معادلات دیفرانسیل

جلسه اول ۹۸/۶/۳۰

یک مثال ساده از یک معادله دیفرانسیل :

معادله فنر

$$\underbrace{m}_{\text{جرم}}x'' + \underbrace{k}_{\text{ضریب ثابت فنر}}x = 0$$

$x(t)$: مقدار تغییر طول فنر در زمان t .

در این معادله رابطه‌ای بین مشتق دوم $x(t)$ و خود تابع بیان شده است .

هدف از حل این معادله پیدا کردن مجهول $x(t)$ است . یعنی تابع $x:[0,\infty) \to \mathbb{R}$

را پیدا کنیم که دو بار مشتق‌پذیر باشد و در رابطه بالا صدق کند .

شکل عمومی یک معادله دیفرانسیل به صورت $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ است

که $y:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع nـ بار مشتق‌پذیر، مجهول در معادله بالا است.

هدف از نظریه معادله دیفرانسیل پاسخ سؤالات زیر است:

۱- آیا این معادله جواب دارد؟

۲ـ در صورت وجود جواب، آیا جواب یکتا است؟

۳ـ به چه روشی جواب را پیدا کنیم؟

۴ـ به چه روشی می‌توان یک تحلیل کیفی از رفتار جواب بدون پیدا کردن جواب ارایه کرد؟

مثال ـ $F(t, y, y', y'') = m y'' + K y$

تعریف - بالاترین مرتبه مشتق که در یک معادله ظاهر می‌شود ، مرتبه معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

مثال - $y''' + (y')^4 + \sin y = 0$ ⟵ معادله مرتبه ۳ است.

معادلات مرتبه اول :

شکل کلی معادله مرتبه اول : $F(t, y, y') = 0$ ، $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$

$$\sin y' = g(t, y)$$

ساده‌ترین شکل : $\dfrac{dy}{dt} = y'(t) = g(t)$

بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم تابع $y(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + C$ به عنوان تابع اولیه تابع g

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + c}_{y(t)}\Big) = g(t)$$ در رابطه

صدق می‌کند به شرط آنکه g پیوسته باشد.

سؤال ۱: (وجود جواب) به شرط آنکه g پیوسته باشد، معادله جواب دارد.

سؤال ۲: (یکتایی جواب) اگر شرط اولیه $y(t_0) = y_0$ داده شده باشد، جواب معادله یکتا است.

در این صورت ثابت c برابر y_0 است.

معادله خطی مرتبه اول :
$$\mathcal{L}[y] := \frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

$$\mathcal{L} : \{\text{همه توابع مشتق‌پذیر}\} \longrightarrow \{\text{همه توابع}\}$$

مثال -
$$\mathcal{L}[y] = y' + \sin t \cdot y$$

$$\mathcal{L}[\cos t] = -\sin t + \sin t \cos t$$

$$\mathcal{L}[1] = \sin t$$

تابع ثابت برابر یک ←

تعریف - عملگر $\mathcal{L}$ را خطی گوییم هرگاه

* $\mathcal{L}[y_1 + y_2] = \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2]$

به ازای هر دو تابع y_1 و y_2 .

* $\mathcal{L}[ry] = r\mathcal{L}[y]$ به ازای هر تابع دلخواه y و ثابت حقیقی r .

مثل- $\mathcal{L}[y] = y' + p(t)y$ خطی است. زیرا

$$(*) \qquad \mathcal{L}[y_1+y_2] = (y_1+y_2)' + p(t)(y_1+y_2)$$

$$= (y_1' + p(t)y_1) + (y_2' + p(t)y_2)$$

$$= \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2]$$

$$(*) \qquad \mathcal{L}[ry] = (ry)' + p(t)(ry)$$

$$= r\left(y' + p(t)y\right) = r\,\mathcal{L}[y]$$

تعریف- معادله $\mathcal{L}[y]=0$ که $\mathcal{L}$ عملگر خطی است، معادله همگن نامیده می‌شود.

در مقابل معادله $\mathcal{L}[y]=q(t)$ یک معادله ناهمگن است.

معادله خطی همگن مرتبه اول: $y'+p(t)y=0$.

به شرط آنکه $y\neq 0$.

$$y' = -p(t)y \rightsquigarrow \frac{y'}{y} = -p(t)$$

$$z(t) := \ln|y(t)| \rightsquigarrow z' = \frac{y'}{y} = -p(t)$$

بنابر قضیه اساسی $\longrightarrow$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} -p(s)\,ds$$

$$\rightarrow \ln|y(t)| = \ln|y(t_0)| - \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$$

$$|y(t)| = |y(t_0)| \exp\left[-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right]$$

با توجه به فرض $y(t) \neq 0$ در همه نقاط، اگر $y(t_0) > 0$ باشد، باید $y(t)$ نیز مثبت باشد
وگرنه y در یک نقطه‌ای صفر می‌شود. (به طور مشابه اگر $y(t_0) < 0$ باشد داریم $y(t) < 0$)

$$y(t) = y(t_0) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right]$$

مثال- $p(t) = 2t$ و شرط اولیه $y(0) = 2$ $y' + 2ty = 0$

$$\frac{y'}{y} = -2t \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \ln|y(t)| = -2t \rightsquigarrow \ln|y(t)| = -t^2 + C$$

$$\rightsquigarrow |y(t)| = e^{C} \cdot e^{-t^2}$$

(در این معادله قرار می‌دهیم $t=0$)

چون $y(0) = 2 > 0$ پس $y(t) > 0$ و در نتیجه $y(t) = 2e^{-t^2}$.

سؤال : آیا غیر از تابع صفر جوابی برای $y'+p(t)y=0$ وجود دارد که $y(t_0)=0$ ؟

پاسخ : اگر y تابع ناصفر باشد که $y(t_0)=0$ ، پس برای یک نقطه t_1 باید $y(t_1)\neq 0$.

اگر (α,β) بزرگترین بازه‌ای باشد که $t_1\in(\alpha,\beta)$ و y روی بازه (α,β) ناصفر است .

حداقل یکی از نقاط α و β عددی متناهی است . (حالت $(\alpha,\beta)=(-\infty,+\infty)$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد زیرا $y(t_0)=0$)

مثلاً فرض کنید $\beta<+\infty$ در نتیجه $y(\beta)=0$. (زیرا (α,β) بزرگترین بازه است که y روی آن ناصفر است)

بنابر محاسبات قبل داریم :

$$y(t)=y(t_1)\exp\left[-\int_{t_1}^{t}p(s)\,ds\right]$$

$$\Rightarrow\quad 0=y(\beta)=y(t_1)\underbrace{\exp\left[-\int_{t_1}^{\beta}p(s)\,ds\right]}_{\text{همیشه مخالف صفر است}}\Rightarrow y(t_1)=0$$

این تناقض نشان می‌دهد که تنها جواب معادله تابع ثابت صفر است .

معادلات دیفرانسیل

جلسه دوم ۹۸/۷/۱

(1) $$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$ معادله خطی مرتبه اول ناهمگن

ایده: $$\frac{d}{dt}(\cdots\cdots) = q(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu y' + \mu' y$$

اگر معادله را در تابع $\mu(t)$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y(t) = \mu(t)q(t)$$

تابع μ را پیدا می‌کنیم به طوری که سمت چپ رابطه بالا برابر $\frac{d}{dt}(\mu y)$ باشد.

یعنی $\mu' = p\mu$

در واقع μ جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول همگن است که در جلسه قبل بررسی شد.

$$\mu(t) = \mu(t_1)\exp\left[\int_{t_1}^{t} p(s)\,ds\right]$$

چون فقط به دنبال یک کاندید برای تابع μ هستیم که با ضرب کردن در معادله (1) آن را به صورت $\frac{d}{dt}(\mu y)$ ساده کند، می‌توانیم $\mu(t_1)$ را هر عدد دلخواه بگیریم و t_1 را هر عدد دلخواه بگیریم.

$$\mu(t) = \exp\left[\int^{t} p(s)\,ds\right]$$

در نتیجه معادله (1) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu q \quad \leadsto \mu(t)y(t) = \mu(t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu(s)q(s)\,ds$$

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\mu(t_0)\, y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu(s)\, q(s)\, ds \right]$$

$$\frac{\mu(t_0)}{\mu(t)} = \frac{\exp\left[\int^{t_0} p(s)\,ds\right]}{\exp\left[\int^{t} p(s)\,ds\right]} = \exp\left[\int_{t}^{t_0} p(\theta)\, d\theta\right]$$

$$\frac{\mu(s)}{\mu(t)} = \exp\left[\int_{t}^{s} p(\theta)\, d\theta\right]$$

$$\boxed{y(t) = \underbrace{y(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} -p(\theta)\, d\theta\right]}_{\text{جواب عمومی}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} q(s) \exp\left[\int_{s}^{t} -p(\theta)\, d\theta\right] ds}_{\text{جواب خصوصی}}}$$

مثال-

$$y' - 2ty = t \quad , \quad y(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\mu y) \overset{?}{=} \mu y' - 2t\mu y = t\mu \quad \rightsquigarrow \quad \mu' = -2t\mu$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt}\ln|\mu| = \frac{\mu'}{\mu} = -2t$$

$$\rightsquigarrow \quad \ln|\mu| = -t^2 \quad \rightsquigarrow \quad \mu(t) = e^{-t^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{-t^2} y(t)\right) = t e^{-t^2}$$

$$e^{-t^2} y(t) - e^{0} \underset{0}{\cancel{y(0)}} = \int_0^t s e^{-s^2}\, ds = -\frac{1}{2} e^{-s^2} \Big|_0^t$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{t^2}}$$

قضیه: اگر توابع p و q در بازه $\alpha < t < \beta$ (شامل نقطه t_0) پیوسته باشند، آنگاه جواب یکتای $y=y(t)$ وجود دارد که در معادله دیفرانسیل $y' + p(t)y = q(t)$ با شرط اولیه $y(t_0)=y_0$ صدق می‌کند. به علاوه تابع $y(t)$ حداقل در بازه $\alpha<t<\beta$ تعریف شده است.

مثال- $ty' + 2y = 4t^2$ با شرط اولیه $y(1)=2$.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t$$

پیوسته در $t \neq 0$

پیوسته روی کل $\mathbb{R}$

با توجه به اینکه شرط اولیه در نقطه $t_0=1$ داده شده است بنابراین این معادله جواب یکتا در بازه $(0,\infty)$ دارد.

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu y' + \frac{2\mu}{t} y = 4t\mu \quad \rightsquigarrow \quad \mu' = \frac{2\mu}{t}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt} \ln|\mu| = \frac{2}{t}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mu(t) = t^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(t^2 y) = 4t^3 \quad \rightsquigarrow \quad t^2 y(t) = t_0^2\, y(t_0) + \int_{t_0}^{t} 4s^3\, ds$$

$$y(t) = \frac{1}{t^2}\left[t_0^2\, y(t_0) + (t^4 - t_0^4) \right]$$

$$= C t^{-2} + t^2$$

با جایگذاری $y(1) = 2$ خواهیم داشت $y(t) = t^2 + t^{-2}$

نکته - شرط پیوستگی ضرایب p و q لازم است نه کافی. یعنی ممکن است ضرایب ناپیوسته باشند و لی معادله کماکان جوابی داشته باشد در یک بازه بزرگتر.

مثال - معادله $y' + \frac{1}{1-t} y = 0$ با شرط اولیه $y(0) = 1$.

$p(t) = \frac{1}{1-t}$ در بازه $(0, \infty)$ پیوسته است. اما $y(t) = 1 - t$ جواب معادله در بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

معادلات جداپذیر :

یادآوری : برای حل $y' + p(t)y = 0$ معادله را به صورت $\frac{y'}{y} = -p(t)$ نوشتیم.
از آنجا که $\frac{d}{dt} \ln|y| = \frac{y'}{y}$ توانستیم معادله را ساده کنیم و سپس حل کنیم.

این ایده کمک می‌کند که شکل کلی‌تری از معادلات که به صورت $y' + p(t)f(y) = 0$ هستند را حل کنیم.

$$\frac{y'}{f(y)} = -p(t)$$

اگر تابع $F(y)$ وجود داشته باشد که

$$F'(y) = \frac{1}{f(y)}$$

آنگاه بنا بر قاعده زنجیره‌ای مشتق

$$\frac{d}{dt}\left(F(y)\right) = F'(y) \cdot y' = \frac{y'}{f(y)} = -p(t)$$

$$\rightsquigarrow \quad F(y(t)) = F(y(t_0)) - \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$$

مثال -

$$y(0) = -1 \,،\quad \frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 - 4t + 2}{2(y-1)}$$

$$f(y) = \frac{1}{2(y-1)} \,,\quad p(t) = 3t^2 - 4t + 2$$ درواقع

$$2(y-1)\,y' = 3t^2 - 4t + 2$$

$$(y-1)^2 = t^3 - 2t^2 + 2t + C$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow (-2)^2 = C$$

$$\rightsquigarrow \quad y(t) = 1 \pm \left[t^3 - 2t^2 + 2t + 4\right]^{1/2}$$

← فقط علامت "-" قابل قبول است (به علت شرط اولیه $y(0)=-1$)

اگر بتوانیم یک معادله دیفرانسیل را به صورت

$$y' g(y) = p(t)$$

ساده کنیم که یک طرف تساوی تنها به متغیر t وابسته است و سمت دیگر به y،

آن معادله را جداپذیر می‌نامیم.

$$G(y) = \int^{y} g(u)\, du \quad , \quad P(t) = \int^{t} p(s)\, ds$$

در نتیجه جواب در رابطه $G(y) = P(t)$ صدق می‌کند.

* معادله $g(y)\frac{dy}{dt} = p(t)$ را می‌توان به صورت $g(y)dy = p(t)\,dt$ نوشت و با محاسبه تابع اولیه برای $p(t)$ و $g(y)$ معادله را حل کرد.

معادلات دیفرانسیل

جلسه سوم ۹۸/۷/۶

معادله جداپذیر :

مثال ۱ $\frac{dy}{dt} = 1+y^2$ ، $y(0)=0$

$$\frac{dy}{1+y^2} = dt$$

$$G(y) = \int^{y} \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} y \implies \tan^{-1} y = t + C$$

$$\implies y(t) = \tan(t+C)$$

$$0 = y(0) = \tan C \implies C=0 \ , \ \boxed{y(t) = \tan t}$$

مثال ۲ $\frac{dy}{dt} = 1+y^2$ ، $y(0)=1$ $\implies C = \pi/4 + k\pi$

$$\boxed{y(t) = \tan(t + \pi/4)}$$

مثال ۳

$$y(0)=1 \;,\; yy' + (1+y^2)\sin t = 0$$

$$\int^{y} \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int^{t} -\sin t \, dt$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \cos t + c$$

$$y(0)=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln 2 = 1 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln 2 - 1$$

$$\ln(1+y^2) = 2\cos t + \ln 2 - 2$$

$$y(t) = \pm\left(-1 + \exp\left[2\cos t + \ln 2 - 2\right]\right)^{1/2}$$

با توجه به شرط اولیه فقط علامت "+" قابل قبول است

مثال ۴ معادله $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y-4t}{t-y}$ جداپذیر نیست. ولی با یک تغییر متغیر می‌توان آن را جداپذیر کرد.

اگر قرار دهیم $y(t) = t\,z(t)$

$$\frac{dy}{dt} = z + t\frac{dz}{dt} = \frac{y-4t}{t-y} = \frac{tz-4t}{t-tz} = \frac{z-4}{1-z}$$

$$t\frac{dz}{dt} = \frac{z-4}{1-z} - z = \frac{z^2-4}{1-z}$$

$$\Rightarrow \frac{1-z}{z^2-4}\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\int \frac{1-z}{z^2-4}\,dz = \int \frac{-1/4}{z-2} + \frac{-3/4}{z+2}\,dz = -\tfrac{1}{4}\ln|z-2| - \tfrac{3}{4}\ln|z+2|$$

$$-\frac{1}{4}\ln|z-2|-\frac{3}{4}\ln|z+2| = \ln t + C_0$$

$$|z-2|^{1/4}\,|z+2|^{3/4} = \frac{c}{t}$$

نکته - اگر معادله دیفرانسیل به صورت $\frac{dy}{dt} = F(y/t)$ باشد، همیشه با تغییر متغیر $z = y/t$

می‌توان به یک معادله جداپذیر رسید.

مثال
$$y' = \frac{y^2 + 2ty}{t^2}$$

$y = tz$ $\qquad$ $z + tz' = z^2 + 2z$

$$\frac{z'}{z^2+z} = \frac{1}{t} \Rightarrow \ln\left|\frac{z}{1+z}\right| = \ln t + C_0$$

$$\left|\frac{z}{1+z}\right| = C_1 t$$

مثال ۶

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2y - t + 5}{2t - y - 4}$$

$$\begin{cases} y = Y - \alpha \\ t = T - \beta \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dT} = \frac{dy}{dt} = \frac{2(Y-\alpha) - (T-\beta) + 5}{2(T-\beta) - (Y-\alpha) - 4} = \frac{2Y - T - 2\alpha + \beta + 5}{2T - Y - 2\beta + \alpha - 4}$$

α و β را پیدا می‌کنیم به طوری که

$$\alpha = 2, \beta = -1 \Longleftarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta + 5 = 0 \\ -2\beta + \alpha - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dT} = \frac{2Y - T}{2T - Y} \Longrightarrow Y = TZ \qquad Z + T\frac{dZ}{dT} = \frac{2Z - 1}{2 - Z}$$

$$T\frac{dz}{dT} = \frac{2z-1}{2-z} - z = \frac{z^2-1}{2-z}$$

$$\int \frac{2-z}{z^2-1}\,dz = \int \frac{1/2}{z-1} - \frac{3/2}{z+1}\,dz$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{(z+1)^3}\right| = \ln T + C_0$$

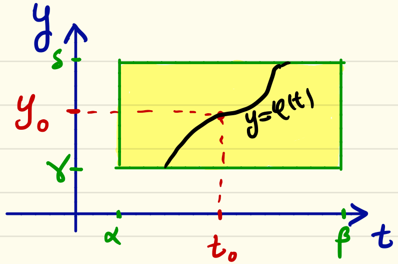
$$\left|\frac{z-1}{(z+1)^3}\right| = C_1 T^2$$

$$z = \frac{Y}{T} = \frac{y(t)+2}{t-1}$$

تذکر: تغییر متغیرهای مختلفی وجود دارند که یک معادله جدا ناپذیر را به یک معادله جداپذیر تبدیل می‌کنند.
برای نمونه به تمرینهای کتاب در این بخش مراجعه شود.

نکته- معادلات جداپذیر در حالت کلی به صورت $y' = g(y)p(t)$ هستند که در رده معادلات غیرخطی
که به صورت کلی $y' = f(t,y)$ نمایش داده می‌شوند. قضیه وجود و یکتایی جواب برای معادلات خطی
که در جلسه قبل بیان شد، اینجا صادق نیست. یک نسخه ضعیف‌تر از آن قضیه به صورت زیر است که در جلسات
بعد اثبات خواهیم کرد.

قضیه: اگر توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل $\alpha < t < \beta$ و $\gamma < y < \delta$ پیوسته باشند، آنگاه
برای هر نقطه (t_0, y_0) در این مستطیل بازه $t_0 - h < t < t_0 + h$ در داخل $\alpha < t < \beta$ وجود دارد که
معادله $y' = f(t,y)$ با شرط اولیه $y(t_0) = y_0$ دارای جواب یکتا است.



توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل روبرو پیوسته هستند

$\Downarrow$

تابع $y=\varphi(t)$ وجود دارد که $\varphi(t_0)=y_0$

و در معادله $y'=f(t,y)$ صدق می‌کند.

نکته - اگر $f(t,y)=q(t)-p(t)y$ شرط برقراری قضیه قبل پیوستگی ضرایب $p(t)$ و $q(t)$ است. هرچند در این حالت معادله خطی $y'+p(t)y=q(t)$ را داریم که در جلسه قبل گفته تا زمانی که ضرایب پیوسته باشند جواب معادله تعریف می‌شود. یعنی باید دانسته تعریف جواب بازه (α,β) باشد، در حالی که قضیه بالا چنین تضمینی را نمی‌دهد و بیان می‌دارد که تنها در یک همسایگی t_0 جواب تعریف شده است.

مثال حل شده - $\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2-4t+2}{2(y-1)}$ ، $y(0)=-1$

که جواب آن برابر است با $y(t) = 1-\left[t^3-2t^2+2t+4\right]^{1/2}$

توابع $f(t,y) = \frac{3t^2-4t+2}{2(y-1)}$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3t^2-4t+2}{-2(y-1)^2}$ در مستطیل $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,1)$

پیوسته هستند. جواب به دست آمده برای این معادله در بازه $(t_0,+\infty)$ تعریف شده است که $-1<t_0<0$.

مثال ۱ و ۲ این مطلب: $\frac{dy}{dt} = 1+y^2 = f(t,y)$

$f\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته هستند. دامنه تعریف جواب با شرط اولیه $y(0)=0$

بازه $(-\pi/2\,,\pi/2)$ است و با شرط اولیه $y(0)=1$ بازه $(-3\pi/4\,,\pi/4)$ است.

نکته - برای وجود جواب تنها پیوستگی f کافی است، هرچند یکتایی را نتیجه نمی‌دهد. برای اثبات یکتایی جواب شرط پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial y}$ ضروری است.

مثال - معادله $y' = y^{1/3}$ با شرط اولیه $y(0)=0$ بی‌نهایت جواب دارد.

$y(t)=(\frac{2}{3}t)^{3/2}$ ، $y(t)\equiv 0$ و $y(t)=-(\frac{2}{3}t)^{3/2}$ جوابهای این معادله هستند. در این معادله

$f(t,y)=y^{1/3}$ پیوسته است، اما $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{3}y^{-2/3}$ در $y=0$ پیوسته نیست. (بررسی کنید که اگر به روش معادلات جداپذیر این معادله را حل کنیم، چرا لزوماً به جواب یکتا نمی‌رسیم!)

معادلات دیفرانسیل

جلسه چهارم ۹۸/۷/۸

مدلسازی :

بانک A : سود سالانه = R ،

اگر P_0 پول سرمایه‌گذاری اولیه باشد ،

$$P_1 = P_0(1+R)$$ سرمایه پس از سال اول

$$P_2 = P_1(1+R) = P_0(1+R)^2$$ 〃 〃 〃 دوم

$$P_n = P_0(1+R)^n$$ 〃 〃 〃 n-ام

بانک B : سود شش‌ماهه = $R/2$

اگر Q_n سرمایه در سال n-ام باشد

$$Q_{1/2} = Q_0(1+R/2)$$ سرمایه بعد از شش ماه

$$Q_1 = Q_0(1+R/2)^2 \ , \ \dots \ , \ Q_n = Q_0(1+R/2)^{2n}$$

بانک C : k بار در سال سود R/k پرداخت کند و اگر S_n سرمایه بعد از n سال باشد

$$S_n = S_0 \left(1+\frac{R}{k}\right)^{kn} \xrightarrow{\lim_{k\to\infty}} S_0 e^{Rn}$$

تابع $S(t) = S_0 e^{Rt}$ در معادله دیفرانسیل $\frac{dS}{dt} = RS$ صدق می‌کند.

مدل جمعیت :

اگر $P(t)$ جمعیت در زمان t باشد و در واحد زمان جمعیت $(1+R)$ برابر شود ، پارامتر R را نرخ رشد جمعیت می‌نامیم . در این صورت مدل تئوری برای پیش‌بینی جمعیت

$$\frac{dP}{dt} = RP \longrightarrow \text{مدل رشد خطی}$$

است . جواب این معادله $P(t) = P(0)e^{Rt}$ است که نشان می‌دهد جمعیت با یک تابع نمایی رشد می‌کند.

مثال- فرض کنید یک جمعیت با نرخ رشد خطی R تغییر می‌کند و به طور متوسط در واحد زمانی K نفر مهاجرت می‌کنند (به داخل یا بیرون)

محاسبه عدد K را تعیین کنید به طوری که جمعیت بعد از T (واحد زمان) برابر P_T باشد. (جمعیت اولیه P_0 است.)

$$\text{جمعیت در زمان } t+\Delta t = P(t+\Delta t) = P(t) + \underbrace{\underbrace{RP(t)}_{\text{میزان تولید مثل در واحد زمان}}\cdot \Delta t}_{\text{میزان تولید مثل در فاصله زمانی } \Delta t} + \underbrace{K\Delta t}_{\text{میزان مهاجرت}}$$

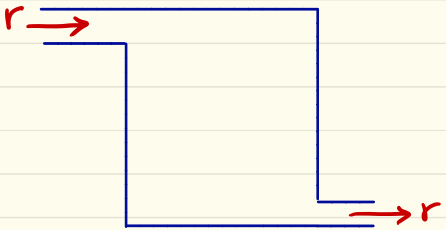
$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = RP(t) + K$$

وقتی $\Delta t \to 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = RP + K \\ P(0) = P_0 \end{cases} \Rightarrow P(t) = P_0 e^{Rt} + \frac{K}{R}\left(e^{Rt} - 1\right)$$

مقدار K را تعیین می‌کنیم به طوری که

$$P_0 e^{RT} + \frac{K}{R}\left(e^{RT} - 1\right) = P_T$$



مثال- ۲ = نرخ ورودی و خروجی آب از ظرف (لیتر بر دقیقه)

$\frac{1}{4}$ = غلظت نمک آب ورودی

Q_0 = مقدار نمک اولیه

۱۰۰۰ لیتر حجم آب داخل ظرف

فرض: با یک همزن همیشه غلظت نمک در ظرف یکنواخت است.

سؤال: بعد از چه مدت مقدار نمک داخل ظرف نصف می‌شود؟

$Q(t)$ = مقدار نمک داخل ظرف

$$Q(t+\Delta t)-Q(t)=\underbrace{\frac{2}{4}\Delta t}_{\text{مقدار نمک اضافه شده}}-\underbrace{\frac{Q}{1000}}_{\text{غلظت نمک در جریان خروجی}}\underbrace{2\Delta t}_{\text{مقدار آب نمک خارج شده}}$$

$$\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t} = \frac{r}{4} - \frac{rQ(t)}{1000} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{dQ}{dt} = r/4 - \frac{rQ}{1000}$$

$$\frac{d}{dt}(\mu Q) = \mu Q' + \frac{r\mu Q}{1000} = \frac{r\mu}{4}$$

$$\Rightarrow \mu' = \frac{r\mu}{1000} \Rightarrow \mu(t) = e^{\frac{r}{1000}t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{r}{1000}t} Q\right] = \frac{r}{4} e^{\frac{r}{1000}t}$$

$$\int_0^t \Longrightarrow e^{\frac{rt}{1000}} Q(t) - Q_0 = 250\left(e^{\frac{r}{1000}t} - 1\right)$$

$$Q(t) = e^{-\frac{rt}{1000}} Q_0 + 250\left(1 - e^{-\frac{rt}{1000}}\right)$$

از معادله $Q(t) = \frac{1}{2} Q_0$ مقدار t را پیدا می‌کنیم. از رابطه بالا نتیجه می‌شود که $\lim_{t \to \infty} Q(t) = 250$ و اگر $Q_0 \geq 500$ چنین t ای وجود دارد.

مدل رشد جمعیت :

<u>رشد خطی</u> $\quad \dfrac{dP}{dt} = rP$.

اگر $r>0$ جمعیت افزایشی است و اگر $r<0$ جمعیت کاهشی است.

در حالت $r<0$ ، $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = 0$

<u>مدل لجستیک</u> : نرخ رشد جمعیت تابعی از جمعیت است.

$$\frac{dP}{dt} = f(P)\cdot P$$

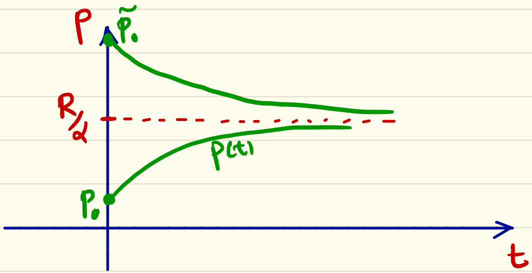
$f(P)$ نرخ رشد جامعه است وقتی جمعیت برابر P است. در مدل لجستیک فرض می‌کنیم نرخ رشد به صورت خطی کاهش پیدا کند. یعنی $f(P) = R - \alpha P$

$$\frac{dP}{dt} = (R - \alpha P)\, P$$

$$\left| \frac{P(t)}{R - \alpha P(t)} \right| = c\, e^{Rt} \Rightarrow P(t) = \frac{R P_0}{\alpha P_0 + (R - \alpha P_0) e^{-\alpha t}}$$

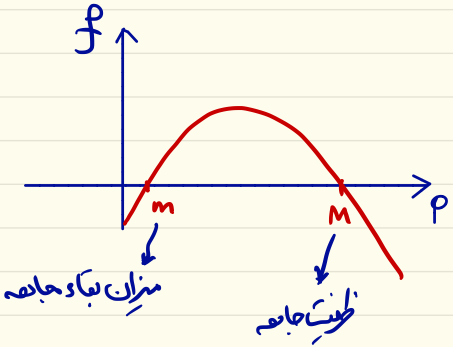
با فرض $R>0$ وقتی $t \to \infty$ مقدار جمعیت به R/α همگرا خواهد شد.

مقدار $\frac{R}{\alpha}$ ظرفیت کل جامعه تعبیر می‌شود.



مدل دیگر: نرخ رشد را تابعی غیرخطی از جمعیت بگیریم، مثلاً

Allee-effect $$f(p) = a\left(1-\frac{p}{M}\right)\left(\frac{p}{m}-1\right)$$



$$\frac{dp}{dt} = \underbrace{a\left(1-\frac{p}{M}\right)\left(\frac{p}{m}-1\right)p}_{f(p)p}$$

تمرین - جواب مدل بالا را پیدا کنید

نمودارهای سبز جواب‌های $(t,P(t))$ را برای نقاط آغازینِ متفاوت نشان می‌دهد.

اگر $P_0 < m$ ، جمعیت به صفر میل می‌کند (منقرض می‌شود) و اگر $P_0 > m$ جمعیت به ظرفیتِ جامعه، M، همگرا خواهد شد.

معادلات دیفرانسیل

جلسه پنجم ۹۸/۷/۱۳

معادلات دقیق :

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi(t,y)\right) = 0$$

مقدار ثابت $\varphi(t,y) = C$

$$\varphi_t + \varphi_y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

مثال - $1 + \cos(t+y) + \cos(t+y)\frac{dy}{dt} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left[t + \sin(t+y)\right] = 0 \longleftrightarrow 1 + \cos(t+y) + \cos(t+y)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$t + \sin(t+y) = C$$

تعریف - معادله دیفرانسیل مرتبه اول $M(t,y)+N(t,y)y'=0$ دقیق (Exact) است اگر به صورت $\frac{d}{dt}\left(\varphi(t,y)\right) = 0$ نوشته شود، یعنی

$$M(t,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\ , \quad N(t,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

نکته - برای تشخیص معادله دقیق $M+Ny'=0$ باید

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}.$$

قضیه: اگر $M(t,y)$ و $N(t,y)$ پیوسته باشند و مشتقات آن نسبت به t و y در مستطیل $a<t<b$ و $c<y<d$ پیوسته باشند. در این صورت معادله دیفرانسیل $M(t,y)+N(t,y)y'=0$ دقیق است اگر و تنها اگر $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$ در این مستطیل.

از تعریف معادله دقیق باید داشته باشیم $M=\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ پس

$$\varphi(t,y)=\int^t M(s,y)\,ds+h(y)$$

تابع h را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که رابطه $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=N$ برقرار باشد، یعنی

$$N=\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\int^t \frac{\partial M}{\partial y}\,ds+h'(y)$$

بنابر فرض تضمین $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ درنتیجه باید تابع $h(y)$ را پیدا کنیم به طوری که

$$N - \int^{t} \frac{\partial N}{\partial t}(s,y)\,ds = h'(y)$$

سمت چپ تساوی بالا تابعی از y است (زیرا مشتق سمت چپ نسبت به t برابر صفر است.)

بنابراین می‌توانیم تابع $h(y)$ را پیدا کنیم.

مثال - $\underbrace{(y\cos t + 2te^{y})}_{M} + \underbrace{(\sin t + t^{2}e^{y} - 1)}_{N}y' = 0$ ، $y(0) = 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos t + 2te^{y} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \cos t + 2te^{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \implies$$ معادله دقیق است.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = M \Rightarrow \varphi(t,y) = \int^{t} M \, dt + h(y)$$

$$= \int (y\cos t + 2te^{y}) \, dt + h(y)$$

$$= y\sin t + t^{2}e^{y} + h(y)$$

$$N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \sin t + t^{2}e^{y} - 1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin t + t^{2}e^{y} + h'(y)$$

$$\Rightarrow h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y$$

معادله به صورت زیر ساده می‌شود :

$$\frac{d}{dt}\Big[\overbrace{y\sin t + t^{2}e^{y} - y}^{\varphi(t,y)}\Big] = 0$$

$$\boxed{y\sin t + t^{2}e^{y} - y = C} \xrightarrow{y(0)=1} C = -1$$

مثال - $\underbrace{(3y+e^t)}_{M} + \underbrace{(3t+\cos y)}_{N}\frac{dy}{dt} = 0$ ، $y(0)=0$

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad , \quad N = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$M_y = 3 \quad , \quad N_t = 3 \Longrightarrow M_y = N_t \Longrightarrow$ معادله دقیق است.

راه اول: $M = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Longrightarrow$

$$\varphi(t,y) = \int^t M\,dt + h(y)$$

$$= 3yt + e^t + h(y)$$

$$\Longrightarrow N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3t + h'(y) \Longrightarrow h'(y) = \cos y \Longrightarrow h(y) = \sin y$$

$$\Longrightarrow \varphi(t,y) = 3yt + e^t + \sin y = c \xrightarrow{y(0)=0} c = 1$$

راه‌حل دوم:

$$N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Leftarrow$$

$$\varphi(t,y) = \int N\,dy + g(t)$$

$$= \int (3t + \cos y)\,dy + g(t) = 3ty + \sin y + g(t)$$

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 3y + g'(t) \implies g'(t) = e^t \implies g(t) = e^t$$

$$\implies \varphi(t,y) = 3ty + \sin y + e^t$$

راه‌حل سوم:

$$N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \implies \varphi(t,y) = \int N\,dy + g(t) = 3ty + \sin y + g(t)$$

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \implies \varphi(t,y) = \int M\,dt + h(y) = 3yt + e^t + h(y)$$

$$\implies 3yt + \sin y + g(t) = 3yt + e^t + h(y) \implies \begin{cases} h(y) = \sin y \\ g(t) = e^t \end{cases}$$

عامل انتگرال‌گیری: ممکن است معادله $M + Ny' = 0$ دقیق نباشد ولی با ضرب در یک تابع $\mu = \mu(t,y)$ به یک معادله دقیق تبدیل شود.

$$M + Ny' = 0 \text{ دقیق نیست } \Longrightarrow M_y \neq N_t$$

$$(\mu M) + (\mu N) y' = 0 \text{ دقیق است } \Longrightarrow (\mu M)_y = (\mu N)_t$$

$$\Rightarrow \mu_y M + \mu M_y = \mu_t N + \mu N_t$$

$$\Rightarrow M \mu_y - N \mu_t = \mu (N_t - M_y) \quad (*)$$

با فرض‌های ساده‌سازی، سعی می‌کنیم معادله $(*)$ را حل کنیم و تابع μ را پیدا کنیم.

