=\frac{1}{(s^2+\omega^2)^n}-\frac{2ns^2}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}=\frac{1-2n}{(s^2+\omega^2)^n}+\frac{2n\omega^2}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(t)=\frac{2n-1}{2n\omega^2}f_n(t)-\frac{t}{2n\omega^2}g_n(t)$$

۲

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s-\alpha)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{\alpha t} f(t)\right) dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} f(t)\, dt = F(s-\alpha)$$

مثال-

$$\mathcal{L}[e^{3t}\sin t] = \frac{1}{(s-3)^2+1}$$

مثال-

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4s+9}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+5}\right] = e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+5}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} e^{2t} \sin(\sqrt{5}t)$$

نکته- با این ایده می‌توان تبدیل وارون هر عبارت به صورت $\frac{cs+d}{s^2+as+b}$ را محاسبه کرد، اگر $a^2-4b<0$. یعنی چندجمله‌ای s^2+as+b قابل تجزیه نباشد.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{cs+d}{s^2+as+b}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c(s+a/2)+(d-ca/2)}{(s+\frac{a}{2})^2+(b-\frac{a^2}{4})}\right]$$

$$= e^{-at/2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{cs}{s^2+\omega^2}\right] + e^{-at/2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d-ca/2}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$\omega^2 = b - \frac{a^2}{4} > 0$$

$$= e^{-at/2}\left[c\cos\omega t + \left(d - \frac{ca}{2}\right)\sin\omega t\right]$$

نکته ـ با ترکیب سه نکته قبل می‌توان تبدیل وارون هر عبارت به صورت $\frac{p(s)}{q(s)}$ را محاسبه کرد که p و q دو چندجمله‌ای هستند به طوری که $\deg p < \deg q$. در حقیقت هر عبارت به این صورت را می‌توان به شکل مجموع عبارت‌هایی به صورت $\frac{A}{(s-\alpha)^n}$ و $\frac{As+B}{(s^2+as+b)^n}$ نوشت که $a^2-4b<0$. نکات قبلی نشان می‌دهند که چگونه تبدیل وارون این عبارات را باید محاسبه کرد.

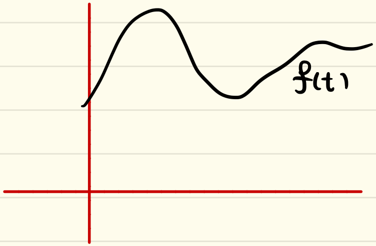
(۳) تابع پله‌ای را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

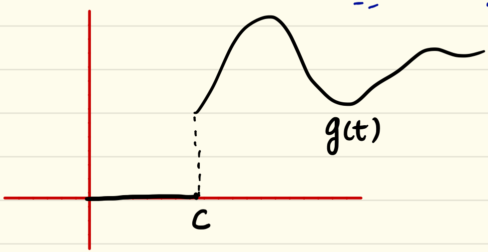
$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t\geq c \end{cases}$$

H_c یک تابع قطعه‌قطعه پیوسته و کران‌دار است و تبدیل لاپلاس آن برابر است با:

$$\mathcal{L}[H_c] = \int_0^\infty e^{-st}H_c(t)\,dt = \int_c^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-cs}}{s} \quad \text{for} \quad c>0$$

تابع g را انتقال یافته تابع f می‌گوییم هرگاه





$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ f(t-c) & t > c \end{cases} = f(t-c)\, H_c(t)$$

دراین صورت داریم :

$$\mathcal{L}[g] = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t-c)\, H_c(t)\, dt$$

$$= \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)\, dt = \int_0^\infty e^{-s(t+c)} f(t)\, dt = e^{-cs} \mathcal{L}[f]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right] = H_2(t)(t-2)$$ مثل-

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$ مثل-

$$f(t) = t \times \left(H_0(t) - H_1(t)\right)$$

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[t\,H_0(t)] - \mathcal{L}[t\,H_1(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[H_0] + \frac{d}{ds}\mathcal{L}[H_1]$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{d}{ds}\left[\frac{e^{-s}}{s}\right]$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & t \le \pi/4 \\ \sin t & t > \pi/4 \end{cases}$$ مثل-

$$f(t) = \cos t \times \left(H_0 - H_{\pi/4}\right) + \sin t \times H_{\pi/4}$$

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\cos t] + \mathcal{L}[(\sin t - \cos t)\,H_{\pi/4}] = \frac{s}{1+s^2} + e^{-\pi/4\, s}\,\mathcal{L}\left[\sin(t+\pi/4) - \cos(t+\pi/4)\right]$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و یکم ۹۸/۹/۱۶

مثال - $2y'' + y' + 2y = g(t) = \begin{cases} 1 & 5 \le t \le 20 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ ، $y(0) = y'(0) = 0$

قضیه وجود و یکتائی جواب به پیوستگی تابع g نیاز دارد. لذا تنها وجود و یکتایی در بازه های $(-\infty, 5)$ ، $(5, 20)$ و $(20, +\infty)$ معتبر است. برای به کارگیری روش تبدیل لاپلاس ، باید بدانیم که معادله دارای جوابی است که در بازه $(0, +\infty)$ تعریف شده است که بتوان از آن تبدیل لاپلاس گرفت. هرچند برای این مسأله نمی توان چنین مطلبی را از قضیه وجود و یکتائی نتیجه گرفت. با این فرض که تابع $y(t)$ با دامنه تعریف $(0, +\infty)$ وجود دارد که مشتق اول و دوم دارد (مشتق اول آن پیوسته است) هرچند مشتق دوم تابع y ناپیوسته است. به علاوه فرض کنیم تابع y در معادله بالا صدق کند. این گونه جوابها را جواب صوری معادله می نامیم. (هرچند خلاف قضیه وجود و یکتائی جواب باشد) با این فرض به کمک تبدیل لاپلاس جواب صوری $y(t)$ را پیدا می کنیم.

$$Y(s) = \mathcal{L}[y] \qquad (2s^2+s+2)Y(s) = \mathcal{L}[g] = \mathcal{L}[H_5 - H_{20}] = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2+s+2)} \Rightarrow$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = H_5(t)\,h(t-5) - H_{20}(t)\,h(t-20) = \begin{cases} 0 & t<5 \\ h(t-5) & 5<t<20 \\ h(t-5)-h(t-20) & 20<t \end{cases}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(2s^2+s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\,\frac{(s+1/4)+1/4}{(s+1/4)^2+15/16}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-1/4\,t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1/4}{s^2+\frac{15}{16}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-1/4\,t}\left[\cos\frac{\sqrt{15}}{4}t + \frac{1}{\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t\right]$$

به وضوح تابع y در بازه‌ها $(-\infty,5)$ ، $(5,20)$ و $(20,+\infty)$ دوبار مشتق پیوسته دارد و در این بازه‌ها در

معادله صدق می‌کند. زیرا تابع h به وضوح جواب معادله دیفرانسیل $2y''+y'+2y=1$ با شرایط اولیه $y(0)=y'(0)=0$ است. (اگر از این معادله تبدیل لاپلاس بگیریم به رابطه $\mathcal{L}[h](2s^2+s+2)=1/s$)

به علاوه در نقطه $t=5$ تابع $H_5(t)h(t-5)$ به شرطی پیوسته است که $h(0)=0$.
و این تابع مشتق‌پذیر است به شرط آنکه $h'(0)=0$. این دو شرط از تعریف h به وضوح مشاهده می‌شود.

به طور مشابه تابع $H_{20}(t)h(t-20)$ در نقطه $t=20$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.
در نتیجه تابع y در $(0,\infty)$ پیوسته و دوبار مشتق‌پذیر است و مشتق اول آن پیوسته است. هرچند y'' در نقاط $t=5$ و $t=20$ ناپیوسته است.

۴ تابع ضربه :

فرض کنید $y(t)$ میزان جابجایی یک ذره را نشان می‌دهد. بنابر قانون دوم نیوتن

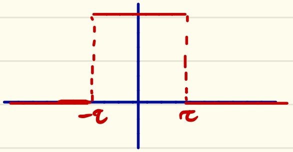
$$my''(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow \quad my'(t_1) - my'(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(s)\, ds$$

اگر در بازه کوچک (t_0, t_1) نیروی f وارد شود، آنگاه به مقدار انتگرال f در این بازه سرعت حرکت تغییر خواهد کرد.

اگر نیروی به اندازه‌ای بزرگ باشد که در بازه خیلی کوچک (t_0, t_1) مقدار انتگرال نیرو قابل توجه (نامحدود) باشد، به آن ضربه گوییم.

تابع $d_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & |t| \leq \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$ تقریبی از یک ضربه در نقطه $t=0$ را نشان می‌دهد.



به وضوح رابطهٔ $\int_{-\infty}^{+\infty} d_\tau(t)\, dt = 1$ برقرار است و اگر f یک تابع پیوسته باشد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d_\tau(t) f(t)\, dt = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\, dt \longrightarrow f(0) \quad \text{as } \tau \to 0$$

حالت حدی $d_\tau(t-t_0)$ وقتی $\tau \to 0$ به عنوان تابع ضربه درنظر بگیریم و با نماد دلتای دیراک $\delta(t-t_0)$ نشان می‌دهیم.

هرچند این حد وجود ندارد و $\delta(t-t_0)$ یک تابع نیست. ولی از رفتار مجانبی d_τ می‌توان خواص زیر را برای آن درنظر گرفت:

(i) $\delta(t-t_0) = 0$ وقتی $t \neq t_0$

(ii) $\int_a^b \delta(t-t_0)\, dt = 1$ وقتی $a<t_0<b$.

(iii) $\int_a^b \delta(t-t_0) f(t)\, dt = f(t_0)$ وقتی $a<t_0<b$.

فرض کنید $ay''+by'+cy=0$ با شرایط اولیه $y(0)=y_0$ و $y'(0)=y'_0$ حرکت یک ذره را مدل کند.
اگر در نقطه‌ی t_0 یک ضربه به اندازه‌ی I_0 به جسم وارد شود (یعنی در بازه زمانی خیلی کوچک حول نقطه t_0 یک نیرو با انتگرال I_0 به جسم وارد شود) این ضربه باعث می‌شود که سرعت جسم در نقطه t_0 به اندازه $\frac{1}{a}I_0$ جهش داشته باشد.
برای بررسی این پدیده باید دو معادله دیفرانسیل زیر را حل کنیم.
ابتدا معادله $ay''+by'+cy=0$ را با شرط اولیه $y(0)=y_0$, $y'(0)=y'_0$ در بازه $(0,t_0)$ حل می‌کنیم.
و مقدار $y(t_0)=z_0$ ، $y'(t_0)=z'_0$ را به دست می‌آوریم. (تا قبل از وارد شدن ضربه)
سپس دوباره همین معادله $ay''+by'+cy=0$ را با شرایط اولیه $y(t_0)=z_0$ و $y'(t_0)=z'_0+\frac{1}{a}I_0$
برای $t>t_0$ باید حل کنیم. جوابی که به این طریق به دست می‌آید یک تابع پیوسته است که مشتق اول در نقطه t_0 ناپیوسته است.

به کمک دلتای دیراک می‌توانیم محاسبات فوق را ساده‌تر کنیم. در واقع پدیده فوق را با معادله زیر به صورت ساده‌تر بیان می‌کنیم:

$$
\begin{cases}
ay'' + by' + cy = I_0\,\delta(t - t_0) \\
y(0) = y_0 \;,\; y'(0) = y_0'
\end{cases}
$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و دوم ۹۸/۹/۱۸

مثال — $y''-4y'+4y=3\delta(t-1)+\delta(t-2)$ ، $y(0)=y'(0)=1$

معادله بالا بیانگر جهش سرعت در زمان $t=1$ به اندازه ۳ واحد و در زمان $t=2$ به اندازه‌ی واحد است.

برای پیدا کردن جواب ابتدا معادله را در بازه $t\in(0,1)$ حل می‌کنیم.

گام اول: $y''-4y'+4y=0$ ، $y(0)=y'(0)=1$.

$$y(t)=e^{2t}(c_1+c_2t) \xrightarrow{\text{شرایط اولیه}} c_1=1 \,,\quad c_2+2c_1=1$$

$$\Rightarrow y(t)=e^{2t}(1-t) \Rightarrow y(1)=0 \,,\ \lim_{t\to1^-} y'(t)=-e^2$$

گام دوم: معادله در بازه $1<t<2$ ، $y''-4y'+4y=0$ ، $y(1)=0\,, y'(1)=-e^2+3$

$$y(t)=e^{2t}(d_1+d_2t) \xrightarrow{\text{شرایط اولیه}} d_1+d_2=0 \,,\ e^2\big(2(d_1+d_2)+d_2\big)=3-e^2$$

$$-d_1=d_2=3e^{-2}-1$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = (1-3e^{-2})\, e^{2t}\,(1-t) \quad \Rightarrow \quad y(2) = 3e^{2} - e^{4},$$

$$\lim_{t\to 2^-} y'(t) = -3(1-3e^{-2})e^{4}$$

گام سوم: معادله در بازه $2<t$ به صورت زیر خواهد بود:

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y(2) = 3e^{2} - e^{4}, \quad y'(2) = 1 - 3(1-3e^{-2})e^{4}$$

تبدیل لاپلاس تابع ضربه:

هر چند دلتای دیراک تابع نیست ولی به صورت صوری می‌توان تبدیل لاپلاس آن را محاسبه کرد:

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_0^\infty e^{-st}\,\delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0}$$

در مثال قبل اگر از معادله تبدیل لاپلاس بگیریم خواهیم داشت :

$$y'' - 4y' + 4y = 3\delta(t-1) + \delta(t-2) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 1$$

$$Y(s) = \mathcal{L}[y] \Rightarrow$$

$$[s^2 Y(s) - s - 1] - 4[sY - 1] + 4Y = 3e^{-s} + e^{-2s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s - 3 + 3e^{-s} + e^{-2s}}{(s-2)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2}\right]$$

$$= e^{2t} - te^{2t} + 3H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)} + H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}$$

۵ کانولوشن (پیچش)

اگر معادله مرتبه دوم $ay''+by'+cy=f(t)$ با شرایط اولیه $y(0)=y_0$, $y'(0)=y'_0$

را در نظر بگیریم و $Y(s)=\mathcal{L}[y]$ با تبدیل لاپلاس نتیجه می‌گیریم که $(F(s)=\mathcal{L}[f])$

$$Y(s)=\frac{as+b}{as^2+bs+c}y_0+\frac{a}{as^2+bs+c}y'_0+\frac{F(s)}{as^2+bs+c}$$

$$y_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{as+b}{as^2+bs+c}\right] \quad , \quad y_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{as^2+bs+c}\right]$$

توابع y_1 و y_2 جوابهای عمومی معادله همگن هستند که $y_1(0)=1$, $y'_1(0)=0$

$y_2(0)=0$, $y'_2(0)=1$

به علاوه $y_p(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{as^2+bs+c}\right]$ جواب خصوصی معادله ناهمگن است که

$y_p(0)=y'_p(0)=0$

روش کانولوشن یک روش محاسباتی برای محاسبه $y_p(t)$ یا تبدیل وارون

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{as^2+bs+c}\right]$$

است.

تعریف: اگر f و g دو تابع باشند، کانولوشن آنها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

مهم‌ترین خاصیت کانولوشن گزاره زیر است:

گزاره - $\mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g]$

نکته - به کمک گزاره بالا می‌توان دید که جواب خصوصی معادله ناهمگن که قبلاً اشاره شد، به صورت زیر است :

$$y_p(t) = f(t) * \frac{1}{a} y_2(t) = \int_0^t \frac{1}{a} f(t-\tau)\, y_2(\tau)\, d\tau$$

اثبات گزاره :

$$\mathcal{L}[f*g] = \int_0^\infty e^{-st}(f*g)(t)\,dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau\, dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t \left[e^{-s(t-\tau)} f(t-\tau)\right]\left[e^{-s\tau} g(\tau)\right] d\tau\, dt$$

$$= \int_0^\infty \int_\tau^\infty \left[e^{-s(t-\tau)} f(t-\tau)\right]\left[e^{-s\tau} g(\tau)\right] dt\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[e^{-s\theta} f(\theta)\right]\left[e^{-s\tau} g(\tau)\right] d\theta\, d\tau = \left[\int_0^\infty e^{-s\theta} f(\theta)\, d\theta\right]\left[\int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)\, d\tau\right]$$

گزاره- کانولوشن دو تابع دارای خواص زیر است:

$$f*g = g*f \qquad (i)$$

$$f*(g_1+g_2) = (f*g_1)+(f*g_2) \qquad (ii)$$

$$f*0 = 0*f = 0 \qquad (iii)$$ (منظور از 0 تابع ثابت صفر است)

$$(f*g)*h = f*(g*h) \qquad (iv)$$

نکته- تابع $f*1$ که 1 تابع ثابت یک است با تابع f لزوماً برابر نیست.

$$(f*1)(t) = (1*f)(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \neq f(t)$$

اثبات (i)

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_t^0 f(\theta)g(t-\theta)(-d\theta)$$

$\tau=t-\theta$ تغییر متغیر

$$=\int_0^t f(\theta)g(t-\theta)\,d\theta$$

$$=(g*f)(t)$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و سوم ۹۸/۹/۲۳

معادلات خطی مرتبه بالا

شکل کلی یک معادله خطی مرتبه n به صورت زیر است :

$$L[y] = a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = f(t)$$

$$y(t_0)=y_0 \;,\; y'(t_0)=y_0' \;,\; \cdots \;,\; y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)}$$

مشابه معادلات مرتبه یک و دو تا زمانی که ضرایب معادله پیوسته باشند، معادله با شرایط اولیه بالا جواب یکتا دارد.

وقتی $f \equiv 0$ باشد، معادله را همگن گوییم. فضای جواب (فضای هم توابعی که $L[y] \equiv 0$) یک فضای n ـ بعدی است.

اگر $y_1(t)$ ، ... ، $y_n(t)$ جوابهای مستقل این معادله باشند،

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

برای هر $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ جواب عمومی معادله همگن است.

رونسکین توابع y_1 ، ... ، y_n به صورت زیر تعریف می‌شود. $W(t) \neq 0$ اگر و تنها اگر توابع y_1 ، ... ، y_n مستقل باشند.

$$W[y_1, \dots, y_n](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

نکته ـ مشابه حالت $n=2$ داریم: $W' = -\frac{a_{n-1}}{a_n} W$. (تمرین ـ این رابطه را اثبات کنید.)

در حالتی که ضرایب معادله توابع ثابت باشند، خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[e^{rt}] = (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0) e^{rt}$$

و در نتیجه $y(t) = e^{rt}$ یک جواب معادله است هرگاه r ریشه چندجمله‌ای مشخصه زیر باشد:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

• اگر r_1 ریشه حقیقی با تکرر k باشد، $e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, \dots, t^{k-1}e^{r_1 t}$ جوابهای مستقل معادله هستند.

• اگر $r_1=\alpha\pm i\beta$ ریشه مختلط با تکرر k باشد، $e^{\alpha t}\cos\beta t$ ، $e^{\alpha t}\sin\beta t$ ، $te^{\alpha t}\cos\beta t$ ، $te^{\alpha t}\sin\beta t$ ، … ، $t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$ ، $t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$ جوابهای مستقل معادله هستند.

مثال — $y^{(4)}-y=0$

ضریب چندجمله‌ای مشخصه آن $r^4-1=0$ است و ریشه‌ها آن ± 1 ، $\pm i$. در نتیجه توابع زیر جوابهای مستقل این معادله هستند.

$$y_1(t)=e^{t},\quad y_2(t)=e^{-t},\quad y_3(t)=\cos t,\quad y_4(t)=\sin t$$

مثال — $y^{(4)}+2y''+y=0$

چندجمله‌ای مشخصه آن $r^4+2r^2+1=0$ که ریشه‌ها آن $\pm i$ با تکرر 2 . در نتیجه جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y_c(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3 t\cos t+c_4 t\sin t$$

برای حل معادله ناهمگن $\mathcal{L}[y] = a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_0(t)y = f(t)$ می‌دانیم جواب‌ها به صورت

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

هستند. y_p جواب خصوصی معادله ناهمگن است. یک جوابی است که جدای از شرایط اولیه در معادله صدق می‌کند.

$y_c = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ جواب عمومی معادله همگن است. با جایگذاری در شرایط اولیه ضرایب $c_1, \dots, c_n$ را پیدا می‌کنیم. مشابه معادلات مرتبه دو، به دو روش زیر می‌توان به کمک جواب عمومی معادله همگن، یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن پیدا کرد.

۱ـ روش تغییر پارامترها

اگر $y_1, \dots, y_n$ یک پایه برای جواب‌های معادله همگن باشند، جواب خصوصی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y_p = u_1(t)y_1(t) + \cdots + u_n(t)y_n(t)$$

با فرض
$$\begin{cases} u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n = 0 \\ \vdots \\ u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0 \end{cases}$$

و جایگذاری در معادله به رابطه $u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = f(t)/a_n(t)$ می‌رسیم.

این معادلات یک دستگاه خطی n معادله، n مجهول است. (u_1'، ...، u_n' مجهولات این دستگاه هستند)

در میان ماتریس ضرایب این دستگاه، رنکین $W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$ است و در نتیجه این دستگاه جواب دارد.

۲ـ روش ضرایب نامعین (روش حدسی)

اگر ضرایب معادله همگی توابع ثابت باشند و $f(t) = [b_0 + b_1 t + \cdots + b_k t^k] e^{\alpha t}$ (که α می‌تواند یک عدد مختلط نیز باشد) جواب خصوصی با ضرایب نامعین A_0، ...، A_k به صورت زیر حدس زده می‌شود:

$$y_p(t) = t^s [A_0 + A_1 t + \cdots + A_k t^k] e^{\alpha t}$$

که s تکرر ریشه α در چندجمله‌ای شخصه $a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ است. (در این حالت $e^{\alpha t}$، $te^{\alpha t}$، ...، $t^{s-1} e^{\alpha t}$ جواب‌های معادله همگن خواهند بود.)

اگر α ریشه نباشد (یا $e^{\alpha t}$ جواب معادله همگن نباشد)، $s=0$ خواهد بود.

مثال - $y^{(4)} - 2y'' + y = e^t \cos t + te^{-t} + 3e^{-t}$

چندجمله‌ای شخصه $r^4 - 2r^2 + 1 = 0$ که ریشه‌های ± 1 با تکرر ۲. جواب‌های پایه معادله همگن $e^{\pm t}$ و $te^{\pm t}$ هستند. جواب خصوصی معادله بالا به صورت $y_p = y_p^1 + y_p^2$ است که y_p^1 جواب خصوصی $y^{(4)} - 2y'' + y = e^t \cos t$ و y_p^2 جواب خصوصی $y^{(4)} - 2y'' + y = (t+3)e^{-t}$ است.

حدس y_p^1 به صورت زیر است: $y_p^1(t) = (A\cos t + B\sin t)e^t$. (در اینجا $\alpha = 1+i$ ریشه چندجمله‌ای شخصه نیست)

حدس y_p^2 عبارتست از: $y_p^2(t) = t^2 (Ct + D) e^{-t}$

(در اینجا $\alpha = -1$ ریشه با تکرر $s=2$ است.)

مشابه معادلات مرتبه دو، برای حل معادلات خطی مرتبه n می‌توان از روش سری‌ها استفاده کرد. اگر همه ضرایب معادله

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(t)$$

در بازه $|t-t_0| \le \alpha$ تحلیلی باشند، جواب معادله در این بازه تحلیلی است و سری توانی

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n$$

در بازه $|t-t_0| \le \alpha$ همگرا است.

همچنین روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات خطی با ضرایب ثابت کاربرد دارد و $y_p = v * g$ جواب خصوصی $(*)$ است.

(در اینجا $a_{n-1}, \ldots, a_0$ توابع ثابت هستند) تابع v جواب معادله همگن است با شرایط اولیه $v^{(n-2)}(t_0) = \cdots = v(t_0) = 0$

و $v^{(n-1)}(t_0) = 1$.

معادله $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه n غیرخطی است.

اگر تغییر متغیر زیر را در نظر بگیریم:

$$x_1 = y, \; x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}$$

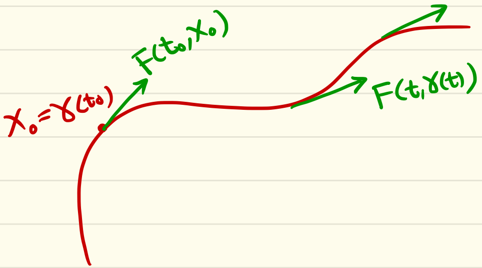
در این صورت روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

که اگر بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ را در نظر بگیریم، به یک دستگاه از معادلات می‌رسیم:

$$X' = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = F(t, X)$$

دستگاه معادلات



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

تابع $F(t,X) = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری می‌نامیم.

اگر یک جریان سیال را در نظر بگیریم، میدان برداری $F(t,X)$ سرعت حرکت ذرات سیال در نقطه X و زمان t را نشان می‌دهند. برای همین مسیر حرکت یک ذره که در زمان t_0 در نقطه X_0 باشد یک منحنی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \gamma:[t_0,t_1]$ خواهد بود.

$\dot{\gamma}(t)$ سرعت حرکت این ذره است که باید برابر $F(t,\gamma(t))$ باشد. (دقت کنید در زمان t، ذره در نقطه $X=\gamma(t)$ قرار دارد.) لذا رابطه

$$\dot{\gamma} = F(t,\gamma(t)) \quad , \quad \gamma(t_0)=X_0$$

برقرار است. از منحنی $\gamma(t)$ به جواب دستگاه معادله $\dot{X}=F(t,X)$ با شرط اولیه $X(t_0)=X_0$ تعبیر می‌شود.

قضیه وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل:

اگر $f_1, \dots, f_n$ و همه مشتقات جزئی آنها $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ در ناحیه $\alpha < t < \beta$ و $\alpha_1 < x_1 < \beta_1$ ، ... ، $\alpha_n < x_n < \beta_n$ پیوسته باشند و نقطه $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ در این ناحیه باشد، آنگاه بازه $|t - t_0| < \delta$ وجود دارد که دستگاه فوق با شرایط اولیه $X(t_0) = X^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$ دارای جواب یکتا در این بازه است.

