



تاریخ: ۹۸/۹/۱۴  
شماره: .....  
پیوست: .....

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل (گروه‌های ۱ و ۲)

۲۲-۰۳۴

نیمسال اول ۹۹-۹۸

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y' = \frac{-ty}{2t^2 + 3y^2 - 20} \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

جواب یگانه این مسأله مقدار اولیه را در داخل مستطیل کوچکی به مرکز نقطه (۳, ۱) که بیضی  $2t^2 + 3y^2 - 20 = 0$  را قطع نمی‌کند به صورت صریح به دست آورید.

سؤال ۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل برنولی زیر را به دست آورید:

$$y' + ty = ty^3 \quad (y > 0)$$

سؤال ۳. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0 \quad (t > 0)$$

اگر  $y_1$  و  $y_2$  دو جواب مستقل خطی این معادله دیفرانسیل باشند و بدانیم  $W[y_1, y_2](1) = e$ ، آنگاه به ازای هر  $t > 0$ ،  $W[y_1, y_2](t)$  را به صورت صریح مشخص کنید.

سؤال ۴. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$(t^2 - 1)y'' - 2ty' + 2y = (t^2 - 1)^2 \quad (t > 1)$$

(الف) به راحتی می‌توان دید که یک جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر  $y_1 = t$  است. با استفاده از روش کاهش مرتبه، جواب  $y_2$  (مستقل خطی با  $y_1$ ) از معادله دیفرانسیل همگن متناظر را به دست آورید. (در اینجا مجاز به استفاده از فرمول مربوط به روش کاهش مرتبه نیستید و باید روش را مستقیم به کار بگیرید.)

(ب) با استفاده از روش تغییر پارامترها، یک جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل ناهمگن داده شده را بیابید. (در اینجا می‌توانید از فرمول‌های مربوط به روش تغییر پارامترها استفاده کنید.)

(ج) جواب عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن داده شده را بنویسید.

سؤال ۵. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + y = t \cos t - \cos t \quad (t \in \mathbb{R})$$

با استفاده از روش ضرایب نامعین (روش حدسی)، یک جواب خصوصی از این معادله را به دست آورید و سپس جواب عمومی آن را بنویسید.

سؤال ۶. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$4ty'' + 2y' + y = 0 \quad (t > 0)$$

با استفاده از روش فروبنیوس، بسط دو جواب مستقل خطی از این معادله را به صورت سری‌هایی حول نقطه منفرد منظم معادله به دست آورید و سپس جواب عمومی معادله را به صورت صریح بنویسید.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۵ نمره، سؤال ۲: ۱۵ نمره، سؤال ۳: ۱۰ نمره، سؤال ۴: ۱۰ + ۱۰ + ۵ نمره، سؤال ۵: ۱۵ نمره، سؤال ۶: ۲۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره