میان‌ترم درس ریاضیات زیست ۹۸/۲/۲۳

۱- معادله Ricker برای دینامیک جمعیت به صورت $N_{n+1} = \alpha N_n e^{-\beta N_n}$ است.

الف - از پارامترهای α و β کدام معنی گنجایش محیط را می‌دهد؟ چرا؟

ب - نقطه تعادل این معادله را پیدا کنید و شرط پایداری آن را برحسب α و β به دست آورید.

۲- در مدل انگل - میزبان که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t \exp\left(r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)\right) f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} = c N_t \left(1 - f(N_t, P_t)\right) \end{cases}$$

در این مدل P_t جمعیت انگل و N_t جمعیت میزبان در ماه t-ام است. همچنین $f(N_t, P_t)$ کسری از جمعیت میزبان را نشان می‌دهد که مورد تهاجم قرار نمی‌گیرد.

الف- پارامترهای λ، r، c و K چه معنی دارند؟

ب - چگونه می‌توان نشان داد $f(N_t, P_t) = e^{-aP_t}$ ؟ در این رابطه پارامتر a چه معنی دارد؟

ج - نقاط تعادل سیستم و پایداری آن‌ها را با تابع قسمت (ب) بررسی کنید.

۳- در شبکه عصبی $N = \langle D_{max}(n), \vec{P}, \vec{1} \rangle$ که منظور از $D_{max}(n)$ کران n رأسی کامل بدون loop است و $\vec{P} = (p, \dots, p)$، $\vec{1} = (1, \dots, 1)$. نشان دهید دامنه جذب یک

حالت تعادل شامل همه بردارهای $\vec{s}$ است که برای لااقل یک $q \in \{0, 1, \dots, p\}$ داریم

$$\{i \in [n] : s_i = q\} = \phi$$

۴- واکنش سیمیایی $A + B \underset{K_{-1}}{\overset{K_1}{\rightleftharpoons}} C \xrightarrow{K_2} D + E$ را در نظر بگیرید.

الف - معادلات حاکم برای غلظت هر پنج ماده A، B، C، D و E را بنویسید.

ب - نشان دهید چگونه می‌توان آن را به سیستم دو بعدی زیر خلاصه کرد. پارامترها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -K_1 b_0 a + (K_1 a + K_{-1}) c \\ \frac{dc}{dt} = K_1 b_0 a - (K_1 a + K_{-1} + K_2) c \end{cases}$$

۵- بی بعدسازی مدل زیر را استخراج کنید:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = -u + (u + K - \lambda) v \\ \varepsilon \frac{dv}{d\tau} = u - (u + K) v \end{cases} \qquad u(0) = 1, \quad v(0) = 0$$

د- به کمک تحلیل سیستم‌های دینامیکی تند-کند، رفتار دینامیکی سیستم فوق را توضیح دهید.

۵- مدل رقابتی لوکوتینا را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x (K_1 - x - \beta_1 y) \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y (K_2 - y - \beta_2 x) \end{cases}$$

الف - معنی پارامترهای r_i، K_i و β_i چیست؟

ب- تفاوت این مدل با مدل شکار و شکارچی چیست؟

ج - با بررسی کلی حالتهای ممکن مدل فوق شرط وجود یک نقطه تعادل پایدار که هر دو گونه بقاء خواهند داشت را پیدا کنید.

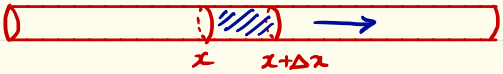
د- اگر این مدل برای تولید دو گونه x و y در یک سلول نوشته شود، توضیح دهید که سلول چگونه می‌تواند به صورت خودتنظیم از تولید فقط x به تولید فقط y تغییر حالت دهد.

ریاضیات زیست

جلسه پانزده ۹۷/۱/۳۱

معادلات اصل بقاء (Conservation Law)

بعد یک :



قانون اصل بقاء :

$$\begin{pmatrix}\text{میزان تغییرات ذرات در فاصله}\\ (x,\ x+\Delta x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{میزان ذرات ورودی}\\ \text{در بازه } (x, x+\Delta x)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{میزان ذرات خروجی}\\ \text{از بازه } (x, x+\Delta x)\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}\text{مقدار مرکز و منبع}\\ \text{یا تولید در داخل}\\ \text{بازه } (x, x+\Delta x)\end{pmatrix}$$

$c(x,t)$ = چگالی ذرات در نقطه x در زمان t

$J(x,t)$ = شار حرکتی ذرات در نقطه x در زمان t

$r(x,t)$ = مقدار منبع مرگ و میر یا تولید در واحد زمان در لحظه t و نقطه x

A = سطح مقطع ناحیه

کل جمعیت ذرات در بازه $(x, x+\Delta x)$ در زمان t $= \int_x^{x+\Delta x} c(y,t)\, dy$

قانون بقاء به صورت زیر بدل می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_x^{x+\Delta x} c(y,t) A\, dy\right] = \underbrace{J(x,t)A}_{\text{شار ورودی}} - \underbrace{J(x+\Delta x,t)A}_{\text{شار خروجی}} \pm \int_x^{x+\Delta x} \sigma(y,t) A\, dy$$

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left[c(x,t)A\right] = \frac{J(x,t)A - J(x+\Delta x,t)A}{\Delta x} \pm \left(\sigma(x,t)A\right)$$

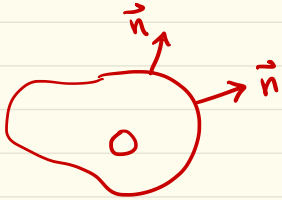
$$\boxed{\partial_t c = -\frac{\partial}{\partial x} J \pm \sigma}$$

معادله اصل بقاء

اگر A ثابت باشد آنگاه:

اگر سطح مقطع A در نقاط مختلف متفاوت باشد یا حتی در زمانهای مختلف شکل ناحیه تغییر کند. فرض می‌کنیم در لحظه t در نقطه x سطح مقطع ناحیه $A(x,t)$ باشد. آنگاه از رابطه (1) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(C(x,t)A(x,t)\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(J(x,t)A(x,t)\right) \pm \left(\sigma(x,t)A(x,t)\right)$$



معادله اصل بقاء در ابعاد بالاتر:

ناحیه O حول نقطه x در نظر گیرید و $\vec{n}$ بردار عمود برونگرای مرز ناحیه O.

$$\text{کل جمعیت در ناحیه } O \text{ در لحظه } t = \int_O C(x,t)\,dx$$

قانون بقاء به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_O C(x,t)\,dx = -\int_{\partial O} (J\cdot\vec{n})\,dA \pm \int_O \sigma(x,t)\,dx \qquad (2)$$

$\int_{\partial O} (J\cdot\vec{n})\,dA$: کل شار ورودی منهای خروجی را اندازه می‌گیرد.

نکته: علامت (-) پشت انتگرال $\int_{\partial O}(J\cdot\vec{n})\,dA$ برای این است که $\vec{n}$ بردار عمود برونگرای ∂O است و حاصل انتگرال فوق شار ورودی منهای خروجی است.

از طرفی بنابر قضیه استوکس:

$$\int_{O}(\operatorname{div} J)\,dx = \int_{\partial O}(J\cdot\vec{n})\,dA$$

با جایگذاری در رابطه (2) و با توجه به اینکه ناحیه O دلخواه است نتیجه می‌شود که

معادله اصل بقای در هم ابعاد:

$$\frac{\partial}{\partial t}C(x,t) = -\operatorname{div} J \pm \sigma(x,t)$$

به جمله $\sigma(x,t)$ واکنش (Reaction) گفته می‌شود. فعلاً فرض کنیم این عبارت برابر صفر است و تغییرات جمعیت صرفاً براثر جابجایی ذرات تحت شار J انجام می‌شود.

برای مدل کردن شار J دو روش کلاسیک وجود دارد.

۱- (Convection)

فرض بر این است که جمعیت بر اثر نیروی بیرونی با سرعت $V(x,t)$ در حال حرکت است. در نتیجه

$$J(x,t) = c(x,t)\,V(x,t)$$

(c: چگالی، V: سرعت)

و معادله اصل بقاء به صورت

$$\frac{\partial}{\partial t}c = -\operatorname{div}(cV)$$

۲- (Diffusion) پخش:

بر اثر حرکتهای مولکولی ذرات به صورت تصادفی در فضا جمعیت پخش می‌شود.

قاعده فیک (Fick's law): جمعیت از نقاط با چگالی بالا به سمت نقاطی که کمترین چگالی را دارد حرکت می‌کند یعنی

$$J = -D\,\nabla c$$

که D ضریب پخش نامیده می‌شود.

که در این صورت معادله انتشار به صورت

$$\frac{\partial}{\partial t} c = -\operatorname{div} J = \operatorname{div}(D \nabla c)$$

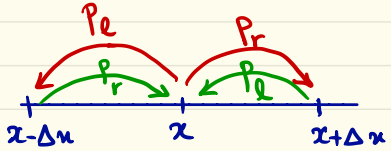
اگر $D = D(x,t)$ مقدار آن همیشه ثابت باشد، معادله به صورت ساده

$$\partial_t c = D \, \Delta c$$

خواهد بود که به معادله حرارت موسوم است.

توصیف قاعده Fick :

فرض کنیم در ابتدای زمان τ به نقطه $x+\Delta x$ در واحد زمان P_r از نقطه x در واحد زمان τ به نقطه $x+\Delta x$ حرکت می‌کند و با احتمال P_l به نقطه $x-\Delta x$ می‌رود.



$$C(x, t+\tau) = C(x,t)\,[1 - P_r - P_l] + P_r\, C(x-\Delta x, t) + P_l\, C(x+\Delta x, t)$$

با فرض اینکه $P_r = P_l = 1/2$ خواهیم داشت :

$$C(x, t+\tau) = \frac{1}{2}\left[C(x-\Delta x, t) + C(x+\Delta x, t)\right] \qquad (3)$$

$$C(x,t+\tau) = C(x,t) + \tau \frac{\partial C}{\partial t}(x,t) + O(\tau^2)$$

$$C(x \pm \Delta x, t) = C(x,t) \pm \Delta x \frac{\partial C}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x,t) + O((\Delta x)^3)$$

با جایگذاری تقریب‌های بالا در معادله (3) خواهیم داشت :

$$\tau \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

که $D = \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\tau}$ ضریب نفوذ است. (یادآوری : ذرات در واحد زمان τ به اندازه Δx حرکت می‌کنند)

ضریب نفوذ اکسیژن

در آب در دمای $18^{\circ}C$ 1.98×10^{-5} $\frac{cm^2}{sec}$

$25^{\circ}C$ 2.41×10^{-5} $\frac{cm^2}{sec}$

یعنی به طور تقریبی در ده ثانیه 2×10^{-3} سانتی‌متر جابجا می‌شود و 0.25×10^{9} ثانیه طول می‌کشد تا یک متر جابجا شود (حدود صد سال)

نکته: پدیده نفوذ در جامدات خیلی از واکنش‌ها سست و اصولاً یک پدیده کند است.

مثال - فرض کنید یک سلول کروی شکل داریم به شعاع r که غلظت ماده غذایی روی سطح آن برابر C_0 است.

بنابر قاعده فیک: $J = -D\nabla C = D\frac{C_0}{r}$

در نتیجه در واحد زمان جمعاً $JS = D\frac{C_0}{r} \times (4\pi r^2)$ وارد سلول می‌شود.

شار

اگر فرض کنیم میزان مصرف مواد غذایی سلول متناسب حجم سلول باشد پس،

$$\text{نرخ مصرف مواد غذایی} \approx \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{c}{c}$$

$$\frac{\text{نرخ ورود مواد غذایی}}{\text{نرخ مصرف مواد غذایی}} = \frac{DC_0 4\pi r}{\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{c}{c}} = 3DC_0 \frac{c}{r^2}$$

برای بقاء سلول باید نسبت بالا تقریباً برابر یک باشد.

$$3DC_0 \frac{c}{r^2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad c_0 \approx \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\Delta x}\right)^2$$

که Δx فاصله‌ای است که مولکول مواد غذایی در واحد زمان طی می‌کند.

اگر قرار باشد که یک سلول تنها با پدیده‌ی نفوذ رشد یابد حیطه‌ی مواد غذایی روی سطح آن متناسب توان دو شعاع آن باشد.

یکی از راهکارهای مقابله با پدیده کند بخش مناسب کردن شکل و اندازه فضا است. در مثال قبل اگر نسبت سطح به حجم افزایش یابد ماشدان است که ضریب بخش افزایش یافته است. (فرض D ثابت است)

راهکار دیگر تأثیر بُعد حرکت در بخش است به طور خلاصه برای اینکه یک مولکول فاصله L را طی کند

در بعد یک: $\tau_1 = \frac{(L-a)^2}{2D}$ واحد زمانی طول حرکت.

در بعد دو: $\tau_2 = \frac{L^2}{2D} \ln \frac{L}{a}$

در بعد سه: $\tau_3 = \frac{L^2}{2D} \frac{2}{3} \frac{L}{a}$

ریاضیات زیست

جلسه شانزده ۹۷/۲/۲

معادله‌ی گرما:

$$\partial_t c = D \Delta c$$

اگر فرض کنیم در صفحه تابع $c(x,t)$ شعاعی باشد یعنی $c = c(r,t)$ با استفاده از مختصات به قطبی معادله‌ی گرما به صورت

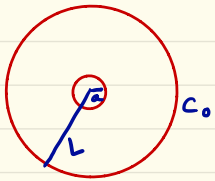
$$\partial_t c = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right)$$

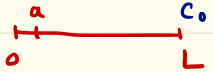
خواهد بود و همچنین در فضا با فرض شعاعی بودن تابع c معادله به

$$\partial_t c = \frac{D}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial c}{\partial R} \right)$$

تبدیل خواهد شد.

مسأله: فرض کنیم یک سلول یک بعدی، دوبعدی و سه بعدی داریم روی مرز سلول مواد غذایی با غلظت ثابت c_0 وجود دارد. شعاع سلول را L می‌گیریم و فرض است مواد غذایی با نفوذ پخش به مرکز سلول برسند. در مرکز سلول یک حفره به شعاع a فرض دارد که مواد غذایی را مصرف می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد را در ابعاد مختلف بررسی کنید.





بعد یک:

$$\partial_t c = D\,\partial_{xx} c$$

$$c(x,0) = 0 \quad , c(L,t) = c_0 \ , \quad c(a,t) = 0$$

برای ساده‌تر شدن مسئله فرض کنید $a = 0$. اگر

$$c_{ss}(x) = \frac{c_0 x}{L}$$

$$c(x,t) = c_{ss}(x) + \tilde{c}(x,t)$$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{c} = D\,\partial_{xx} \tilde{c} \\ \tilde{c}(L,t) = \tilde{c}(0,t) = 0 \\ \tilde{c}(x,0) = -c_{ss}(x) = -\frac{c_0 x}{L} \end{cases}$$

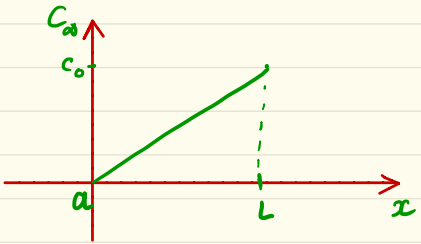
$$\tilde{C}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n' = -D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n \quad \Rightarrow \quad a_n(t) = a_n(0) \exp\left(-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

$$a_n(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{C}(x,0) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

$$C(x,t) = C_\infty(x) + \tilde{C}(x,t) = C_\infty(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \exp\left(-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\longrightarrow \quad C_\infty(x) = \frac{C_0 x}{L}$$



حال اگر فرض کنیم $a \neq 0$ جواب حدی معادله فوق عبارت از

$$C_\infty(x) = \frac{C_0(x-a)}{L-a}$$

تعداد کل مولکول‌های مواد غذایی که در داخل سلول وارد شده است:

$$N = \int_a^L C_\infty(x)\,dx = \frac{1}{2} C_0 (L-a)$$

شار ورودی سلول در حالت حدی:

$$J = D\nabla C = \frac{DC_0}{L-a}$$

زمان ارسال مواد غذایی:

$$\tau = \frac{N}{J} = \frac{(L-a)^2}{2D}$$

حد ۲:

$$\begin{cases} \partial_t C = \dfrac{D}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial C}{\partial r}\right) & a<r<L \\ C(L,t) = C_0\,,\quad C(a,t) = 0 \\ C(r,0) = 0 \end{cases}$$

به کمک روش جداسازی متغیرها:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial C}{\partial r}\right) = -\lambda C \\ C(a,t) = C(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right) = -\lambda r C \qquad (1)$$

معادله بسل $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

بسل مرتبه صفر $xy'' + y' + xy = 0$

اگر y جواب معادله بسل مرتبه صفر باشد، $c(r) = y(\sqrt{\lambda}(r-a))$ جواب معادله (۱) است به علاوه باید

$$c(a) = c(L) = 0$$
$$y(0) = 0 = y(\sqrt{\lambda}(L-a))$$

در واقع مقدار ویژه λ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\sqrt{\lambda}(L-a)$ ریشه تابع بسل $J_0(x)$ باشد.

اگر $\{\lambda_n\}$ به صورت فوق انتخاب شوند،

$$c_n(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n}(r-a))$$

یک پایه برای فضای $L^2[a,L]$ هستند.

$$c(r,t) = c_0 \frac{(r-a)}{L-a} + \tilde{c}(r,t)$$

$$\tilde{c}(L,t) = \tilde{c}(a,t) = 0 \quad , \quad \tilde{c}(r,0) = -c_0 \frac{(r-a)}{L-a}$$

$$c_t = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} c \right) \rightsquigarrow \partial_t \tilde{c} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{c} \right) + \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{c_0}{L-a} \right)$$

$$= \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{c} \right) + \frac{D c_0}{r(L-a)}$$

$$\tilde{c}(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, C_n(r)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\, C_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (-D\lambda_n)\, a_n(t)\, C_n(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n C_n(r)$$

$$\Rightarrow \quad a_n'(t) = -D\lambda_n a_n(t) + \beta_n$$

$$a_n(t) - \frac{\beta_n}{D\lambda_n} = \left[a_n(0) - \frac{\beta_n}{D\lambda_n} \right] \exp(-D\lambda_n t)$$

در نتیجه:

$$C(r,t) \longrightarrow \frac{C_0(r-a)}{L-a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{D\lambda_n} C_n(r) = C_\infty(r)$$

از طرفی باید:

$$\frac{\partial}{\partial t}C = \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C_\infty}{\partial r}\right) = 0 \\ C_\infty(L) = C_0 \ , \ C_\infty(a) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r\frac{\partial C_\infty}{\partial r} = A \quad \text{ثوابت}$$

$$\Rightarrow C_\infty(r) = A\ln r + B$$

$$A\ln a + B = 0 \ , \ A\ln L + B = C_0$$

$$B = -A\ln a \ , \ A\ln\frac{L}{a} = C_0$$

تعداد کل مولکولهای مواد غذایی که در داخل سلول وارد شده است:

$$N = 2\pi \int_a^L C_\infty(r)\, r\, dr = 2\pi \int_a^L (A \ln r + B)\, r\, dr$$

$$\approx \pi L^2 C_0 \qquad a \ll L$$

شار ورودی سلول در حالت حدی:

$$J = D \nabla C_\infty = D r \frac{\partial}{\partial r} C_\infty(L) = DA = \frac{D C_0}{\ln \frac{L}{a}}$$

زمان ارسال مواد غذایی:

$$\tau = \frac{N}{\int_{\partial B_L} J \cdot \vec{n}} = \frac{\pi L^2 C_0}{2\pi \frac{D C_0}{\ln \frac{L}{a}}} = \frac{L^2}{2D} \ln \frac{L}{a}$$

تمرین - محاسبه برای بعد ۳.

مثال-

شعاع باکتری $= a = 20\mu$

سرعت حرکت ماکروفاژ $= s = 3\mu/min$

زمان که یک ماکروفاژ در یک جهت ثابت حرکت می‌کند و بعد از آن تغییر مسیر می‌دهد. $= \epsilon = 5\ min$

$$D = \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\epsilon} = \frac{1}{2}s^2\epsilon = 22.5\ \mu^2/min$$

شعاع ناحیه‌ای که ماکروفاژ بازپخش شود. $= L = 2.8\times10^2\ \mu$

تعداد باکتری $= N = 1$

زمان که باکتری احتیاج دارد تا تکثیر شود. $= \tau = 5\ h$

اگر فرآیند پخش در فضای سه‌بعدی انجام شود، زمانی که احتیاج است تا باکتری از بین برود $\frac{L^2}{2D}\times\frac{2}{3}\frac{L}{a} \approx 2\times10^4\ min$

و در حالت دوبعدی $\frac{L^2}{2D}\ln\frac{L}{a} \approx 4.6\times10^3\ min$ و در حالت یک‌بعد $\frac{L^2}{2D} \approx 2\times10^3$

در واقع فرآیند بخش برای مهار کردن باکتری توسط ماکروفاژ حیاتی است. اگر آنگاه سرعت ماکروفاژ به سمت باکتری تعدیل شود که در این صورت زمان رسیدن به باکتری در حدود

$$\frac{L}{S} = \frac{2.8 \times 10^2}{3} \approx 1.5\ h$$

است. مکانیزم مهاجرت به سوی ماکروفاژ chemotaxi نامیده می‌شود.

مدل Keller-Segel.

$$\partial_t c = \underbrace{\operatorname{div}(D \nabla c)}_{\text{Random Motion}} - \underbrace{\operatorname{div}(\chi c \nabla u)}_{\text{Chemotaxi}}$$

u آنزیمی است که به بستار c تأثیر می‌گذارد. χ ثابت chemotaxi است و u در معادل بخش صدق می‌کند.

$$\partial_t u = \operatorname{div}(\mu \nabla u)$$

در تعادل جواب Steady - State به صورت زیر است:

$\partial_t c = 0 \Rightarrow D\partial_x c - \chi c \partial_x u = \text{ثابت}$ در بازه $[0, L]$

در نقطه $x=0$ هستیم داریم $c = \partial_x c = 0$ در نتیجه

$$D\partial_x c = \chi c \partial_x u \quad \text{in} \quad [0, L]$$

$$\Rightarrow \ln c(x) = \frac{D}{\chi} u(x) + a$$

$$\Rightarrow c(x) = \tilde{a} \exp\left(\frac{D}{\chi} u(x)\right) \quad \text{in } [0, L]$$

از طرفی اگر $\partial_t u = 0 \Leftarrow \partial_x u = \text{ثابت} \Leftarrow u(x) = \alpha x$

در نتیجه

$$c(x) = \tilde{a} \exp\left(\frac{D}{\chi} \alpha x\right)$$

که ثابت $\tilde{a}$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $c(L) = c_0$.

مقایسه کنید با حالت بخش محلولی که $C(x) = \frac{C_0 x}{L}$.

در حالت Chemotaxi

$$C(x) = C_0 \exp\left(r(x-L)\right)$$

که $r = \frac{D\alpha}{\chi}$.

$$\int_0^L C(x)\,dx = \frac{C_0}{r}\left[1 - \exp(-rL)\right]$$

ریاضیات زیست

جلسه هفده ۹۷/۲/۷

Reaction – Diffusion

$$u_t = \underbrace{\operatorname{div}(D\nabla u)}_{\text{پخش (انتشار)}} + \underbrace{f(u)}_{\text{واکنش}}$$

ساده‌ترین مدل: رشد خطی $f(u) = \alpha u$ در بعد یک در بازه $[0, L]$.

$$\begin{cases} u_t = D\,\partial_x^2 u + \alpha u \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \leftarrow \text{جمعیت در دو سر بازه صفر است} \\ u(x,0) = u_0(x) & \leftarrow \text{توزیع اولیه جمعیت} \end{cases}$$

می‌دانیم فرض کردیم

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n' = \left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D + \alpha \right] a_n \\ a_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \exp\left[\left(a - D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)t\right] \sin\frac{n\pi x}{L}$$

اگر $a < \frac{D\pi^2}{L^2}$ آنگاه $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

اگر $a > \frac{D\pi^2}{L^2}$ آنگاه $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \infty$.