نکته - با توجه به تغییر متغیری که معادله مرتبه n

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \, , \quad y(t_0) = y_0 \, , y'(t_0) = y_0' \, , \dots \, , y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

را به دستگاه معادلات دیفرانسیل تبدیل می‌کند و قضیه بالا، نتیجه مشابهی برای وجود و یکتایی معادله مرتبه n به شرط پیوستگی f و مشتقات جزئی آن به دست می‌آید. همچنین در حالت خاص معادله خطی مرتبه n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

اگر ضرایب $g(t)$ ، $a_0(t)$ ، ... ، $a_{n-1}(t)$ در بازه I پیوسته باشند، جواب معادله به صورت یکتا وجود دارد.

(دقت کنید در این حالت ضریب $y^{(n)}$ یک فرض شده است.)

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست چهارم ۹۸/۹/۳۰

دستگاه معادلات خطی

$$\dot{X} = F(t, X) = A(t)X + g(t)$$

$A(t)$ یک ماتریس $n\times n$ و $g, X : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ بردارهای n-بعدی.

شرط وجود و یکتایی جواب : پیوستگی F و مشتقات جزئی F $\Leftrightarrow$ پیوستگی $A(t)$ و $g(t)$

مثال - معادله خطی $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ با تبدیل $X = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ به دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ g(t) - p(t)y' - q(t)y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}}_{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

مهم‌ترین خاصیتِ دستگاه‌های خطی : ترکیب خطی جواب‌های معادله همگن ، جواب است .

یعنی اگر $X_1(t)$ ، ... ، $X_k(t)$ جواب‌های $\dot{X} = A(t)X$ باشند ، آنگاه

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_k X_k(t)$$

برای هر مقدار دلخواه $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ جواب معادله است .

هدف : می‌خواهیم نشان دهیم فضای جواب‌های معادله همگن یک فضای n-بعدی است .

نکته - منظور از استقلال خطی ، استقلال خطی توابع هست که نباید با استقلال خطی برداری اشتباه گرفته شود .

مثلاً دو تابع $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ و $X_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$ به عنوان تابع، مستقل هستند هرچند برای هر t ، دو بردار وابسته خطی را تشکیل می‌دهند.

استقلال خطی برداری : بردارهای X_1 ، ... ، X_k مستقل خطی هستند اگر یک ترکیب خطی آن برابر صفر شود،

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_k X_k = 0 \quad , \quad c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$$

آنگاه $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

استقلال خطی تابعی : توابع برداری $X_1(t)$ ، ... ، $X_k(t)$ مستقل خطی هستند هرگاه

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_k X_k(t) = 0 \, , \quad c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$$ برای هر t

به عنوان یک تابع برداری

آنگاه $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$

نکته - اگر در زمان t_0 بردارهای $X_1(t_0)$ ، ... ، $X_k(t_0)$ مستقل خطی باشند ، آنگاه توابع برداری $X_1(t)$ ، ... ، $X_k(t)$ نیز مستقل هستند. هرچند برعکس آن درست نیست. (مثال صفحه قبل)

گزاره ۱: اگر $X_1(t)$، ...، $X_k(t)$ جوابهای $\dot{X} = A(t)X$ باشند، آنگاه توابع برداری $X_1(t)$، ...، $X_k(t)$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر برای لااقل یک (هر) t_0، بردارهای $X_1(t_0)$، ...، $X_k(t_0)$ مستقل خطی باشند.

اثبات ـ اگر $X_1(t)$، ...، $X_k(t)$ توابع مستقل باشند و برای یک t_0 وابسته خطی باشند. یعنی

$$c_1 X_1(t_0) + \cdots + c_k X_k(t_0) = 0$$

و اردهید $Y(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_k X_k(t)$ پس Y یک جواب معادله $\dot{X} = A(t)X$ است. به علاوه $Y(t_0) = 0$

بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب $Y(t) \equiv 0$ بردار ثابت صفر است. (بردار ثابت صفر یک جواب معادله خطی $\dot{X} = A(t)X$ است که در شرط اولیه $X(t_0) = 0$ صدق می‌کند.) در نتیجه

$$c_1 X_1(t) + \cdots + c_k X_k(t) = 0 \qquad \forall t$$

از استقلال خطی توابع $X_1(t)$، ...، $X_k(t)$ نتیجه می‌شود $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

مثال - توابع $X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ و $X_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ نمی‌توانند جواب‌های دستگاه $\dot{X} = A(t)\,X$ برای ماتریس پیوسته $A(t)$ باشند.

مثال - $X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ و $X_2(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1+t \end{pmatrix}$ نمی‌توانند جواب‌های یک دستگاه خطی همگن باشند. زیرا

$X_1(1)$ و $X_2(1)$ وابسته خطی هستند هر چند توابع $X_1(t)$ و $X_2(t)$ مستقل هستند.

سؤال - آیا دستگاه معادله خطی غیر همگن $\dot{X} = A(t)\,X + g(t)$ که $A(t)$ و $g(t)$ پیوسته باشند وجود دارد که توابع مثال قبل جواب‌های آن باشند؟

پاسخ - بله (تمرین)

مثال- $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$ اگر $y = x_1$ آنگاه $y'' + 2y' + y = 0$

و جوابهای آن $y_1(t) = e^{-t}$ و $y_2(t) = te^{-t}$ است.

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \quad , \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $X_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ مستقل خطی هستند در نتیجه $X_1(t)$ و $X_2(t)$ دو جواب مستقل دستگاه فوق خواهند بود.

قضیه ۲: فضای جواب‌های معادله همگن $\dot{X}=A(t)X$ یک فضای برداری n-بعدی است.

اثبات - برای هر بردار $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \leftarrow$ مؤلفه i ام، بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب، معادله با شرط اولیه

$X(t_0)=e_i$ یک جواب دارد. آن را $X_i(t)$ می‌نامیم.

$$\begin{cases}\dot{X}_i=A(t)X_i\\ X_i(t_0)=e_i\end{cases}$$

توابع $\{X_1(t),\dots,X_n(t)\}$ در نقطه t_0 به عنوان بردار مستقل خطی هستند. در نتیجه به عنوان تابع نیز مستقل خطی خواهند بود. به علاوه هر جواب دیگر X یک ترکیب خطی از این n جواب است.

اگر

$$X(t_0)=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=c_1e_1+c_2e_2+\dots+c_ne_n$$

$$=c_1X_1(t_0)+\dots+c_nX_n(t_0)$$

از طرفی تابع $c_1X_1(t)+\dots+c_nX_n(t)$ جواب معادله است که در نقطه t_0 با $X(t)$ برابر است.

بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب برای هر t این دو برابر خواهند بود.

قضیه آبل: اگر $X_1(t)$ ، ... ، $X_n(t)$ جوابهای دستگاه $\dot{X} = A(t)X$ باشند و

$$\Phi(t) = \left[X_1(t) \mid X_2(t) \mid \cdots \mid X_n(t) \right]$$

آنگاه $W(t) = \det \Phi(t)$ یا همیشه صفر است یا هیچ وقت.

اثبات - نتیجه مستقیم گزاره ۱ است با توجه به این حقیقت جبر خطی که ماتریس $n \times n$ وارون پذیر (و در نتیجه دترمینان ناصفر) است اگر و تنها اگر ستونهای مستقل خطی باشند.

نکته - قضیه فوق را میتوان به صورت دیگر اثبات کرد. کافی است نشان دهیم

$$\frac{dW}{dt} = \left(\operatorname{tr} A(t)\right) W$$

دستگاه خطی با ضرایب ثابت : $\dot{X} = AX$

A یک ماتریس $n\times n$ ثابت است.

ساده‌ترین حدس برای جواب، توابع به صورت $X(t)=e^{\lambda t}V$ که $\lambda\in\mathbb{R}$ و بردار $V\in\mathbb{R}^n$ ثابت هستند.

$$\dot{X} = \lambda e^{\lambda t} V \stackrel{?}{=} AX = A(e^{\lambda t}V) = e^{\lambda t} AV$$

تساوی بالا به شرطی برقرار است که $AV=\lambda V$.

تعریف - مقدار $\lambda\in\mathbb{R}$ را مقدار ویژه ماتریس A می‌نامیم هرگاه بردار ناصفر $0\neq V\in\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که $AV=\lambda V$. یا به طور معادل $(A-\lambda I)V=0$.

دترمینان ماتریس $A-\lambda I$ وارون‌ناپذیر است و باید $\det(A-\lambda I)=0$.

$\det(A-\lambda I)$ یک چندجمله‌ای درجه n برحسب λ است که به آن چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A گفته می‌شود.

ریشه‌های این چندجمله‌ای مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

اگر $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ریشه مختلط چندجمله‌ای مشخصه باشد، آن را به عنوان مقدار ویژه مختلط درنظر می‌گیریم.

دراین صورت بردار ویژه مختلط $V = U \pm iW$ وجود دارد که

$$AV = \lambda V \Rightarrow A(U \pm iW) = (\alpha \pm i\beta)(U \pm iW)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AU = \alpha U - \beta W \\ AW = \beta U + \alpha W \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix} U & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & W \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

نتیجه: اگر λ یک مقدار ویژه حقیقی و V بردار ویژه متناظر آن باشد،

$$X(t) = e^{\lambda t} V$$

جواب معادله است و اگر $\lambda = \alpha \pm i\beta$ مقدار ویژه مختلط و $V = U \pm i W$ بردار ویژه متناظر آن

آنگاه قسمتهای حقیقی و موهومی

$$e^{(\alpha \pm i\beta)t}(U \pm iW) = e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm i \sin\beta t)(U \pm iW)$$

دو جواب مستقل معادله خواهند بود.

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و پنجم ۹۸/۱۰/۲

دستگاه معادلات خطی $\dot{X} = AX$

در جلسهٔ قبل دیدیم که به ازای هر مقدار ویژهٔ ماتریس A، تابع $X(t)=e^{\lambda t}V$ جواب است که V بردار ویژهٔ متناظر λ است. (اگر λ مقدار ویژه مختلط باشد، بردار ویژهٔ V نیز مختلط است و تابع $X(t)$ یک تابع مختلط خواهد بود.)

از طرفی می‌دانیم فضای همه جواب‌های دستگاه معادلات خطی $\dot{X}=AX$، یک فضای n-بعدی است.

هدف: پیدا کردن یک پایه برای فضای جواب‌ها یا به عبارتی پیدا کردن n جواب مستقل.

(به چنین مجموعه‌ای، مجموعه جواب‌های اساسی گفته می‌شود.)

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، چندجمله‌ای مشخصه آن به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{s_r},$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$ مقدار ویژه است و s_i تکرار (جبری) آن نامیده می‌شود. داریم $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = n$

زیرفضای $Nul(\lambda_i I - A)$ شامل همه بردارهای ویژه متناظر λ_i است و فضای ویژه متناظر λ_i نامیده می‌شود.

$$t_i = \dim(Nul(\lambda_i I - A)) \leq s_i$$

<u>گزاره</u>: اگر $v^1, \ldots, v^k$ بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر مقادیر ویژه $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ باشند (لزوماً λ_iها متمایز نیستند) آنگاه جوابهای $e^{\lambda_1 t} v^1, \ldots, e^{\lambda_k t} v^k$ مستقل هستند.

اثبات - کافیست استقلال خطی توابع در زمان $t=0$ بررسی شود.

گزاره ـ اگر v^1 ، ... ، v^k بردارهای ویژه متناظر مقادیر ویژه متمایز λ_1 ، ... ، λ_k باشند، آنگاه v^1 ، ... ، v^k مستقل خطی هستند.

اثبات ـ تمرین.

جمع بندی : از دو گزاره قبل نتیجه می‌شود به تعداد بردارهای ویژه مستقل ماتریس یعنی جمع بعد فضاهای ویژه آن

$$t_1 + \cdots + t_r$$

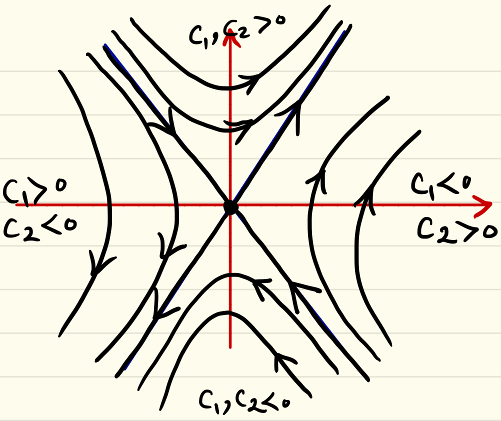
جواب مستقل به صورت $e^{\lambda_i t} v^i$ برای دستگاه $\dot{X} = AX$ وجود دارد.

بعداً خواهیم دید که چگونه جوابهای مستقل دیگری را می‌توانیم پیدا کنیم تا به مجموعه n عضوی از جوابهای پایه برسیم.

مثال - $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-4&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$$

مقادیر ویژه این ماتریس $\lambda_1=3$ و $\lambda_2=-1$ است.



فضای فاز

$$AV^1=3V^1 \Rightarrow \begin{pmatrix}-2&1\\4&-2\end{pmatrix}V^1=0 \Rightarrow V^1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$AV^2=-V^2 \Rightarrow \begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}V^2=0 \Rightarrow V^2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

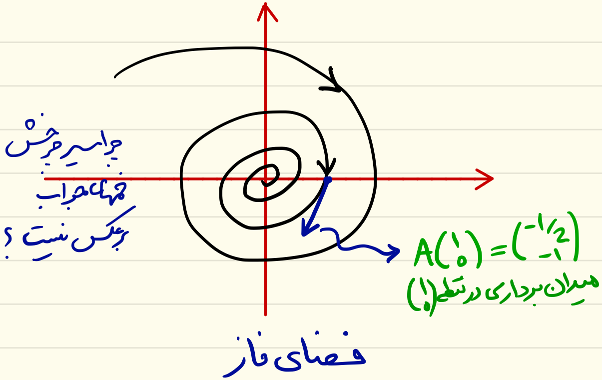
درنتیجه $\left\{e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right.$ و $\left.e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ مجموعه اساسی جواب‌های متناظر $\dot{X}=AX$. پس هر جواب این دستگاه به صورت

$$X(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

است.

مثال -

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$



مقادیر ویژه این ماتریس و بردار ویژه متناظر آن $\lambda = -1/2 \pm i$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$e^{(-1/2 \pm i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = e^{-1/2 t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \pm i e^{-1/2 t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

جواب دستگاه $\dot{X} = AX$ است و همه جواب‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$X(t) = e^{-1/2 t}\left[c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \to +\infty$$

مثال - $$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

متناظر $\lambda_1=-1$ دو بردار ویژه مستقل $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ وجود دارد.

متناظر $\lambda_2=2$ ، $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ بردار ویژه است.

$$X(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

مثال - جواب $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$ با شرط اولیه $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

مقادیر ویژه ماتریس فوق $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$ است و بردارهای ویژه متناظر آنها $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$

مجموعه اساسی جواب :

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \; e^{(1 \pm i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \pm i e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

مثال - $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\lambda = -1$ مقدار ویژه این ماتریس است با تکرار جبری ۳ .

فضای ویژه $Nul(A+I)$ یک بعدی است .

$$(A+I)V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = v_3 = 0$$

بنابراین $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ تنها بردار ویژه مستقل متناظر $\lambda = -1$ است . درنتیجه با اطلاعات کنونی

تنها جواب $e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ برای این دستگاه بدست می آید.

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و شش ۹۸/۱۰/۷

دستگاه خطی $\dot{X} = AX$

- اگر V بردار ویژه متناظر مقدار ویژه λ باشد، $X(t) = e^{\lambda t} V$ جواب است.

- تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر λ و درنتیجه تعداد جوابهای مستقل برابر است با

$$\text{بعد فضای ویژه} = \dim\left[Nul\,(A-\lambda I)\right] = n - rank\,(A-\lambda I)$$

این عدد کوچکتر است از تکرر جبری مقدار ویژه.

- نشان خواهیم داد به اندازه تکرر هر مقدار ویژه جواب مستقل وجود دارد.

حدس جواب:

$$X(t) = e^{\lambda t} \times \text{چندجمله‌ای برداری}$$

$$= e^{\lambda t} \times \left[t^k V^k + t^{k-1} V^{k-1} + \dots + t V^1 + V^0 \right]$$

به همین منظور تغییر متغیر زیر را در نظر بگیرید:

$$Y(t) = e^{-\lambda t} X(t)$$

خواهیم داشت:

$$\dot{Y} = -\lambda e^{-\lambda t} X(t) + e^{-\lambda t} \dot{X} = (A-\lambda I)(e^{-\lambda t} X) = (A-\lambda I) Y$$

اگر $Y(t)$ یک چندجمله‌ای به صورت زیر باشد:

$$Y(t) = \frac{t^k}{k!} U^k + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} U^{k-1} + \cdots + t U^1 + U^0 \quad , \quad U^k \neq 0$$

آنگاه

$$\dot{Y} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} U^k + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} U^{k-1} + \cdots + U^1$$

$$\|$$

$$(A-\lambda I) Y = \frac{t^k}{k!} (A-\lambda I) U^k + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (A-\lambda I) U^{k-1} + \cdots + (A-\lambda I) U^0$$

$$\begin{cases} (A-\lambda I)U^0 = U^1 \\ (A-\lambda I)U^1 = U^2 \\ \vdots \\ (A-\lambda I)U^k = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (A-\lambda I)^k U^0 = 0 \\ \\ (A-\lambda I)^{k-1} U^0 = U^k \neq 0 \end{array}$$

تعریف- بردار U^0 در روابط قبل یک بردار ویژه تعمیم یافته نامیده می‌شود. در واقع باید عدد صحیح $k \geq 1$ و مقدار ویژه λ وجود داشته باشند که:

$$(A-\lambda I)^k U^0 = 0 \quad , \quad (A-\lambda I)^{k-1} U^0 \neq 0$$

تعداد بردارهای ویژه‌ی تعمیم یافته مستقل به اندازه تکرار هر مقدار ویژه است . اگر تکرار مقدار ویژه‌ی λ برابر s باشد، از یک قضیه جبر خطی می‌دانیم :

$$\dim\left[Nul(A-\lambda I)^s\right] = s$$

مثال ـ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\lambda = 2$ مقدار ویژه‌ی با تکرار دو است .