حالت اول: μ تابعی از t است. $\Leftarrow$ $\mu_y = 0$.

$$-N\mu_t = \mu(N_t - M_y)$$

$$\frac{\mu_t}{\mu} = \frac{M_y - N_t}{N}$$

در این حالت باید $\dfrac{M_y - N_t}{N}$ تابعی از t باشد.

حالت دوم: μ تابعی از y است. $\Leftarrow$ $\mu_t = 0$

معادله (*) $\Longrightarrow$ $M\mu_y = \mu(N_t - M_y) \Longrightarrow \dfrac{\mu_y}{\mu} = \dfrac{N_t - M_y}{M}$

در این حالت $\dfrac{N_t - M_y}{M}$ باید تابعی از y باشد.

حالت سوم: μ تابعی از $y+t$ است.

$$\mu_t=\mu'(y+t)=\mu_y \Leftarrow \mu=\mu(y+t)$$

$$\mu'(M-N)=\mu(N_t-M_y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu}=\frac{N_t-M_y}{M-N}$$

در این حالت باید $\frac{N_t-M_y}{M-N}$ تابعی از $y+t$ باشد.

مثال- $\left(\frac{y^2}{2}+2ye^t\right)+\left(y+e^t\right)y'=0$

$$\underbrace{\left(\frac{y^2}{2}+2ye^t\right)}_{M}+\underbrace{\left(y+e^t\right)}_{N}y'=0$$

$M_y=y+2e^t \quad , \quad N_t=e^t \Rightarrow M_y\neq N_t \Rightarrow$ معادله دقیق نیست

$$\frac{M_y-N_t}{N}=\frac{(y+2e^t)-e^t}{y+e^t}=1 \Rightarrow$$ تابعی از t است.

با عامل انتگرال‌گیری $\mu=\mu(t)$ که $\dfrac{\mu_t}{\mu}=1$ می‌توان معادله را دقیق کرد.

$$\Rightarrow \mu = e^t \Rightarrow (Me^t) + (Ne^t)y' = 0$$

دقیق است.

$$(Me^t)_y = (Ne^t)_t$$

$$Me^t = \frac{\partial}{\partial t}\varphi \Rightarrow \varphi(t,y) = \int Me^t\,dt + h(y)$$

$$= \int \left(\frac{y^2}{2} + 2ye^t\right)e^t\,dt + h(y)$$

$$= \frac{y^2}{2}e^t + ye^{2t} + h(y)$$

$$Ne^t = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = ye^t + e^{2t} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = \text{ثابت}$$

مثال- $\underbrace{(3ty+y^2)}_{M}+\underbrace{(t^2+ty)}_{N}y'=0$

$M_y=3t+2y \quad , \quad N_t=2t+y \quad , \quad 0\neq M_y-N_t=t+y$

$\frac{M_y-N_t}{N}=\frac{1}{t}$ تابعی از t است. پس عامل انتگرال‌ساز به صورت $\mu=\mu(t)$ در رابطه $\frac{\mu'}{\mu}=\frac{1}{t}$ صدق می‌کند.

$$\Rightarrow \quad \ln\mu=\ln t \quad \Rightarrow \quad \mu(t)=t$$

$$tM=\varphi_t \quad , \quad tN=\varphi_y$$

$$\Rightarrow \varphi(t,y)=\int (tN)\,dy+g(t)=t^3y+\frac{1}{2}t^2y^2+g(t)$$

$$\Rightarrow tM=\varphi_t=3t^2y+ty^2+g'(t) \quad \Rightarrow \quad g'=0$$

$$\varphi(t,y)=t^3y+\frac{1}{2}t^2y^2=C$$ مقدار ثابت

نکته ـ عامل انتگرالگیری لزوماً یکتا نیست و لزوماً از سه حالتی که گفته شد به دست نمی‌آید. بلکه یک عامل انتگرالگیری تنها باید در رابطه $(*)$ صدق می‌کند. به عنوان مثال در مثال قبل تابع $\mu(t,y)=\dfrac{1}{ty(2t+y)}$ نیز یک عامل انتگرالگیری است که در سه حالت خاصی که مطرح شد صدق نمی‌کند.

تمرین ـ با فرض $\mu=\mu(yt)$ معادله $(*)$ با چه شرطی قابل حل است. سعی کنید یک معادله دیفرانسیل مثال بزنید که با این نوع عامل انتگرالگیری دقیق شود.

مثال ـ $\underbrace{1}_{M}+\underbrace{\left(\frac{t}{y}-\sin y\right)}_{N}y'=0$

$M_y=0\,,\quad N_t=\frac{1}{y}\,,$

$\dfrac{N_t-M_y}{M}=\dfrac{1}{y}$ تابعی از y است و

$\mu(y)=y \Leftarrow \dfrac{\mu'}{\mu}=1/y$

$$\varphi_t = yM \Rightarrow \varphi(t,y) = ty + h(y)$$

$$\varphi_y = yN \Rightarrow t + h'(y) = t - y\sin y \Rightarrow h(y) = -y\cos y + \sin y$$

$$\Rightarrow ty - y\cos y + \sin y = C$$

حل – $\underbrace{(2y+t)}_{M} - \underbrace{(2t+y)}_{N} y' = 0$

$M_y = 2, \quad N_t = -2 \Rightarrow \quad \dfrac{N_t - M_y}{M - N} = \dfrac{-4}{3(y+t)}$ تابع از $y+t$ است و

$$\mu(z) = z^{-4/3} \Leftarrow \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{-4/3}{z} \Leftarrow \frac{\mu'(y+t)}{\mu(y+t)} = \frac{-4/3}{y+t}$$

$$(y+t)^{-4/3} M = \varphi_t , \quad (y+t)^{-4/3} N = \varphi_y$$

$$\varphi(y,t) = \int (y+t)^{-4/3} M \, dt + h(y)$$

$$= \int (y+t)^{-4/3} (2y+t) \, dt + h(y) = \int y(y+t)^{-4/3} + (y+t)^{-1/3} \, dt + h(y)$$

$$= \frac{y(y+t)^{-1/3}}{-1/3} + \frac{(y+t)^{2/3}}{2/3} + h(y)$$

$$\underbrace{(y+t)^{-4/3} N}_{-(2t+y)(y+t)^{-4/3}} = \varphi_y = \frac{(y+t)^{-1/3}}{-1/3} + y(y+t)^{-4/3} + (y+t)^{-1/3} + h'(y)$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h = \text{ثابت}$$

$$\boxed{-3y(y+t)^{-1/3} + \tfrac{3}{2}(y+t)^{2/3} = C \quad \text{ثابت}}$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه ششم ۹۸/۷/۱۵

قضیه وجود و یکتایی جواب :

$$(DE) \qquad y' = f(t,y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

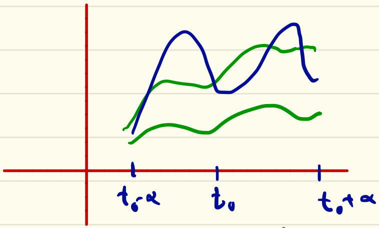
$$\Longrightarrow \int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$$

$$(IE) \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$$

اگر $y(t)$ تابع مشتق‌پذیری که در معادله (DE) صدق می‌کند، آنگاه (IE) نیز برقرار است.

به عکس اگر $y(t)$ تابعی پیوسته باشد که در (IE) صدق می‌کند، آنگاه بنا بر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، y تابعی مشتق‌پذیر است که جواب (DE) است.

$$\mathcal{L}[y](t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$



$C[t_0-\alpha, t_0+\alpha] =$ فضای توابع پیوسته روی بازه $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$

هر نمودار یک عضو دامنه $\mathcal{L}$ هستند.

در واقع $\mathcal{L}$ یک نمودار را به نمودار دیگری تبدیل می‌کند.

$$\mathcal{L}: C[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \longrightarrow C[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$$

مثال- $f(t,y) = y$ ، $t_0=0, y_0=1$ (در واقع داریم معادله $y'=y$ با شرط اولیه $y(0)=1$ را حل می‌کنیم)

$$\mathcal{L}[y](t) = 1 + \int_0^t y(s)\, ds$$

به عنوان مثال برای تابع ثابت $z(t) \equiv 1$ داریم:

$$\mathcal{L}[z](t) = 1 + \int_0^t \underbrace{z(s)}_{1}\, ds = 1 + t$$

همچنین برای تابع $u(t) \equiv t$ ،

$$\mathcal{L}[u](t) = 1 + \int_0^t u(s)\,ds = 1 + \frac{1}{2}t^2$$

برای حل (IE) نشان می‌دهیم برای مقدار ثابت $\alpha > 0$ ، عملگر $\mathcal{L}$ یک نقطه ثابت دارد یعنی تابع $y \in C[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ پیدا می‌شود که

$$\mathcal{L}[y] = y$$

ایده اثبات وجود نقطه ثابت $\longleftarrow$ روش تقریب‌های متوالی

$$y_{n+1}(t) = \mathcal{L}[y_n](t)$$ تعریف می‌کنیم

و نشان می‌دهیم دنباله توابع $\{y_n\}$ همگراست.

مثال- $y' = y$ ، $y(0) = 1$ ،

معادله انتگرالی آن به صورت زیر است.

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s)\,ds = \mathcal{L}[y](t)$$

$$y_0(t) \equiv 1 \Rightarrow y_1(t) = \mathcal{L}[y_0](t) = 1 + t$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}[y_1](t) = 1 + \int_0^t y_1(s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$y_3(t) = \mathcal{L}[y_2](t) = 1 + \int_0^t y_2(s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$$

$$y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \longrightarrow y(t) = e^t$$

مثل - $y' = 2t(1+y)$ ، $y(0) = 0$

$$y(t) = \int_0^t 2s\,(1+y(s))\,ds = \mathcal{L}[y](t)$$

$$y_0(t) \equiv 0 \Rightarrow y_1(t) = \mathcal{L}[y_0](t) = \int_0^t 2s\,ds = t^2$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}[y_1](t) = \int_0^t 2s\,(1+s^2)\,ds = t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$y_3(t) = \mathcal{L}[y_2](t) = \int_0^t 2s\left(1+s^2+\frac{s^4}{2}\right) ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}$$

$$y_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!} \longrightarrow y(t) = e^{t^2} - 1$$

مثال- $y' = y^2 \quad , \quad y(0) = 1$

$$y(t) = 1 + \int_0^t (y(s))^2 \, ds$$

$$y_0(t) \equiv 1 \Rightarrow y_1(t) = \mathcal{L}[y_0](t) = 1 + t$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}[y_1](t) = 1 + \int_0^t (1+s)^2 \, ds = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}$$

$$y_3(t) = \mathcal{L}[y_2](t) = 1 + \int_0^t \left(1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3}\right)^2 ds$$

$$= 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2t^4}{3} + \frac{t^5}{3} + \frac{t^6}{9} + \frac{t^7}{63}$$

$$y_n(t) \longrightarrow y(t) = 1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t}$$

همگرایی فوق در بازه $-1 < t < 1$ برقرار است.

قضیه: توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل

$$R=\{(t,y): |t-t_0|\le a \,,\ |y-y_0|\le b\}$$

پیوسته هستند. اگر $M=\max\limits_{(t,y)\in R}|f(t,y)|$ و $\alpha=\min(a,\frac{b}{M})$

آنگاه معادله $y'=f(t,y)$ با شرط اولیه $y(t_0)=y_0$ دارای جواب یگانه‌ای

در بازه $|t-t_0|\le\alpha$ است.

مثال ـ معادله $y'=y$ ، $y(0)=1$. تابع $f(t,y)=y$ در مستطیل $R=[-a,a]\times[1-b,1+b]$

به ازای هر a و b دلخواه پیوسته است همچنین $\frac{\partial f}{\partial y}$. از طرفی $M=\max\limits_{R}|f|=1+b$

قضیه فوق نشان می‌دهد که این معادله دارای جواب یکتا در بازه $t\in[-\alpha,\alpha]$ است که $\alpha=\min(a,\frac{b}{1+b})$.

چون a و b دلخواه هستند، α هر عدد کوچکتر از یک می‌تواند باشد. (هر چند جواب این معادله برای $t \in \mathbb{R}$ وجود دارد ولی از قضیه تنها برای بازه $t \in (-1,1)$ می‌توان وجود جواب را نتیجه گرفت.)

مثال - $y' = 2t(1+y)$ ، $y(0) = 0$

$f(t,y) = 2t(1+y)$ ، $R = [-a,a] \times [-b,b]$

f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در R پیوسته هستند.

$$M = \max_R |f| = 2a(1+b)$$

بنابر قضیه معادله جواب یکتا در بازه $t \in [-\alpha,\alpha]$ دارد که

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{2a(1+b)}\right) \leq \min\left(a, \frac{1}{2a}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

جواب این معادله برای $-\infty < t < +\infty$ تعریف می‌شود ولی قضیه فوق برای $|t| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ وجود جواب را اثبات می‌کند.

مثال ـ $y' = y^2$ ، $y(0) = 1$.

$f(t,y) = y^2$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ پیوسته هستند. $R = [-a, a] \times [-b+1, 1+b]$

$$M = \max_R |f| = (1+b)^2$$

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{(1+b)^2}\right)$$

چون a و b می‌توانند دلخواه باشند و $\frac{b}{(1+b)^2} \leq 1/4$ درنتیجه $\alpha \leq 1/4$.

قضیه وجود و یکتایی جواب نشان می‌دهد که جواب معادله دیفرانسیل در بازه $|t| \leq 1/4$ وجود دارد. (هرچند می‌دانیم برای $|t| < 1$ جواب تعریف شده است.)

اگر همین معادله را برای شرط اولیه $y(0) = 2$ بررسی کنیم، خواهیم داشت $\alpha \leq \frac{1}{8}$. (چرا؟)

معادلات دیفرانسیل

جلسه هفتم ۹۸/۷/۲۰

قضیه وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول:

توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل $R=\{(t,y): |t-t_0|\leq a \ , \ |y-y_0|\leq b\}$

پیوسته هستند. اگر $M=\max\limits_{(t,y)\in R}|f(t,y)|$ و $\alpha=\min(a,\frac{b}{M})$

آنگاه معادله $y'=f(t,y)$ با شرط اولیه $y(t_0)=y_0$ دارای جواب یگانه‌ای

در بازه $|t-t_0|\leq\alpha$ است.

اثبات - $y(t)$ جواب معادله $y'=f(t,y)$ است $\Longleftarrow$

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds =: \mathcal{L}[y](t)$$

دنباله توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y_0(t)\equiv y_0 ,$$

$$y_{n+1}(t)=\mathcal{L}[y_n](t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))\,ds$$

ادعا: برای $t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$ دنباله $\{y_n(t)\}$ به تابع پیوسته $y(t)$ همگراست.

گام اول: برای هر $|t-t_0|\le\alpha$ نقطه $(t,y_n(t))$ در مستطیل R قرار دارد.

اگر $n=0$ $\Leftarrow$ $y_0(t)\equiv y_0$ و به وضوح $(t,y_0(t))\in R$ برای هر t.

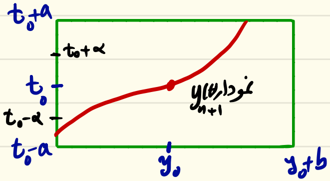
به صورت استقرایی فرض می‌کنیم برای $|t-t_0|\le\alpha$ ، $(t, y_n(t))\in R$ و نشان می‌دهیم $(t, y_{n+1}(t))\in R$

$$|y_{n+1}(t)-y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\,ds\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} M\,ds\right| = M|t-t_0|$$

بنابر فرض استقراء

$$\Rightarrow \quad |y_{n+1}(t)-y_0| \le M|t-t_0| \le M\alpha \le b$$

بنابر تعریف $\alpha=\min(a, \frac{b}{M})$



برای اینکه نشان دهیم $(t, y_{n+1}(t))\in R$ باید داشته باشیم $|t-t_0|\le a$ و $|y_{n+1}(t)-y_0|\le b$

نامساوی دوم را در بالا نشان دادیم. برای نامساوی اول از تعریف α نتیجه می‌شود که

$$|t-t_0|\le\alpha\le a.$$

گام دوم : دنباله $\{y_n(t)\}$ برای $t\in[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ همگرا است.

داریم :
$$y_n(t) = y_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\left[y_{k+1}(t) - y_k(t)\right]$$

در نتیجه نشان می‌دهیم سری $\sum_{k=0}^{\infty}\left(y_{k+1}(t) - y_k(t)\right)$ همگرا است.

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| = \left|\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_k(s))\,ds\right) - \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{k-1}(s))\,ds\right)\right|$$
$$= \left|\int_{t_0}^{t}\left[f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))\right]ds\right|$$

از طرفی اگر $L = \max_{(t,y)\in R}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|$ (چون $\frac{\partial f}{\partial y}$ در R پیوسته است، ماکسیمم به دست می‌آید.)

آنگاه
$$|f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))| \le L\,|y_k(s) - y_{k-1}(s)|$$

(دقت کنید بنا بر گام اول $(s, y_{k-1}(s))$ و $(s, y_k(s))$ هردو در مستطیل R قرار دارند و نامساوی قبل معتبر است.)

در نتیجه:

$$(*) \qquad |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |y_k(s) - y_{k-1}(s)| \, ds \right|$$

ادعا:

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq \frac{1}{(k+1)!} M L^k |t - t_0|^{k+1}$$

- برای $k=0$ از گام اول نتیجه می‌شود:

$$|y_1(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$$

- برای $k=1$، نامساوی $(*)$ را برای $k=1$ بنویسید:

$$k=1 \Rightarrow \quad |y_2(t) - y_1(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0| \, ds \right|$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} M(s - t_0) \, ds = \frac{1}{2} M L (t - t_0)^2$$

حالت $k=0$

$$k=2 \implies |y_3(t)-y_2(t)| \le L\int_{t_0}^{t} |y_2(s)-y_1(s)|\,ds$$

$$\le L\int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}ML(s-t_0)^2\,ds = \frac{1}{6}ML^2(t-t_0)^3$$

درنتیجه به صورت استقرایی نتیجه می شود

$$|y_{k+1}(t)-y_k(t)| \le \frac{1}{(k+1)!}ML^k|t-t_0|^{k+1}$$

حال برای اینکه سری $\sum_{k=0}^{\infty}\left[y_{k+1}(t)-y_k(t)\right]$ همگرا باشد، باید

سری $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}ML^k|t-t_0|^{k+1}$ همگرا باشد که این سری به عدد

$\frac{M}{L}\left[e^{L|t-t_0|}-1\right]$ همگرا است. (بنابر سری تیلور $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$)

در نتیجه تابع $y(t)$ در بازه $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t)$.

گام سوم: نشان می‌دهیم

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$$

$$(**) \quad \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)) \right] ds \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} L \left| y_n(s) - y(s) \right| ds \right|$$

$n \le m$

$$\left| y_n(s) - y_m(s) \right| = \left| \left(y_n(s) - y_{n+1}(s) \right) + \left(y_{n+1}(s) - y_{n+2}(s) \right) + \cdots + \left(y_{m-1}(s) - y_m(s) \right) \right|$$

$$\le \sum_{k=n}^{m-1} \left| y_k(s) - y_{k+1}(s) \right| \le \sum_{k=n}^{m-1} \frac{ML^k}{(k+1)!} |s-t_0|^{k+1}$$

بنابر ادعای اثبات شده در گام دوم.

اکنون m را به بی‌نهایت میل دهید، در نتیجه $y_m(s) \to y(s)$ و

$$\Rightarrow \quad |y_n(s)-y(s)| \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{ML^k}{(k+1)!}\,|s-t_0|^{k+1}$$

حال این نامساوی را در (**) جایگزین کنید.

$$\left|\int_{t_0}^{t}\Big[f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\Big]ds\right| \le \sum_{k=n}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{ML^{k+1}}{(k+1)!}\,|s-t_0|^{k+1}\,ds$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{ML^{k+1}}{(k+2)!}\,(t-t_0)^{k+2} \xrightarrow[\text{وقتی } n\to\infty]{} 0$$

زیرا

$$\frac{M}{L}e^{L|t-t_0|} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{ML^{k-1}}{k!}\,|t-t_0|^{k}$$

خلاصه سه گام قبل: با تعریف دنباله بازگشتی

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds$$

نشان دادیم تابع $y(t)$ وجود دارد که $y_n(t) \longrightarrow y(t)$. اگر از تساوی بالا حد بگیریم

حد سمت چپ $y(t)$ است و گام سوم نشان می‌دهد که حد سمت راست

$$y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

است. در نتیجه تا اینجا نشان داده‌ایم که تابع $y(t)$ در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

برای اینکه تابع $y(t)$ مشتق‌پذیر بوده و در معادله دیفرانسیل صدق کند، لازم است که تابع زیر انتگرال $s \longmapsto f(s, y(s))$ پیوسته باشد.

گام چهارم - (تمرین) تابع $y(t)$ پیوسته است.

در نتیجه از روابط انتگرالی فوق و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می‌شود که y مشتق‌پذیر است و

$$y' = f(t, y(t))$$

گام پنجم (یکتایی جواب) - فرض کنید $y(t)$ و $z(t)$ دو جواب معادله فوق با شرط اولیه

$$y(t_0) = z(t_0) = y_0$$

باشند. در نتیجه

$$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \\ z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, ds \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |y(t)-z(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s,y(s)) - f(s,z(s))\, ds \right|$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |y(s)-z(s)|\, ds$$

سؤال: نامساوی بالا وقتی درست است که $(s,y(s))$ و $(s,z(s))$ در مستطیل R قرار داشته باشند.

چرا چنین فرضی برای $s\in[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ درست است؟

قرار دهید:

$$0 \leq u(t) = \int_{t_0}^{t} |y(s)-z(s)|\, ds$$

از نامساوی بالا نتیجه خواهد شد که:

$$\begin{cases} u'(t) \leq L\, u(t) \\ u(t_0) = 0 \end{cases}$$

نشان می‌دهیم $u(t)\equiv 0$. فرض کنید $0<u(t)$ برای $t\in(t_1,t_2)$ و $u(t)=0$ در $t\in[t_0,t_1]$.

چون $0\leq u(t)$ پس

$$\frac{u'(t)}{u(t)} \leq L \quad \text{for} \quad t\in(t_1,t_2)$$

$\theta\in(t_1,t_2)$ را یک نقطهٔ دلخواه در نظر بگیرید، آنگاه

$$\Rightarrow \int_\theta^t \frac{u'(s)}{u(s)}\,ds \leq \int_\theta^t L\,ds = L(t-\theta)$$

$$\| $$

$$\ln u(t) - \ln u(\theta)$$

$$\Rightarrow \ln\frac{u(t)}{u(\theta)} \leq L(t-\theta) \Rightarrow 0\leq u(t)\leq u(\theta)\,e^{L(t-\theta)}$$

اگر $\theta\to t_1$ نتیجه می‌شود که $u(t)\equiv 0$.

مثال - معادله $y' = t^2 + e^{-y^2}$ با شرط اولیه $y(0)=0$ در بازه $0 \le t \le \frac{1}{2}$

دارای جواب یکتا است و در این بازه داریم: $|y(t)| \le 1$

قرار دهید $f(t,y) = t^2 + e^{-y^2}$. آنگاه در مستطیل $[-a,a]\times[-b,b]$ ، تابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ پیوسته هستند و

$$M = \max_{(t,y)\in R} |f(t,y)| = 1 + a^2$$

بنابر قضیه وجود و یکتائی جواب ، معادله فوق دارای جواب یکتا در بازه $|t| \le \alpha$ است که

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{1+a^2}\right)$$

a و b می‌توانند دلخواه باشند. درنتیجه α هر عددی می‌تواند باشد. یعنی جواب برای هر $-\infty < t < +\infty$ تعریف می‌شود.

از طرفی جواب معادله دیفرانسیل ، در معادله انتگرالی $y(t) = \int_0^t s^2 + e^{-y^2(s)}\, ds$ صدق می‌کند.

درنتیجه برای $0 \le t$ داریم:

$$0 \le y(t) \le \int_0^t (s^2+1)\,ds = \frac{1}{3}t^3 + t$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه هشتم ۹۸/۷/۲۲

معادلات مرتبه دوم :

شکل عمومی معادله مرتبه دوم با شرایط اولیه

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(t_0) = y_0 , \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

مثال- $y'' = 2y + 3$ یا $y'' = y' + y^2$

شکل عمومی معادله خطی مرتبه دوم :

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

اگر $\mathcal{L}$ یک عملگر روی فضای توابع دوبار مشتق پذیر باشد، که در حالت کلی به صورت

$$\mathcal{L}[y] = F(y'', y', y, t)$$

باشد، رابطه $\mathcal{L}[y] \equiv 0$ بیانگر یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو است.

به عنوان مثال عملگر $\mathcal{L}[y] = y'' + y^2$

$\mathcal{L}[1] = 1$ (منظور از 1 تابع ثابت یک است)

$\mathcal{L}[t] = t^2$

$\mathcal{L}[t^2] = 2 + t^4$

اگر عملگر $\mathcal{L}$ دارای دو خاصیت زیر باشد، آن را خطی می‌نامیم:

- $\mathcal{L}[cy] = c\,\mathcal{L}[y]$ به ازای هر تابع y و ثابت حقیقی c

- $\mathcal{L}[y_1 + y_2] = \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2]$

مثال- $\mathcal{L}[y] = y'' + y$ یک عملگر خطی است.

- $\mathcal{L}[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)'' + (y_1 + y_2)$

$$= (y_1'' + y_1) + (y_2'' + y_2) = \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2]$$

- $\mathcal{L}[cy] = (cy)'' + (cy) = c(y'' + y) = c\,\mathcal{L}[y]$

مثال- عملگر $\mathcal{L}[y] = r(t)y'' + p(t)y' + q(t)y$ دارای دو خاصیت اشاره شده است و در نتیجه یک عملگر خطی است.

تعریف- اگر $\mathcal{L}$ خطی باشد، معادله $\mathcal{L}[y] \equiv 0$ را معادله خطی همگن می‌نامیم.

در مقابل معادله $\mathcal{L}[y] = g(t)$ یک معادله خطی ناهمگن است.

اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله خطی همگن $\mathcal{L}[y]\equiv 0$ ، باشند (بدون در نظر گرفتن شرط اولیه)

آنگاه $\mathcal{L}[c_1y_1+c_2y_2]\equiv 0$ برای هر $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. زیرا

$$\mathcal{L}[c_1y_1+c_2y_2]=\mathcal{L}[c_1y_1]+\mathcal{L}[c_2y_2]=c_1\underbrace{\mathcal{L}[y_1]}_{0}+c_2\underbrace{\mathcal{L}[y_2]}_{0}$$

اگر بخواهیم معادله خطی همگن $\mathcal{L}[y]\equiv 0$ با شرط اولیه $y(t_0)=y_0$ و $y'(t_0)=y'_0$ را حل کنیم

دو جواب y_1 و y_2 برای معادله همگن $\mathcal{L}[y]\equiv 0$ (بدون در نظر گرفتن شرط اولیه) پیدا می‌کنیم.

با توجه به خاصیت بالا هم توابع $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ نیز در معادله $\mathcal{L}[y]=0$ صدق می‌کنند.

بنابراین کافی است ثابتهای c_1 و c_2 را به گونه‌ای پیدا کنیم که

$$\begin{cases} y(t_0)=c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=y_0 \\ y'(t_0)=c_1y'_1(t_0)+c_2y'_2(t_0)=y'_0 \end{cases}$$

این روابط به صورت دستگاه خطی دو معادله، دو مجهول نوشته می‌شود که مجهولات آن c_1 و c_2 هستند:

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

می‌دانیم این دستگاه خطی به شرط آنکه ماتریس ضرایب وارون پذیر باشد، برای هر $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$ جواب یکتا دارد.

جمع‌بندی: y_1 و y_2 باید در شرط زیر صدق کنند:

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

(Wronskian) رونسکین

مثال- $y''+4y=0$ ، $y(0)=y'(0)=1$.

توابع $y_1(t)=\sin 2t$ ، $y_2(t)=2\sin 2t$ در معادله صدق می‌کنند و

$$W[\sin 2t, 2\sin 2t] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 2t & 2\sin 2t \\ 2\cos 2t & 4\cos 2t \end{vmatrix} = 0$$

ولی $z_1(t)=\sin 2t$ و $z_2(t)=\cos 2t$ نیز در معادله صدق می‌کنند و

$$W[z_1,z_2](0) = \left.\begin{vmatrix} \sin 2t & \cos 2t \\ 2\cos 2t & -2\sin 2t \end{vmatrix}\right|_{t=0} = -2 \neq 0$$

پس c_1 و c_2 وجود دارند که تابع $y(t)=c_1 z_1(t)+c_2 z_2(t)$ نه تنها در معادله صدق می‌کند بلکه شرط اولیه نیز برای آن برقرار است.

$$\begin{cases} c_1 z_1(0) + c_2 z_2(0) = 1 \\ c_1 z_1'(0) + c_2 z_2'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \tfrac{1}{2}, \ c_2 = 1$$

جواب معادله: $\boxed{y(t)=\tfrac{1}{2}\sin 2t+\cos 2t}$

جمع‌بندی: برای اینکه معادله دیفرانسیل خطی همگن $\mathcal{L}[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ را حل کنیم

دو جواب $y_1(t)$ و $y_2(t)$ را پیدا می‌کنیم که $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$.

آنگاه ضرایب c_1 و c_2 را پیدا می‌کنیم که $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ در شرایط اولیه زیر صدق کند:

$$y(t_0) = y_0 \ , \quad y'(t_0) = y_0'$$

در این حالت بنابر فرمول کرامر

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W(t_0)} = \frac{W[y, y_2](t_0)}{W[y_1, y_2](t_0)}$$

$$c_2 = \frac{W[y_1, y](t_0)}{W[y_1, y_2](t_0)}$$

$\{y_1, y_2\}$ را مجموعه اساسی جوابهای معادله خطی $\mathcal{L}[y] = 0$ می‌نامیم و هر جواب به صورت ترکیب خطی

این دو، یعنی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی این معادله نامیده می‌شود.

قضیه وجود و یکتائی جواب: اگر $p(t)$ ، $q(t)$ و $g(t)$ در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه

معادله $$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

با شرایط اولیه $$y(t_0) = y_0 \quad , \quad y'(t_0) = y_0'$$

دقیقاً یک جواب دارد که در بازه $\alpha < t < \beta$ تعریف شده است.

مثال- معادله خطی $(t-1)y'' + y' + ty = 0$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$ دارای جواب یکتا است که در $(-\infty, 1)$ تعریف شده است.

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{t-1}}_{p(t)} y' + \underbrace{\frac{t}{t-1}}_{q(t)} y = 0$$

ضرایب در $t=1$ ناپیوسته هستند.

مثال ـ $(t^2-3t)y'' + ty' + (t-3)y = t^2$ ، $y(1) = y'(1) = 1$

ضرایب معادله $y'' + \frac{1}{t-3}\, y' + \frac{1}{t}\, y = \frac{t}{t-3}$ در نقاط $t=0,3$ ناپیوسته اند.

بنابراین این معادله جواب یکتا در بازه $(0,3)$ دارد.

معادلات دیفرانسیل

جلسه ۷ ۹۸/۷/۲۹

یادآوری:

معادله خطی مرتبه دوم همگن

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

قضیه وجود و یکتایی جواب: اگر p و q در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه معادله بالا جواب یکتا دارد که $y(t_0)=y_0$, $y'(t_0)=y_0'$. به علاوه y در بازه $\alpha < t < \beta$ تعریف شده است.

خاصیت خطی بودن معادله: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $L[y]=0$ باشند، آنگاه

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = 0 \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ایده حل معادله خطی $\mathcal{L}[y]=0$ با شرط اولیه $y(t_0)=y_0$ و $y'(t_0)=y'_0$:

دو جواب y_1 و y_2 از $\mathcal{L}[y]=0$ پیدا می‌کنیم و جواب عمومی $y_c=c_1y_1+c_2y_2$

را می‌سازیم. مقادیر c_1 و c_2 را با جایگذاری در شرایط اولیه به دست می‌آوریم.

شرط وجود ضرایب c_1 و c_2 :

$$W[y_1,y_2](t_0)=\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

دو جواب y_1 و y_2 که در شرط بالا صدق کنند را مجموعه جواب‌های اساسی معادله نامیده می‌شوند.

نکته ـ بنا بر قضیه وجود و یکتایی جواب، جواب y_1 برای معادله $\mathcal{L}[y]=0$ با شرایط اولیه $y_1(t_0)=1$

و $y'_1(t_0)=0$ وجود دارد. همچنین تابع y_2 وجود دارد که $y_2(t_0)=0$ و $y'_2(t_0)=1$ و $\mathcal{L}[y_2]=0$

$$W[y_1,y_2](t_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

درنتیجه هر معادله خطی با ضرایب پیوسته دارای دو جواب است که تشکیل مجموعه اساسی جوابها را می دهد و به کمک آن دو می توان معادله را با هر شرایط اولیه ای حل کرد.

نکته ـ فضای جوابهای $\mathcal{L}[y]=0$ یک زیرفضای دو بعدی از مجموعه توابع دوبار مشتق پذیر است.

یعنی اگر $\{y_1, y_2\}$ مجموعه اساسی جوابها باشند و y_3 جواب دیگری از معادله $\mathcal{L}[y]=0$.

آنگاه y_3 ترکیب خطی از y_1 و y_2 است. زیرا مقادیر c_1 و c_2 وجود دارند که

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

در شرایط اولیه $y_c(t_0) = y_3(t_0)$ و $y_c'(t_0) = y_3'(t_0)$ صدق کند. درنتیجه y_3 و y_c دو جواب معادله $\mathcal{L}[y]=0$ با شرایط اولیه برابر هستند. بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب باید $y_c(t) = y_3(t)$ برای هر t.

$$\Rightarrow \quad y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

نکته - اگر $p(t)$ و $q(t)$ در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته باشند و y_1 و y_2 دو جواب $L[y]=0$.

آنگاه $W(t) = W[y_1, y_2](t)$ یا تابع صفر است یا $W(t) \neq 0$ برای هر $\alpha < t < \beta$.

اثبات -

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)$$

$$W'(t) = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_2' y_1'} - y_2 y_1'' =$$

$$= y_1 \left(-p y_2' - q y_2\right) - y_2 \left(-p y_1' - q y_1\right) = -p \left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)$$

$$= -pW$$

$$\Longrightarrow \quad W(t) = W(t_0) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds\right]$$

اگر $W(t_0)=0$ آنگاه $W(t)=0$ برای هر t دلخواه و اگر $W(t_0) \neq 0$ آنگاه $W(t) \neq 0$.