اگر $a = \frac{D\pi^2}{L^2}$ آنگاه جواب $u(x,t)$ می‌تواند ∞ یا $u(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$ همگرا شود.

این پدیده مثل این است که در نقطه‌ی بحرانی $a = \frac{D\pi^2}{L^2}$ یک انشعاب داریم .

مسئله رشد خطی در بعد ۲:

$$\begin{cases} \partial_t u = D\,\Delta u + \mu u & 0<x<a\,,\ 0<y<b \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) & \\ \nabla u \cdot n = 0 & \text{روی مرز} \end{cases}$$

جریان جمعیت روی مرز ناحیه وجود ندارد ⟵ یا به عبارتی ناحیه ایزوله است.

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}(t)\ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

که $C_{m,n}(0)$ از توزیع اولیه $u_0(x,y)$ به دست می‌آید.

$$C'_{m,n} = \left(-D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] + \mu\right) C_{m,n}$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}(0)\ \exp\left[\mu t - D\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)t\right] \cos\frac{m\pi x}{a}\ \cos\frac{n\pi y}{b}$$

اگر $\mu < 0$ خواهیم داشت $u(x,y,t) \longrightarrow 0$.

برای $\mu > 0$ وابسته به توزیع اولیه رشد مجانبی جواب متفاوت است .

رشد خطی در فضای یک‌بعدی :

$$u_t = D u_{xx} + \mu u \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \delta_0(x)$$

در واقع فرض کردیم همه جمعیت در نقطه $x=0$ قرار دارند و کل جمعیت $\int u_0(x)dx = 1$ است .

اگر $\mu = 0$ جواب معادله بالا همان جواب اساسی معادله حرارت است :

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

و در حالت کلی

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(\mu t - \frac{x^2}{4Dt}\right)$$

اگر نقاط (x,t) را در نظر بگیریم که $p(x,t) = \tilde{p} =$ ثابت ،

$$\frac{x}{t} = \pm \left[4\mu D - \frac{2D}{t} \ln t - \frac{4D}{t} \ln \sqrt{2\pi D}\ \tilde{p} \right]^{1/2}$$

وقتی $t \to \infty$ ، می‌توان گفت که

$$\frac{x}{t} \approx \pm 2\sqrt{\mu D}$$

به تعبیری یک موج حرکتی جهت با جابجایی $\tilde{p}$ با سرعت $2\sqrt{\mu D}$ در ناحیه توزیع می‌شود .

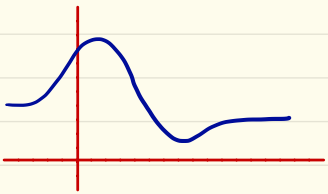
ریاضیات زیست

جلسه هجده ۹۷/۲/۹

معادله R-D با نرخ رشد لجستیک

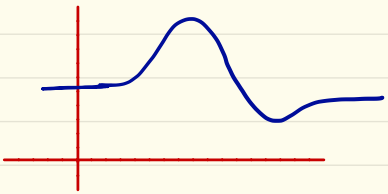
$$\partial_t u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u(1-u)$$

موج رونده (travelling wave) : جواب $u(x,t) = U(x-ct)$ برای ثابت c یک موج رونده برای معادله گفته می‌شود و c سرعت موج است.

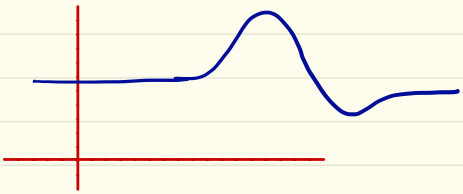


$t=0$

$u(x,0) = U(x)$



$u(x,1) = U(x-c)$



$u(x,2) = U(x-2c)$

$$U = U(\xi) \quad , \quad u(x,t) = U(x-ct)$$

$$u_t = -c\, U_\xi(x-ct) \quad , \quad u_{xx} = U_{\xi\xi}(x-ct)$$

$$u_t = D u_{xx} + \alpha u(1-u) \quad \Rightarrow \quad -c U_\xi = D U_{\xi\xi} + \alpha U(1-U)$$

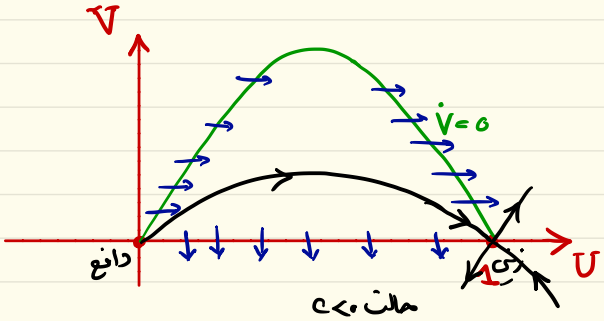
چون مقدار 1 ظرفیت محیط برای جمعیت در نظر گرفته شده است در نتیجه باید $0 \le u(x,t) \le 1$ و همچنین $0 \le U(\xi) \le 1$ باشد.

$$\begin{cases} U_\xi = V \\ V_\xi = -\frac{c}{D} V - \frac{\alpha}{D} U(1-U) \end{cases}$$

نقاط تعادل این دستگاه عبارتند از $(U,V) = (0,0), (1,0)$

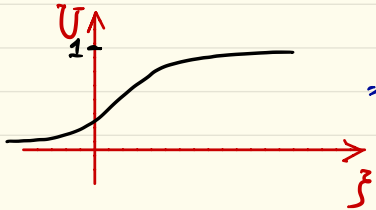
$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha}{D} & -\frac{c}{D} \end{bmatrix} \qquad det = \frac{\alpha}{D} > 0 \ , \ tr = -\frac{c}{D}$$

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{D} & -\frac{c}{D} \end{bmatrix} \qquad \det < 0$$