فضای ویژه‌ی متناظر یک بعدی است و $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ بردار ویژه‌ی متناظر آن است .

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

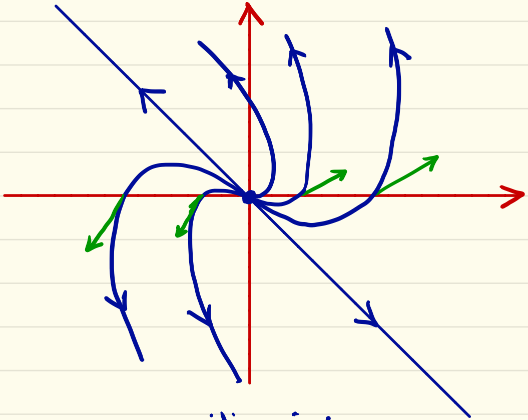
بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه‌ی تعمیم یافته است .

$$(A-2I)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (A-2I)^2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

جوابهای پایه متناظر $\dot{X}=AX$ عبارتند از:

$$X_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

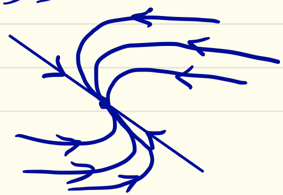
$$X_2(t) = e^{2t}\left[tU^1 + U^0\right] = e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$



فضای فاز

تمرین - نشان دهید همه جوابها در فضای فاز وقتی $t\to-\infty$ بر خط $y=-x$ مماس می‌شوند. (راهنمایی: حد $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{X(t)}{|X(t)|}$ را حساب کنید.)

سؤال - چرا فضای فاز این دستگاه به صورت زیر نیست؟



حالتهای مختلف یک دستگاه دوبعدی

(i) دو بردار ویژه مستقل خطی. (مثلاً در حالتی که دو مقدار ویژه متمایز داریم. هرچند در حالتی که فضای ویژه یک مقدار ویژه دوبعدی باشد، $A = \lambda I$ خواهد بود.)

در این حالت شکل کلی جواب به صورت زیر است:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V^2$$

(ii) دو مقدار ویژه مختلط $\lambda = \alpha \pm i\beta$. در این حالت شکل کلی جواب به صورت زیر است:

$$X(t) = e^{\alpha t} \left[c_1 \left(\cos\beta t\, U - \sin\beta t\, W \right) + c_2 \left(\cos\beta t\, W + \sin\beta t\, U \right) \right]$$

(iii) یک مقدار ویژه با تکرار ۲ که فضای ویژه یک بعدی دارد.

متناظر λ یک بردار ویژه V و یک بردار ویژه تعمیم‌یافته U وجود دارد.

$$(A-\lambda I)V=0, \quad \Rightarrow \quad X_1(t)=e^{\lambda t}V$$ یک جواب است

$$(A-\lambda I)U\neq 0, \quad (A-\lambda I)^2 U=0 \quad \Rightarrow$$

$(A-\lambda I)U$ بردار ویژه است. می‌توانیم فرض کنیم

$$(A-\lambda I)U=V$$

درنتیجه جواب دوم به صورت زیر است:

$$X_2(t)=e^{\lambda t}\left[U+tV\right]$$

<u>گزاره</u>: اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A منفی باشد، آنگاه هر جواب $\dot{X}=AX$ به صفر میل می‌کند هرگاه $t\to\infty$.

حالتهای مختلف دستگاه سه بعدی :

(یک) سه مقدار ویژه متمایز (اعم از اینکه مقادیر ویژه حقیقی یا مختلط باشند) :

در این حالت سه بردار ویژه مستقل داریم و جوابها مشابه آنچه در جلسه قبل گفته شد به دست می آیند.

(دو) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ دو مقدار ویژه هستند. λ_1 تکرار یک دارد و λ_2 تکرار دو.

- اگر فضای ویژه $Nul(A-\lambda_2 I)$ دو بعدی باشد، آنگاه سه بردار ویژه مستقل خواهیم داشت.
- اگر فضای ویژه $Nul(A-\lambda_2 I)$ یک بعدی باشد، آنگاه بردار ویژه تعمیم یافته U وجود دارد که

$(A-\lambda_2 I)U = V$ بردار ویژه است. $\left((A-\lambda_2 I)V = 0 \right)$

در این حالت شکل جواب به صورت زیر است :

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underbrace{V_1}_{\substack{\text{بردار ویژه} \\ \text{متناظر } \lambda_1}} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underbrace{V}_{\substack{\text{بردار ویژه} \\ \text{متناظر } \lambda_2}} + c_3 e^{\lambda_2 t} \left[tV + U \right]$$

(iii) λ مقدار ویژه با تکرر سه است.

- بعد فضای ویژه $Nul(A-\lambda I)$ برابر سه است.
- بعد فضای ویژه $Nul(A-\lambda I)$ یک است. بردار ویژه تعمیم یافته U وجود دارد که

$$(A-\lambda I)^3 U = 0 \quad , \quad \underbrace{V = (A-\lambda I)^2 U}_{\text{بردار ویژه است}} \neq 0$$

$$W = (A-\lambda I)U$$

در این حالت مجموعه جوابهای اساسی به صورت زیر است:

$$X_1(t) = e^{\lambda t} V$$

$$X_2(t) = e^{\lambda t}[tV + W]$$

$$X_3(t) = e^{\lambda t}\left[\frac{t^2}{2}V + tW + U\right]$$

• بعد فضای ویژه برابر دو است. یعنی دو بردار ویژه مستقل V^1 و V^2 وجود دارند.

بردار ویژه تعمیم یافته U وجود دارد که $(A-\lambda I)^2 U = 0$

$(A-\lambda I)U = \alpha_1 V^1 + \alpha_2 V^2$ بردار ویژه است.

در این حالت جوابهای پایه عبارتند از:

$$X_1(t) = e^{\lambda t} V^1 \qquad X_2(t) = e^{\lambda t} V^2$$

$$X_3(t) = e^{\lambda t}\left[t(A-\lambda I)U + U\right]$$

دقت کنید که در این حالت رابطه $(A-\lambda I)^2 = 0$ تماماً برقرار است. برای پیدا کردن بردار ویژه تعمیم یافته، تنها کافی است یک بردار ناصفر دلخواه $U \neq 0$ را در نظر بگیریم که بردار ویژه نباشد. یعنی U ترکیب خطی V^1 و V^2 نباشد.

مثال -
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\-3&2&4\end{pmatrix}$$

$\lambda=2$ تکرر سه دارد. $\operatorname{rank}(A-2I)=2$ پس بعد فضای ویژه برابر یک است.

$$(A-2I)V=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$$

$V=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ بردار ویژه است.

$$(A-2I)W=V \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w_1=1\ ,\quad w_2+w_3=1$$

$W=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ یک بردار ویژه تعمیم یافته است.

$$(A-2I)U=W \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1=2,\quad u_2+u_3=3$$

$U=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ یک جواب و درنتیجه بردار ویژه تعمیم یافته است . توابع زیر یک مجموعه اساسی جوابها برای دستگاه $\dot{X}=AX$ هستند.

$$X_1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad X_2(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\t+1\\-t\end{pmatrix},\quad X_3(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}t+2\\ \frac{t^2}{2}+t+3\\ -\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}$$

مثال - $A=\begin{pmatrix}5&-3&-2\\8&-5&-4\\-4&3&3\end{pmatrix}$

$\lambda=1$ مقدار ویژه با تکرر سه است . $\operatorname{rank}(A-I)=1$ و درنتیجه دو بردار ویژه مستقل دارد.

$$(A-I)V=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}4&-3&-2\\8&-6&-4\\-4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0$$

$V^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ و $V^2 = \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ دو بردار ویژه مستقل هستند. برای پیدا کردن بردار ویژه تعمیم یافته،

دقت کنید که در این حالت $(A-I)^2=0$ و کافیست U در فضای ویژه نباشد. مثلاً $U=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

در نتیجه جواب عمومی دستگاه $\dot{X}=AX$ به صورت زیر است:

$$X(t) = e^t\left[c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} + c_3\left(\underbrace{t(A-I)U+U}_{\begin{pmatrix}4t+1\\8t\\-4t\end{pmatrix}}\right)\right]$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و هفت ۹۸/۱۰/۹

رویکردی دیگر به دستگاه خطی $\dot{X} = AX$

یادآوری روش تقریبهای متوالی : برای تقریب جواب معادله $\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ دنباله بازگشتی زیر را می‌سازیم :

$$\varphi_0(t) \equiv y_0 \quad , \quad \varphi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\, ds$$

کاربرد روش تقریبهای متوالی برای حل دستگاه $\dot{X} = AX$ با شرط اولیه $X(0) = X_0$

$$\varphi_0(t) \equiv X_0 \,, \qquad \varphi_{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t A\varphi_n(s)\, ds$$

$$\varphi_1(t) = X_0 + \int_0^t AX_0\, ds = (I + tA)X_0$$

$$\varphi_2(t) = X_0 + \int_0^t A(I + sA)X_0\, ds = \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right)X_0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(t) = \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n\right)X_0$$

سری زیر در فضای ماتریسهای $n\times n$ همگراست و آن را با نماد $\exp(tA)$ نشان می‌دهیم:

$$\exp(tA) = e^{tA} := I + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \frac{t^3A^3}{3!} + \cdots$$

به علاوه داریم:

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A + tA^2 + \frac{t^2A^3}{2!} + \cdots = Ae^{tA}$$

نتیجه: به ازای هر بردار X_0، تابع $X(t) = e^{tA}X_0$ جواب دستگاه خطی $\dot{X} = AX$ با شرط اولیه $X(0) = X_0$ است. همچنین $Y(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$ جواب این دستگاه با شرط اولیه $Y(t_0) = X_0$ است.

چند خاصیت از e^{tA}:

- $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$
- $e^{(t+s)A} = e^{tA}\cdot e^{sA}$
- اگر $AB = BA$: $e^{t(A+B)} = e^{tA}\cdot e^{tB}$

نتیجه : e^{tA} یک ماتریس وارون پذیر است . در نتیجه ستون‌های آن جواب‌های مستقل خطی هستند.

(دقت کنید $e^{tA}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to$ ام i در معادله صدق می‌کند و ستون i ام ماتریس e^{tA} را نشان می‌دهد.)

نکته ـ نتیجه بالا نشان می‌دهد که به کمک محاسبه ماتریس e^{tA} می‌توانیم n جواب مستقل برای دستگاه $\dot{X}=AX$ پیدا کنیم.

نکته ـ اگر v یک بردار ویژه ماتریس A باشد ، در واقع اگر $Av=\lambda v$ آنگاه

$$e^{tA}v=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}v=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda^k v=e^{t\lambda}v$$

نکته ـ اگر v یک بردار ویژه تعمیم یافته باشد ، یعنی $(A-\lambda I)^m v=0$ آنگاه

$$e^{tA}v=e^{t\lambda I}\cdot e^{t(A-\lambda I)}v=\left(e^{t\lambda}I\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(A-\lambda I)^k}{k!}\right)v$$

$$= e^{t\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A-\lambda I)^k}{k!} v}_{\text{یک چندجمله‌ای درجه } m-1}$$

تعریف ـ ماتریس $\Phi(t)$ را ماتریس اساسی دستگاه خطی $\dot{X}=AX$ می‌نامیم هرگاه ستون‌های آن جواب‌های مستقل این دستگاه باشند.

دقت کنید ماتریس اساسی وارون پذیر است چون ستون‌های آن مستقل هستند.

به علاوه به عنوان یک ماتریس در معادله صدق می‌کند، یعنی $\dot{\Phi} = A\Phi$.

مثال ـ ماتریس e^{tA} یک ماتریس اساسی است.

نکته ـ اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی باشد، هر جواب $\dot{X}=AX$ با شرط اولیه $X(t_0)=X_0$ به صورت زیر است:

$$X(t) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1} X_0$$

گزاره - اگر $\Phi(t)$ و $\Psi(t)$ دو ماتریسِ اساسی باشند، ماتریسِ ثابت C وجود دارد که

$$\Phi(t) = \Psi(t)C$$

اثبات - باید $C = \Psi(0)^{-1}\Phi(0)$. $\Phi(t)$ و $\Psi(t)C$ دو ماتریسِ هستند که در معادله صدق می‌کنند

$$\Phi(0) = \Psi(0)C$$

بنابر قضیه یکتاییِ جواب معادله دیفرانسیلِ این دو ماتریس در همه زمان‌ها برابر هستند. یعنی $\Phi(t) = \Psi(t)C$

گزاره - اگر $\Phi(t)$ ماتریسِ اساسی باشد، آنگاه $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$.

نکته - به کمک گزاره بالا می‌توانیم به یکِ روش محاسبه برای ماتریسِ e^{tA} برسیم. ابتدا جواب‌های پایه برای $\dot{X} = AX$ را پیدا می‌کنیم. سپس با قرار دادن اینِ جواب‌ها در ستون‌های یکِ ماتریسِ، به ماتریسِ اساسی $\Phi(t)$ می‌رسیم. گزاره بالا e^{tA} را ارائه می‌دهد.

مثال - ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ، e^{tA} را محاسبه کنید.

مقادیر ویژه این ماتریس عبارتند از ۱، 3 و 5 و به ترتیب بردارهای ویژه آن $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ هستند.

درنتیجه ماتریس زیر ماتریس اساسی $\dot{X} = AX$ است.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

روش دیگر برای محاسبه ماتریس e^{tA} :

اگر $A = PDP^{-1}$ که D یک ماتریس قطری باشد، یعنی

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

آنگاه $A^k = PD^kP^{-1}$ که

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P D^k P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k\right) P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= P \underbrace{\begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}}_{e^{tD}} P^{-1}$$

دستگاه ناهمگن $\quad \dot{X} = AX + f(t)$

روش تغییر پارامترها: اگر $\Phi(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$ ماتریس اساسی $\dot{X} = AX$ باشد، آنگاه

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t) = \Phi(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

جواب عمومی معادله همگن است. برای حل معادله ناهمگن جواب را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$X_p(t) = u_1(t) X_1(t) + \dots + u_n(t) X_n(t) = \Phi(t) \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) u(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{X}_p = \dot{\Phi} u + \Phi \dot{u} = A \Phi u + \Phi \dot{u} = A X_p + \Phi \dot{u}$$

برای اینکه $\dot{X}_p = AX_p + f$ باید

$$\Phi \dot{u} = f \quad \Rightarrow \quad \dot{u}(t) = \Phi^{-1}(t) f(t)$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, f(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad X_p(t) = \Phi(t)\, u(t) = \Phi(t)\, \underbrace{u(t_0)}_{\Phi(t_0)^{-1} X_0} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1} f(s)\, ds$$

با فرض اینکه $X_p(t_0)=X_0$ $\longrightarrow$ $\Phi(t_0)^{-1}X_0$

اگر به جای $\Phi(t)$ ماتریس اساسی e^{tA} را جایگزین کنیم، جواب $\dot{X}=AX+f(t)$ با شرط اولیه $X(t_0)=X_0$ به صورت زیر است:

$$\boxed{X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds}$$

مثال - جواب دستگاه $\dot{X} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ e^t\cos 2t\end{pmatrix}$ با شرط اولیه $X(0) = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ را پیدا کنید.

مقادیر ویژه ماتریس بالا عبارتند از ۱، $1\pm 2i$ هستند و بردارهای ویژه متناظر $\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 2\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \pm i\end{pmatrix}$ خواهند بود.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}2e^t & 0 & 0\\ -3e^t & e^t\cos 2t & e^t\sin 2t\\ 2e^t & e^t\sin 2t & -e^t\cos 2t\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = e^t\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t+\sin 2t & \cos 2t & -\sin 2t\\ 1+\frac{3}{2}\sin 2t-\cos 2t & \sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}$$

$$X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ e^s\cos 2s\end{pmatrix} ds = e^{tA}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \int_0^t e^t\begin{bmatrix}0\\ -\sin 2(t-s)\cos 2s\\ \cos 2(t-s)\cos 2s\end{bmatrix} ds$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست وهشت ۹۸/۱۰/۱۴

روش حدسی (ضرایب نامعین) $\qquad \dot{X} = AX + f(t)$

به‌عنوان مثال فرض کنید $f(t) = e^{\alpha t} V$. حدس معقول برای جواب $X_p(t) = e^{\alpha t} U$ است.

$$AX_p + f(t) = \dot{X}_p = \alpha e^{\alpha t} U = \alpha X_p$$

$$\Rightarrow \quad (A - \alpha I) X_p = -f(t) = -e^{\alpha t} V$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha I - A) U = V \qquad (*)$$

اگر α مقدار ویژهٔ A نباشد، دستگاه بالا جواب دارد و می‌توان بردار U را پیدا کرد به‌گونه‌ای که $X_p(t) = e^{\alpha t} U$ جواب باشد.

اگر α مقدار ویژه باشد، به شرط آنکه $v \in Im(\alpha I - A)$ همچنان معادله $(*)$ جواب دارد و $X_p(t) = e^{\alpha t} U$

جواب معادله است.

برای پیدا کردن جواب در حالت کلی از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

یک قضیه از جبر خطی: برای هر بردار $v \in \mathbb{R}^n$، بردارهای $v^1 \in Im(\alpha I - A)^s$ و $v^2 \in Nul(\alpha I - A)^s$

وجود دارند که $v = v^1 + v^2$ و s تکرر مقدار ویژه α است.