نکته - اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله باشند که $W[y_1, y_2] \equiv 0$. آنگاه یکی از این دو جواب مضرب دیگری است.

$$0 = W[y_1, y_2](t_0) \implies \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} = 0$$

درنتیجه دستگاه

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

جواب غیربدیهی دارد. یعنی $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ وجود دارد که

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = 0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

قرار دهید:

$$y(t) := c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

آنگاه $y(t_0) = y'(t_0) = 0$. بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب باید $y(t) \equiv 0$

تابع ثابت صفر باشد. (تابع صفر جواب معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه صفر است)

$$\implies c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \equiv 0 \quad \forall t$$

معادله خطی با ضرایب ثابت: $\mathcal{L}[y] = ay'' + by' + cy = 0$

$a \neq 0$ ، a, b, c اعداد حقیقی هستند.

هدف: یک مجموعه اساسی جواب برای معادله بالا پیدا کنیم.

یعنی y_1, y_2 را پیدا کنیم که $\mathcal{L}[y_1] = \mathcal{L}[y_2] = 0$ و $W[y_1, y_2] \neq 0$

ایده: با حدس شکل کلی جواب به صورت تابع $y(t) = e^{rt}$ ببینیم آیا مقدار r پیدا می‌شود که $y(t)$ جواب معادله باشد.

$$\mathcal{L}[e^{rt}] = (ar^2 + br + c)\, e^{rt}$$

اگر r ریشه چندجمله‌ای $ar^2 + br + c = 0$ باشد، آنگاه $y(t) = e^{rt}$ جواب معادله است.

تعریف - چندجمله‌ای $ar^2+br+c=0$ را چندجمله‌ای مشخصه معادله $ay''+by'+cy=0$ می‌نامیم.

سه حالت زیر می‌توانند اتفاق بیفتند:

۱- چندجمله‌ای مشخصه دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

۲- چندجمله‌ای مشخصه دو ریشه مختلط $r=\alpha\pm i\beta$ دارد.

۳- چندجمله‌ای مشخصه ریشه تکراری دارد.

حالت اول: دو ریشه حقیقی متمایز $r_1\neq r_2$.

$y_1(t)=e^{r_1t}$, $y_2(t)=e^{r_2t}$ دو جواب مستقل برای معادله هستند.

$$W[e^{r_1t},e^{r_2t}]=\begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t}\end{vmatrix}=(r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)t}\neq 0$$

مثال - $y'' + ۵y' + ۶y = ۰$ ، $y(۰) = ۲$ ، $y'(۰) = ۳$.

چند جمله‌ای مشخصه معادله بالا به صورت $r^۲ + ۵r + ۶ = ۰$ است که دارای دو ریشه متمایز

$r_1 = -2$ و $r_2 = -3$ است . در نتیجه جواب عمومی معادله فوق به صورت

$$y_c(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

با جایگذاری در شرایط اولیه مقادیر c_1 و c_2 را پیدا می‌کنیم

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -2c_1 - 3c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 9 \quad c_2 = -7$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}}$$

نکته - در این حالت اگر r_1 و r_2 هر دو منفی باشند (یعنی اگر $ac>0$ ، $ba>0$ و $b^2-4ac>0$) آنگاه همه جوابهای $ay''+by'+cy=0$ دارای رفتار مجانبی $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$ هستند .

معادلات دیفرانسیل

جلسه دهم ۹۸/۸/۴

حالت دوم: چندجمله‌ای مشخصه دو ریشه مختلط $\alpha \pm i\beta$ دارد.

$$r = (\alpha \pm i\beta) \quad , \quad y(t) = e^{rt} = e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}\left[\cos\beta t \pm i \sin\beta t\right]$$

$$= u(t) \pm i\, v(t)$$

که $u(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ و $v(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$.

می‌دانیم که $y'(t) = re^{rt} = (\alpha \pm i\beta)e^{(\alpha \pm i\beta)t}$ و $y''(t) = r^2 e^{rt}$. درنتیجه $y(t)$ به عنوان یک تابع مختلط در معادله $ay'' + by' + cy = 0$ صدق می‌کند. درنتیجه

$$0 = a\left[u'' \pm iv''\right] + b\left[u' \pm iv'\right] + c\left[u \pm iv\right] = \left[au'' + bu' + cu\right] \pm i\left[av'' + bv' + cv\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} au'' + bu' + cu = 0 \\ av'' + bv' + cv = 0 \end{cases}$$

بررسی می‌کنیم که آیا $\{u, v\}$ مستقل هستند؟

$$W[u,v] = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t) \end{vmatrix}$$

$$= \beta e^{2\alpha t}$$

مثال. $y'' + y' + y = 0 \ , \ y(0) = y'(0) = 1$

معادله مشخصه $r^2 + r + 1 = 0 \longrightarrow r_1, r_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$

$$y_1(t) = e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \ , \ y_2(t) = e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

جواب عمومی: $y_c(t) = e^{-t/2}\left[c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$

شرایط اولیه $\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1 \ , \ c_2 = \sqrt{3}$

نکته- در این حالت جواب عمومی به صورت $y_c(t) = e^{\alpha t}\left[c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t\right]$ است.

هرگاه $\alpha < 0$ رفتار مجانبی جواب در $t \to \infty$، به صورت

$$\lim_{t\to\infty} y_c(t) = 0$$

در این حالت باید $b^2 - 4ac < 0$ و $\frac{b}{a} > 0$.

<u>حالت سوم</u>: معادله مشخصه ریشه تکراری دارد. $b^2 - 4ac = 0$، $r_1, r_2 = \frac{-b}{2a}$.

بنابراین تابع $y_1(t) = e^{r_1 t}$ در معادله صدق می‌کند. برای پیدا کردن جواب دوم که مستقل از y_1 باشد، قرار دهید $y_2(t) = e^{r_1 t}\varphi(t)$.

$$y_2' = e^{r_1 t}\left[r_1\varphi + \varphi'\right] \quad , \quad y_2'' = e^{r_1 t}\left[r_1^2\varphi + 2r_1\varphi' + \varphi''\right]$$

$$0 = a y_2'' + b y_2' + c y_2 = e^{r_1 t}\left[a r_1^2 \varphi + 2 a r_1 \varphi' + a \varphi'' + b r_1 \varphi + b \varphi' + c \varphi\right]$$

در رابطه بالا تساوی $r_1 = -\frac{b}{2a}$ را جایگذاری می‌کنیم و از رابطه $b^2 = 4ac$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$0 = \Big[\underbrace{\cancel{a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c}}_{0}\Big]\varphi + \Big[\underbrace{\cancel{2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b}}_{0}\Big]\varphi' + a\varphi''$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = d_1 t + d_2$$

برای مقادیر ثابت d_1 و d_2.

در نتیجه $e^{r_1 t}(d_1 t + d_2)$ نیز جواب معادله است. بنابراین می‌توانیم جواب دوم که مستقل از $y_1(t) = e^{r_1 t}$

است را برابر $y_2(t) = e^{r_1 t} t$ در نظر بگیریم. $W[e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}] = e^{2 r_1 t} \neq 0$.

مثال - $y''+4y'+4y=0$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=3$.

معادلهٔ مشخصه $r^2+4r+4=0$ دارای ریشهٔ تکراری $r_1=r_2=-2$ است. بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y_c(t)=e^{-2t}[c_1+c_2t]$$

$$\text{شرایط اولیه} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ -2c_1+c_2=3 \end{cases} \Rightarrow y(t)=e^{-2t}[1+5t]$$

نکته - در این حالت جواب عمومی به صورت $y_c(t)=e^{r_1t}[c_1+c_2t]$ است که وقتی $r_1<0$ جوابهای معادله دارای رفتار مجانبی $\lim_{t\to\infty} y_c(t)=0$ هستند. (یعنی $b^2-4ac=0$ و $\frac{b}{a}>0$)

روش کاهش مرتبه :

روشی که در قسمت قبل برای پیدا کردن جواب دوم استفاده کردیم به روش کاهش مرتبه معروف است .

در این روش اگر برای معادله درجه دو

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

جواب $y_1(t)$ را می‌شناسیم . برای پیدا کردن جواب دوم که مستقل از y_1 باشد، قرار می‌دهیم

$$y_2(t) = y_1(t)\,\varphi(t)$$

$$\Rightarrow \quad y_2' = y_1'\varphi + y_1\varphi' \quad , \quad y_2'' = y_1''\varphi + 2y_1'\varphi' + y_1\varphi''$$

$$0 = y_2'' + py_2' + qy_2 = \cancel{(y_1'' + py_1' + qy_1)}\varphi + (2y_1' + py_1)\varphi' + y_1\varphi''$$

چون y_1 جواب معادله است .

$$\Rightarrow \quad y_1 \varphi'' + (2y_1' + p y_1)\varphi' = 0$$

اگر $\psi = \varphi'$ آنگاه

$$y_1 \psi' + (2y_1' + p y_1)\psi = 0$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای مجهول ψ است. (به همین دلیل به این روش تقلیل مرتبه گوییم)

$$\psi(t) = \exp\left[-\int \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right) dt\right] = \frac{\exp\left[-\int^t p\, dt\right]}{y_1^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \int^t \psi(s)\, ds$$

مثال - $(1-t^2)y'' + 2ty' - 2y = 0$ ، $y_1(t) = t$ جواب این معادله است.

$$y_2 = t\varphi(t) \Rightarrow t\varphi'' + \left(2 + \frac{2t}{1-t^2}\cdot t\right)\varphi' = 0$$

$$\varphi'(t) = \frac{\exp\left[-\int^t \frac{2s}{1-s^2}\,ds\right]}{t^2} = \frac{\exp\left[\ln(1-t^2)\right]}{t^2} = \frac{1-t^2}{t^2}$$

$$\varphi(t) = \int^t \frac{1-s^2}{s^2}\,ds = -\frac{1}{t} - t$$

$$\Rightarrow y_2(t) = t\varphi(t) = -1 - t^2$$

مثال - $2t^2y''+3ty'-y=0$ ، با توجه به اینکه $y_1(t)=t^{-1}$ در معادله صدق می‌کند، جواب معادله را با شرایط اولیه $y(1)=0$ ، $y'(1)=1$ پیدا کنید.

$$y_2(t)=\frac{\varphi(t)}{t} \Rightarrow \frac{\varphi''}{t}+\left(\frac{-2}{t^2}+\frac{3t}{2t^2}\times\frac{1}{t}\right)\varphi'=0$$

$$\Rightarrow \varphi''-\frac{\varphi'}{2t}=0 \Rightarrow \varphi'(t)=\exp\int^t\frac{ds}{2s}=t^{1/2}$$

$\Rightarrow \varphi(t)=\frac{2}{3}t^{3/2} \Rightarrow$ مجموعه اساسی جواب است $\{t^{-1},t^{1/2}\}$

جواب عمومی به صورت $y_c(t)=c_1t^{-1}+c_2t^{1/2}$ است که باید در شرایط اولیه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ -c_1+\frac{1}{2}c_2=1 \end{cases} \Rightarrow c_2=2/3,\ c_1=-2/3$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=-\frac{2}{3}t^{-1}+\frac{2}{3}t^{1/2}}$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه یازدهم ۹۸/۸/۶

معادله خطی ناهمگن :

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

اگر Ψ_1 و Ψ_2 دو جواب معادله ناهمگن فوق باشد، آنگاه

$$L[\Psi_1 - \Psi_2] = L[\Psi_1] - L[\Psi_2] = g(t) - g(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Psi_1 = \underbrace{(\Psi_1 - \Psi_2)}_{\text{جواب معادله همگن}} + \underbrace{\Psi_2}_{\text{جواب معادله ناهمگن}}$$

نتیجه - اگر $\Psi(t)$ یک جواب معادله ناهمگن $L[y]=g$ باشد، آنگاه هر جواب دیگر این معادله به صورت $y_c + \Psi$ است که $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی معادله همگن است.

تابع Ψ را جواب خصوصی معادله $L[y]=g$ می‌نامیم. (جدای از شرایط اولیه)

مثال- $y'' + y = t$ با شرایط اولیه $y'(0)=0$ ، $y(0)=0$.

یک جواب خصوصی برای این معادله $y_p(t) = t$ است. معادله همگن $y''+y=0$ دارای

چندجمله‌ای مشخصه $r^2+1=0$ است. درنتیجه جواب عمومی معادله همگن $y_c(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ است.

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_c + y_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t$$

با جایگذاری در شرایط اولیه $c_1=0$ ، $c_2=-1$ است.

روش پیدا کردن جواب خصوصی : ۱- روش تغییر پارامترها

۲- روش ضرایب نامعین (روش حدسی)

روش تغییر پارامتر : اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل از معادله همگن $\mathcal{L}[y]=0$ باشند ،

با قرار دادن $y_p(t)=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)$ در معادله ناهمگن $\mathcal{L}[y]=g$

توابع مجهول u_1 و u_2 را پیدا می‌کنیم .

برای سادگی فرض می‌کنیم .

$$y_p' = \underbrace{\left[u_1'y_1+u_2'y_2\right]}_{=0} + u_1y_1' + u_2y_2'$$

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$$

$$\mathcal{L}[y_p] = y_p''+p\,y_p'+q\,y_p = u_1\left[y_1''+py_1'+qy_1\right]+u_2\left[y_2''+py_2'+qy_2\right]$$

$$+ u_1'y_1' + u_2'y_2'$$

$$= u_1'y_1' + u_2'y_2'$$

درنتیجه توابع u_1' و u_2' باید در دستگاه زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه بالا همان $W[y_1, y_2]$ است که چون $\{y_1, y_2\}$ مستقل هستند، ناصفر است. درنتیجه دستگاه فوق جواب یکتا دارد و توابع u_1' و u_2' برابر هستند با:

$$u_1'(t) = -\frac{g(t) y_2(t)}{W[y_1, y_2]} \quad , \quad u_2'(t) = \frac{g(t) y_1(t)}{W[y_1, y_2]}$$

مثال- $y''+y=\tan t$ ، $y(0)=y'(0)=1$.

جواب عمومی معادله همگن $y_c=c_1\sin t+c_2\cos t$.

جواب خصوصی $y_p=u_1(t)\sin t+u_2(t)\cos t$

$$\begin{cases} u_1'\sin t+u_2'\cos t=0 \\ u_1'\cos t-u_2'\sin t=\tan t \end{cases}$$

$$u_1'=\sin t \quad , \quad u_2'=-\sin t\tan t$$

$$\Rightarrow \quad u_1(t)=-\cos t \quad , \quad u_2(t)=\sin t-\ln|\sec t+\tan t|$$

$$y_p=-\sin t\cos t+\left(\sin t-\ln|\sec t+\tan t|\right)\cos t=-\ln|\sec t+\tan t|\cos t$$

$$\Rightarrow y(t) = y_c + y_p = c_1 \sin t + c_2 \cos t - \ln|\sec t + \tan t| \cos t$$

$$y(0) = y'(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \ , \ c_1 = 2$$

تذکر- در این روش برای پیدا کردن جواب خصوصی به صورت $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ ابتدا u_1' و u_2' پیدا می‌شوند. با گرفتن انتگرال از u_1' و u_2' یک تابع اولیه برای آنها پیدا می‌کنیم.

فرم کلی تابع اولیه به صورت

$$u_1(t) = \int^t u_1'(s)\,ds + c_1 = \tilde{u}_1(t) + c_1$$

$$u_2(t) = \int^t u_2'(s)\,ds + c_2 = \tilde{u}_2(t) + c_2$$

است که با جایگذاری خواهیم داشت:

$$y_p = (\tilde{u}_1 y_1 + \tilde{u}_2 y_2) + (c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

عبارت $(c_1y_1+c_2y_2)$ همان شکل کلی جواب عمومی است. لذا در این روش لازم نیست هم توابع u_1 و u_2 را پیدا کنیم که در دستگاه مربوطه صدق می‌کنند. پیدا کردن یک تابع اولیه برای u_1' و u_2' کافی است.

معادلات دیفرانسیل

جلسه دوازدهم ۹۸/۸/۱۱

روش ضرایب نامعین (روش حدسی) برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله خطی ناهمگن $\mathcal{L}[y]=g$

ایده: به طرز معقولی شکل کلی جواب خصوصی را حدس می‌زنیم که در آن ضرایبی نامعین هستند. با جاگذاری در معادله ضرایب نامعین را پیدا می‌کنیم.

این روش دارای محدودیتهایی است. اولاً باید معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت باشد.
دوم اینکه تابع $g(t)$ باید ترکیبی از توابع خاص مثل چندجمله‌ای، سینوسی، نمایی یا حاصلضرب اینها باشد.

مثال - $y''-3y'-4y=3e^{2t}$

یک حدس معقول برای جواب خصوصی معادله فوق $y_p=Ae^{2t}$ است که با جایگذاری در معادله

$$\underbrace{4Ae^{2t}}_{y''}-\underbrace{6Ae^{2t}}_{3y'}-\underbrace{4Ae^{2t}}_{4y}=3e^{2t} \Longrightarrow A=-1/2$$

مثال - $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(3t)$

اگر جواب حدسی را به صورت $y = A\sin 3t$ بنویسیم. با جایگذاری در معادله خواهیم دید که

معادله جوابی به این صورت ندارد. بلکه حدس معقول در اینجا

$$y = A\sin 3t + B\cos 3t$$

است که با جایگذاری در معادله ضرایب A و B را تعیین می‌کنیم.

توضیح روش برای معادله ناهمگن $ay'' + by' + cy = g(t)$

حالت اول: فرض کنید $g(t)$ یک چندجمله‌ای است. $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$

حدس معقول برای جواب خصوصی یک چندجمله‌ای است.

اگر $c \neq 0$ حدس جواب چندجمله‌ای درجه n است

$$y_p = A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n$$

$$a y_p'' + b y_p' + c y_p = (cA_n) t^n + (cA_{n-1} + nbA_n) t^{n-1} + (cA_{n-2} + (n-1)bA_{n-1} + n(n-1)aA_n) t^{n-2} + \cdots + (cA_0 + bA_1 + 2aA_2)$$

عبارت بالا برابر است با $g(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ درنتیجه

دستگاه $(n+1)$ معادله و $(n+1)$ مجهول زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} cA_n = a_n \\ cA_{n-1} + nbA_n = a_{n-1} \\ \vdots \\ cA_0 + bA_1 + 2aA_2 = a_0 \end{cases}$$

براحتی می‌توان دید که با شرط $c \neq 0$ این دستگاه جواب دارد.

اگر $c=0$ و $b\neq 0$ حدس معقول جواب یک چندجمله‌ای درجه $(n+1)$ است،

$$y_p = A_0 + A_1 t + \cdots + A_{n+1} t^{n+1}$$

که $(n+2)$ مجهول A_0، A_1، $\cdots$، A_{n+1} داریم. بعد از جایگذاری در معادله $ay'' + by' = g(t)$

(دقت کنید $c=0$ است) باید از $(n+1)$ معادله ضرایب نامعین را پیدا کنیم.

این معادلات ضرایب A_1، $\cdots$، A_{n+1} را به طور یکتا معین می‌کند و ضریب A_0 هر مقدار دلخواهی می‌تواند باشد.

بنابراین بهتر است که در حدس اولیه جواب ضریب A_0 را برابر صفر قرار دهیم

$$y_p = t\left[A_1 + A_2 t + \cdots + A_{n+1} t^n\right]$$

دقت کنید وقتی $c=0$، تابع ثابت $y(t)=1$ جواب معادله همگن است.

اگر $b=c=0$ در این حالت باید معادله $ay''=g(t)$ را حل کنیم که حدس معقول برای جواب چندجمله‌ای درجه $(n+2)$ است. مشابه حالت قبل می‌توان فرض کرد ضرایب ثابت و ضریب t صفر هستند.

$$y_p = t^2\left[A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n\right]$$

در این حالت جواب عمومی معادله همگن $c_1 + c_2 t$ است که به طور طبیعی وقتی y_p جواب خصوصی باشد

$$y_p + c_1 + c_2 t$$

نیز جواب است.

حالت دوم: $g(t)=(a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n)e^{\alpha t}$

فرض معقول برای جواب حاصلضرب یک چندجمله‌ای و تابع $e^{\alpha t}$ است. اگر $y_p=v(t)e^{\alpha t}$ قرار دهیم و در معادله جایگذاری کنیم:

$$a\underbrace{(v''+2\alpha v'+\alpha^2 v)e^{\alpha t}}_{y_p''}+b\underbrace{(v'+\alpha v)e^{\alpha t}}_{y_p'}+cve^{\alpha t}=g(t)$$

$$\Rightarrow\quad av''+(b+2a\alpha)v'+(a\alpha^2+b\alpha+c)v=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$$

درنتیجه تابع v باید در معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت فوق صدق کند که سمت راست معادله یک چندجمله‌ای از درجه n است. فرض جواب برای تابع v از حالت اول مشخص می‌شود.

- اگر $a\alpha^2+b\alpha+c\neq 0$ آنگاه $y_p=(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n)e^{\alpha t}$

- اگر $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ و $b+2a\alpha\neq 0$ آنگاه

$$y_p=t(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n)e^{\alpha t}$$

- اگر $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $b+2a\alpha=0$ آنگاه

$$y_p=t^2(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n)e^{\alpha t}$$

نکته - برای حل معادله همگن $ay''+by'+cy=0$ ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $ar^2+br+c=0$ را پیدا می‌کنیم. در نتیجه شرط $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ به این معنا است که $e^{\alpha t}$ یک جواب معادله همگن است. و شرط $b+2a\alpha=a\alpha^2+b\alpha+c=0$ یعنی α ریشه تکراری چندجمله‌ای مشخصه است و جواب عمومی معادله همگن به صورت $y_c=(c_1+c_2t)e^{\alpha t}$ است.

مثال- $y'' - 3y' + 2y = (1+t)e^{3t}$

چندجمله‌ای مشخصه معادله همگن به صورت $r^2 - 3r + 2 = 0$ است که دارای دو ریشه حقیقی $r_1 = 1$ و $r_2 = 2$

است. درنتیجه e^{3t} جواب معادله همگن نیست و حدس جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$y_p = (A_0 + A_1 t)e^{3t}$$

که با جایگذاری در معادله $A_0 = -1/4$ و $A_1 = 1/2$ است.

مثال- $y'' - 3y' + 2y = (1+t)e^{2t}$. در این حالت $r = 2$ ریشه ساده (تکراری نیست) چندجمله‌ای

مشخصه است درنتیجه حدس جواب

$$y_p = t(A_0 + A_1 t)e^{2t}$$

است.

$$y_p' = (A_0 + 2A_1 t)e^{2t} + 2t(A_0 + A_1 t)e^{2t}$$

$$y_p'' = 2A_1 e^{2t} + 4(A_0 + 2A_1 t)e^{2t} + 4t(A_0 + A_1 t)e^{2t}$$

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = \left[4A_1t^2 + (4A_0+8A_1)t + (4A_0+2A_1)\right]e^{2t}$$

$$-3\left[2A_1t^2 + (2A_0+2A_1)t + A_0\right]e^{2t}$$

$$+2t\left[A_0 + A_1t\right]e^{2t}$$

$$= (1+t)e^{2t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A_1 = 1 \\ A_0 + 2A_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 1/2, \ A_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p = \frac{1}{2}t^2e^{2t}}$$