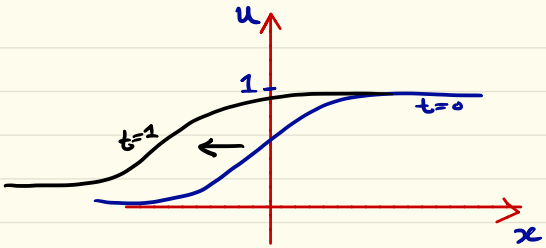


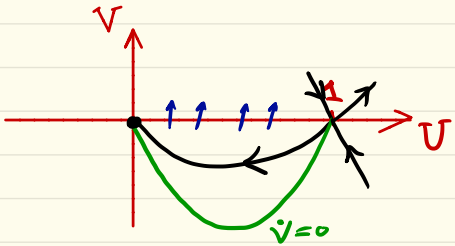
اگر $c<0$ ، هیچ $\dot{V}=0$ به صورت $\dot{V} = -\frac{\alpha}{c}U(1-U)$

قضیه: اگر $|c| > 2\sqrt{\alpha D}$ آنگاه مداری وجود دارد که دو نقطه تعادلی $(0,0)$ و $(1,0)$ را به هم وصل می‌کند.

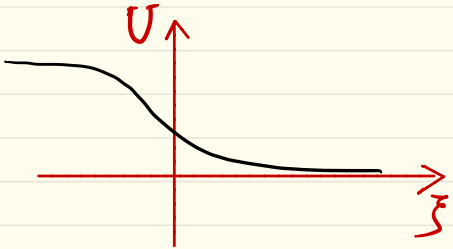


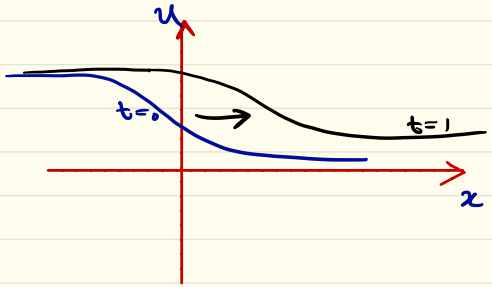
با توجه به اینکه $c<0$ است نمودار حقابل به سمت چپ حرکت می‌کند





حالت $c>0$. نقطه $(0,0)$ جاذب می‌شود





توزیع اولیه جهت تعیین می‌کند که کدام از این دو جواب مناسب مسئله ارائه شده است .

مثال - چگالی سلول‌ها $n(x,t)$

چگالی گلوکز $g(x,t)$

$$\partial_t n = D_0 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + k n (g - g_0)$$

g_0 کمترین مقدار گلوکز مورد نیاز سلول برای رشد است.

$$\partial_t g = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - c k n (g - g_0)$$

فرض کنیم ضریب پخش سلول‌ها خیلی کوچکتر از ضریب پخش گلوکز باشد. می‌گذاریم $D_0 = 0$.

$$\tilde{g} = g - g_0 \implies \begin{cases} \partial_t n = k n \tilde{g} \\ \partial_t \tilde{g} = D \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2} - c k n \tilde{g} \end{cases}$$

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا معادلات بالا جواب موج رونده دارند؟

$$n(x,t) = N(x - vt) \quad , \quad \tilde{g}(x,t) = G(x - vt)$$

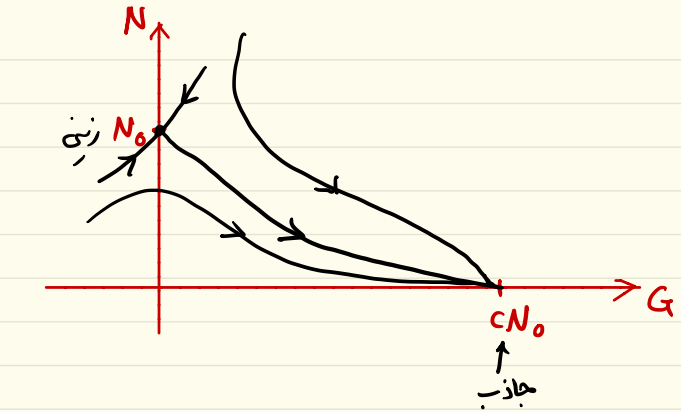
$$\begin{cases} -v N' = k N G \\ -v G' = D G'' - c k N G \end{cases}$$

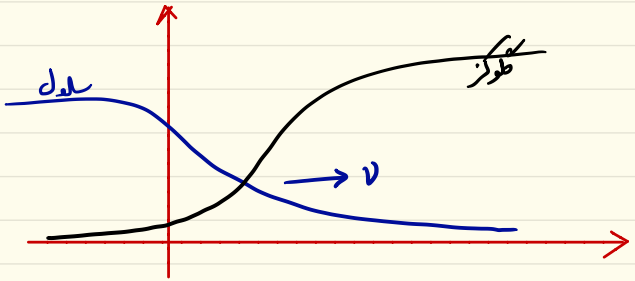
$$\Rightarrow \quad -cvN' - vG' = DG'' \quad \xRightarrow{\int_{-\infty}^{\xi}}$$

$$-cvN(\xi) + cvN(-\infty) - vG(\xi) + vG(-\infty) = DG'(\xi) - DG'(-\infty)$$

اگر حالت را در نظر بگیریم که غلظت گلوکز در $+\infty$ یک مقدار ثابت مشخص داشته باشد و در $-\infty$ صفر باشد،
و همچنین تجمع سلول‌ها در $-\infty$ برابر ثابت N_0 باشد و در $+\infty$ صفر باشد، آنگاه

$$\begin{cases} DG'(\xi) = -cvN(\xi) + cvN_0 - vG(\xi) \\ -vN'(\xi) = -kN(\xi)G(\xi) \end{cases}$$


N
N_0
زیر
G
cN_0
جاذب


طول
ν

ریاضیات زیست

جلسه نوزده ۹۷/۲/۱۶

شکل‌گیری الگو (Pattern Formation)

مدل شکل‌گیری جلبک: پدیده Chemotaxi است با آزیم cAMP.

$a(x,t)$ = چگالی سلولهای جلبک

$c(x,t)$ = غلظت cAMP

χ = ضریب chemotaxi

f = نرخ تولید cAMP توسط هر سلول جلبک

k = نرخ ازبین رفتن cAMP در طبیعت

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[J_{random} + J_{chemo}\right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\mu \frac{\partial a}{\partial x} + \chi a \frac{\partial c}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[J_{diffusion}\right] + Sources$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[-D \frac{\partial c}{\partial x}\right] + fa - kc$$

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu \dfrac{\partial a}{\partial x} - \chi a \dfrac{\partial c}{\partial x}\right] \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D \dfrac{\partial c}{\partial x}\right) + fa - kc \end{cases}$$

شرایط مرزی: فرض می‌کنیم این پدیده زیستی در یک محیط ایزوله انجام می‌شود. یعنی شار ورودی یا خروجی روی مرز نداریم.

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \qquad \text{روی مرز}$$

سیستم فوق دارای حالت تعادل $a(x,t) = \bar{a}$ و $c(x,t) = \bar{c}$ است که

$$f\bar{a} = k\bar{c}$$

شکل کلی الگوی تحمیلی جلبکی نتیجه ناپایداری حالت تعادل سیستم است.

تعریف پایداری:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + \alpha u =: \tilde{L}u$$

$$\tilde{L} : C^2(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega)$$

$\lambda \in Spec(L)$ طیف عملگر L را می‌نامیم هرگاه

(۱) $Nul(L-\lambda I) \neq \{0\}$ یعنی $L-\lambda I$ یک به یک نیست و تابع u وجود دارد که $Lu = \lambda u$.
در این حالت λ مقدار ویژه و u تابع ویژه است.

(۲) $L-\lambda I$ یک به یک است ولی پوشا نیست. در این حالت λ را طیف اساسی می‌نامیم.

قضیه: طیف عملگر $Lu = div(D(x)\nabla u)$ فقط شامل مقدار ویژه است و به صورت دنباله

$$\dots \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

است که $\lambda_n \to -\infty$. به علاوه توابع ویژه این عملگر یک پایه برای فضای $L^2(\Omega)$ تشکیل می‌دهند.

نکته - $\mathrm{Spec}(\Delta + \alpha I) = \{ \cdots \leq \lambda_3 + \alpha \leq \lambda_2 + \alpha < \lambda_1 + \alpha \}$

روش حل معادله $u_t = Lu$ به کمک توابع ویژه.

اگر $\{\lambda_n\}$ مقدار ویژه و $\{\varphi_n\}$ توابع ویژه باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\varphi_n(x)$$

و با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) L\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\lambda_n \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad a_n'(t) = \lambda_n a_n(t) \Rightarrow \quad a_n(t) = e^{t\lambda_n} a_n(0)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{t\lambda_n} a_n(0)\varphi_n(x) =: e^{tL} u_0$$

قضیه: اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه L منفی باشند آنگاه $u \equiv 0$ پایدار مجانبی است. یعنی $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = 0$

برای هر جواب معادله $u_t = Lu$.

تذکر: اگر عملگر L خودالحاق باشد، آنگاه طیف آن حقیقی است.

پایداری معادلات غیرخطی:

$$u_t = Lu + f(u) \qquad (2)$$

فرض کنید $u = \bar{u}(x)$ یک حالت تعادل باشد. آنگاه $\bar{u}(x)$ پایدار است به این معنا که

$\varepsilon > 0$ وجود دارد که اگر $\| u_0(x) - \bar{u}(x) \|_{L^2} < \varepsilon$

آنگاه جواب (2) با شرط اولیه $u(x,0) = u_0(x)$ در همسایگی $\bar{u}(x)$ باقی می‌ماند.

و اگر $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \bar{u}(x)$ آنگاه $\bar{u}(x)$ را پایدار مجانبی گوییم.

قضیه: $\bar{u}(x)$ جواب پایدار مجانبی (1) است، هرگاه عدد ثابت $\alpha > 0$ وجود داشته باشد که

طیف عملگر خطی $L u + f'(\bar{u}(x))\, u$ در ناحیه $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \le \alpha < 0\}$ واقع شود.

بررسی پایداری دستگاه (1).

معادله خطی‌سازی حول نقطه $(\bar{a}, \bar{c})$ سیستم روبرو به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu \dfrac{\partial a}{\partial x} - \chi \bar{a} \dfrac{\partial c}{\partial x}\right] \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D \dfrac{\partial c}{\partial x}\right) + fa - kc \end{cases}$$

برای محاسبه مقادیر ویژه این عملگر باید دستگاه زیر حل شود:

$$(3)\quad \begin{cases} \mu \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \chi \bar{a} \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \lambda a \\ D \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + fa - kc = \lambda c \end{cases}$$

با شرایط مرزی $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=0,L} = 0$

به کمک سری فوریه می‌توانیم وارد هم:

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

باید مقدار λ را بیابیم که متناظر آن دنباله $\{a_n\}$ و $\{c_n\}$ وجود داشته باشند که (3) برقرار باشد.

معادل این است که

$$\begin{cases} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mu a_n + \chi\bar{a}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c_n = \lambda a_n \\ -D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c_n + f a_n - k c_n = \lambda c_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A_n - \lambda I)\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mu & \chi\bar{a}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ f & -D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k \end{bmatrix}$$

جمع‌بندی: λ مقدار ویژه (3) است $\Leftrightarrow$ به ازای لااقل یک عدد n، λ مقدار ویژه ماتریس A_n است.

در این صورت تابع ویژه متناظر λ، $\begin{pmatrix} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \\ c_n \cos\frac{n\pi x}{L} \end{pmatrix}$ است که $\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$ بردار ویژه A_n است.

شرط پایداری حالت تعادل $(\bar{a}, \bar{c})$ برای دستگاه (1) این است که

$$\operatorname{tr} A_n < 0 \quad , \quad \det A_n > 0 \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

دقت کنید $\operatorname{tr} A_n < 0$ برای هر n. در نتیجه:

نتیجه: $(\bar{a}, \bar{c})$ ناپایدار است اگر به ازای لااقل یک عدد n، $\det A_n < 0$.