با توجه به مطالب قبل متناظر v^1 جواب $X_p^1(t) = e^{\alpha t} W$ در دستگاه ناهمگن $\dot{X} = AX + e^{\alpha t} v^1$ صدق می‌کند.

لذا کافی است جوابی برای $\dot{X} = AX + e^{\alpha t} v^2$ پیدا کنیم یا به طور معادل فرض کنیم $v^2 \in Nul(\alpha I - A)^s$ یک بردار ویژه

تعمیم یافته است. در این حالت حدس جواب به صورت زیر است:

$$X_p^2(t) = e^{\alpha t} \times \text{چندجمله‌ای برداری} = e^{\alpha t}\left[U^0 + tU^1 + \cdots + \frac{t^k}{k!}U^k\right]$$

$$AX_p^2 + f(t) = \dot{X}_p^2 = \alpha X_p^2 + e^{\alpha t}\left[U^1 + tU^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}U^k\right]$$

$$\Rightarrow (A-\alpha I)X_p^2 = e^{\alpha t}\left[-V^2 + U^1 + tU^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}U^k\right]$$

$$\Rightarrow (A-\alpha I)\left[U^0 + tU^1 + \cdots + \frac{t^k}{k!}U^k\right] = \left[-V^2 + U^1 + tU^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}U^k\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A-\alpha I)U^0 = U^1 - V^2 \\ (A-\alpha I)U^1 = U^2 \\ \vdots \\ (A-\alpha I)U^{k-1} = U^k \\ (A-\alpha I)U^k = 0 \end{cases} \Rightarrow (A-\alpha I)^k U^1 = 0 \ , \ (A-\alpha I)^{k-1}U^1 = U^k \neq 0$$

چون V^2 بردار ویژه تعمیم یافته است بنابراین برای یک مقدار صحیح K داریم:

$$(A-\alpha I)^k V^2 = 0 \ , \ (A-\alpha I)^{k-1} V^2 \neq 0$$

درنتیجه $U^1 = V^2$ و $U^0 = 0$ به روابط بالا منجر خواهند شد. درنتیجه حدس جواب به صورت

$$X_p^2(t) = e^{\alpha t}\left[tU^1 + \frac{t^2}{2}U^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}U^k\right]$$

است که

$$U^1 = V^2, \quad U^i = (A-\alpha I)^{i-1}V^2$$

<u>جمع بندی</u> : با در نظر گرفتن $V = V^1 + V^2$ می توان همواره فرض اولیه اول جواب را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$X_p(t) = X_p^1(t) + X_p^2(t) = e^{\alpha t}\left[W + tU^1 + \frac{t^2}{2}U^2 + \cdots + \frac{t^s}{s!}U^s\right]$$

که در آن s تکرر مقدار ویژه α است. در این صورت احتیاجی به تجزیه $V = V^1 + V^2$ نداریم. محاسبات بالا نشان می دهد حتماً جواب خصوصی به صورت بالا خواهد بود.

حالت :
$$f(t) = e^{\alpha t}\left[V^0 + tV^1 + \cdots + \frac{t^m}{m!}V^m\right]$$

حدس جواب :
$$X_p(t) = e^{\alpha t}\left[U^0 + tU^1 + \cdots + \frac{t^m}{m!}U^m\right]$$

$$AX_p + f(t) = \dot{X}_p = \alpha X_p + e^{\alpha t}\left[U^1 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}U^m\right]$$

$$\Rightarrow (A-\alpha I)\left[U^0 + tU^1 + \cdots + \frac{t^m}{m!}U^m\right] = \left[U^1 - V^0 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\left(U^m - V^{m-1}\right) - \frac{t^m}{m!}V^m\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A-\alpha I)U^0 = U^1 - V^0 \\ \vdots \\ (A-\alpha I)U^{m-1} = U^m - V^{m-1} \\ (A-\alpha I)U^m = -V^m \end{cases}$$

اگر α مقدار ویژه نباشد، همه روابط بالا جواب دارند و بردارهای $U^m, \ldots, U^0$ به دست می آیند.

تمرین - درحالتی که α مقدار ویژه با تکرار s باشد، نشان دهید حدس جواب به صورت زیر حتماً جواب دارد.

$$X_p(t) = e^{\alpha t} \times \text{چندجمله‌ای درجه } (m+s)$$

مثال -

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} X + \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}}_{\underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} + \underbrace{t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{f_2}}$$

مقادیر ویژه این ماتریس -1 و -3 است. حدس جواب برای جمله ناهمگن f_2 عبارتست از

$$X_2(t) = [U_0 + tU_1]$$

$$\Rightarrow \quad U_1 = A[U_0 + tU_1] + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AU_0 = U_1 \ , \ AU_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} U_0 = U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow U_0 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

حدس جواب برای جمله ناهمگن $f_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ با توجه به اینکه -1 مقدار ویژه ماتریس با تکرر یک است

$$X_1(t) = e^{-t}\left[V_0 + t V_1 \right]$$

$$\Rightarrow -\left[V_0 + t V_1\right] + V_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \left[V_0 + t V_1\right] + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} V_1 = -V_1 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{for some } \omega \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} V_0 = V_1 - V_0 - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} V_0 = \begin{pmatrix} \omega - 2 \\ \omega \end{pmatrix}$$

شرط وجود جواب: $\omega - 2 = -\omega$ یا اینکه $\omega = 1$.

$$\Rightarrow V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = X_1(t) + X_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/3 + t \\ -5/3 + 2t \end{pmatrix}$$

رویکرد دیگر برای پیدا کردن $X_1(t)$ جواب متناظر $f_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ این است که ابتدا تجزیه $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = W_1 + W_2$

را بنویسیم که $W_1 \in Nul(A+I)$ و $W_2 \in Im(A+I)$.

$$A+I = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \qquad Nul(A+I) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Im(A+I) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{W_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{W_2}$$

حدس جواب برای $e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ عبارت است از $X_1^1(t) = e^{-t}U^0$ و

$$-U^0 = AU^0 + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}U^0 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow U^0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

و حدس جواب برای $e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ به صورت $X_1^2(t) = e^{-t}[tU^1]$ است که $U^1 = W_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

مثال -
$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + t^2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ماتریسِ ضرایب مقدار ویژهٔ -2 با تکرر دو دارد. در این حالت حدس $X_p(t) = e^{-2t}\left[U_0 + tU_1 + \frac{t^2}{2}U_2\right]$ نمی‌تواند درست باشد.

زیرا در این صورت باید

$$-2X_p + e^{-2t}\left[U_1 + tU_2\right] = AX_p + t^2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left[U_0 + tU_1 + \frac{t^2}{2}U_2\right] = U_1 + tU_2 - t^2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1 = U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ این معادله جواب ندارد.

در واقع حدس معقول در این حالت $X_p(t) = e^{-2t}\left[U^0 + tU^1 + \frac{t^2}{2}U^2 + \frac{t^3}{3!}U^3 + \frac{t^4}{4!}U^4\right]$ است. (چرا؟)

پس از جایگذاری خواهیم داشت $U^0 = U^1 = U^2 = U^4 = 0$ و $U^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

روش تبدیل لاپلاس :

$$\hat{X}(s) := \int_0^\infty e^{-st} X(t)\, dt = \mathcal{L}[X]$$

انتگرال فوق را به صورت برداری تعریف می‌کنیم ، یعنی نسبت به هر مؤلفه انتگرال خواهیم گرفت .

خواص تبدیل لاپلاس به راحتی برای بردارها تعمیم می‌یابد. به خصوص

$$\mathcal{L}[\dot{X}] = s\hat{X}(s) - X(0)$$

در نتیجه برای حل معادله $\dot{X} = AX + f(t)$ با شرط اولیه $X(0) = X_0$ پس از تبدیل لاپلاس خواهیم داشت :

$$s\hat{X}(s) - X_0 = A\hat{X}(s) + \hat{F}(s) \Rightarrow (sI - A)\hat{X}(s) = X_0 + \hat{F}(s)$$

$$X(0)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad \dot{X}=\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}e^t\\e^t\end{pmatrix}$$ حل -

$$s\hat{X}(s)-X(0)=\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}\hat{X}+\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1}\\\frac{1}{s-1}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}s-1&-4\\-1&s-1\end{pmatrix}\hat{X}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1}+2\\\frac{1}{s-1}+1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}(s-1)\hat{x}_1-4\hat{x}_2=\frac{2s-1}{s-1}\\-\hat{x}_1+(s-1)\hat{x}_2=\frac{s}{s-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\hat{X}(s)=\begin{pmatrix}\frac{2}{s-3}+\frac{1}{s^2-1}\\\frac{1}{s-3}+\frac{s}{(s^2-1)(s-3)}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t)=\begin{pmatrix}2e^{3t}+\sinh t\\e^{3t}+\frac{3}{8}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-t}\end{pmatrix}$$