یا به طور معادل به ازای لااقل یک عدد n $\quad \mu\left[D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k\right] < f'(\bar{a})$

یا به عبارتی برای $n=1$.

شرط ناپایداری $\leftarrow$ $\boxed{\mu\left(D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + k\right) < f'(\bar{a})}$

با توجه به نکته‌ای که برای حل معادلات به کمک توابع ویژه گفته شد، می‌دانیم که

$$\partial_t \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} a(x,t) \\ c(x,t) \end{pmatrix} = \sum_n \alpha_n(0)\, e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\chi \bar{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \beta & D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - K \end{pmatrix}$$

که $L \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$ و $\alpha_n(0)$ از بسط شرط اولیه محاسبه می‌شوند.

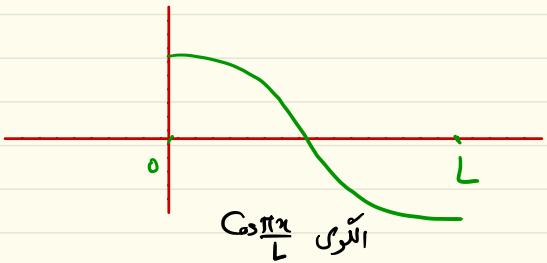
با توجه به مطالب قبل λ_n باید در $\det(A_n - \lambda_n I) = 0$ صدق کند و $\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \cos\frac{n\pi x}{L} \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a(x,t) \\ c(x,t) \end{pmatrix} = \sum_n e^{\lambda_n t}\, \alpha_n(0) \cos\frac{n\pi x}{L} \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

* تذکر: مقدار λ_n می‌تواند مختلط باشد که در این صورت بردار ویژه متناظر $\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$ نیز چنین است.

فرض کنید $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$ و قسمت حقیقی بقیه مقادیر ویژه منفی هستند در این صورت

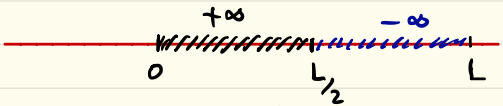
$$a(x,t) \approx e^{\lambda_1 t} \alpha_{(1)} \cos\frac{\pi x}{L} \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \qquad t \to \infty \text{ وقتی}$$



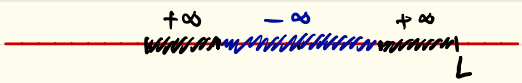
$\cos\frac{\pi x}{L}$ الگوی



$\cos\frac{2\pi x}{L}$ الگوی



رفتار جانبی وقتی $t \to \infty$



رفتار مجانبی متناظر $\cos\frac{2\pi x}{L}$ وقتی $t \to \infty$

ریاضیات زیست

جلسه بیست ۹۷/۲/۲۱

ناپایداری Turin

دو ماده شیمیایی در حال واکنش هستند که اگر فقط میل جهتی این دو را نگاه کنیم به یک نقطه تعادل پایدار $(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ می‌رسند:

$$(ODE)\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial t} = R_1(C_1, C_2) \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} = R_2(C_1, C_2) \end{cases}$$

اگر این مواد علاوه بر واکنش فوق با diffusion جابجایی نیز داشته باشند، حال تعادل $(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ ناپایداری می‌شود. و این ناپایداری باعث شکل گیری یک الگو در سیستم خواهد شد.

$$(PDE)\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + R_1(C_1, C_2) \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + R_2(C_1, C_2) \end{cases}$$

شرط مرزی نیومن در بازه $(0, L)$ در نظر می‌گیریم.

$(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ در هر دو معادله ODE و PDE صدق می‌کند.

شرط پایداری در ODE:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = \left.\frac{\partial R_i}{\partial C_j}\right|_{\bar{C}_1, \bar{C}_2}$$

1- $a_{11} + a_{22} < 0$

2- $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0$

شرط ناپایداری (PDE) .

خطی‌سازی PDE در نقطه $(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad \partial_t C = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \partial_x^2 C + MC$$

با توجه به شرایط مرزی نیومن C_1 و C_2 هرکدام بسط فوریه کسینوسی دارند و با جایگزینی مانند حالت قبل مقادیر ویژه را محاسبه کرد. برای سادگی فرض می‌کنیم $C(x,t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cos qx\, e^{\lambda t}$ و در معادله فوق جایگزین می‌کنیم

$$\lambda e^{\lambda t} \cos qx \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (-q^2) \cos qx\, e^{\lambda t} + M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cos qx\, e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \left[M + \begin{pmatrix} -D_1 q^2 & 0 \\ 0 & -D_2 q^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$\left(q = \frac{n\pi}{L} \text{ برازای } n = 0, 1, 2, \cdots \right)$

$$A_q = \begin{pmatrix} a_{11} - q^2 D_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - q^2 D_2 \end{pmatrix}$$

مقادیر ویژه عملگر دیفرانسیلی، مقادیر ویژه ماتریس

هستند به ازای q های مختلف.

شرط ناپایداری: به ازای لااقل یک q، ماتریس A_q مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت داشته باشد.

دقت کنید $\operatorname{tr} A_q = a_{11} + a_{22} - q^2(D_1 + D_2)$

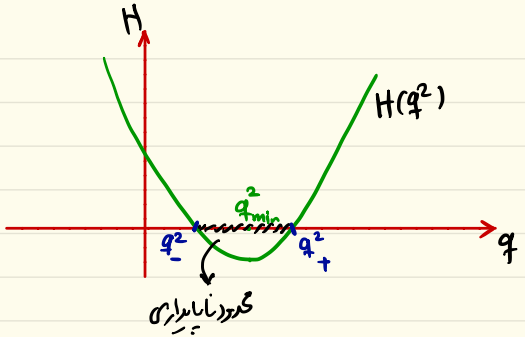
که با توجه به شرط (1) همیشه منفی دارد. در نتیجه وجود یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت معادل است با:

به ازای لااقل یک مقدار q. $0 > \det A_q = (a_{11} - q^2 D_1)(a_{22} - q^2 D_2) - a_{12} a_{21}$

$$= (D_1 D_2) q^4 - (a_{11} D_2 + a_{22} D_1) q^2 + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$:= H(q^2)$$

بنابر شرط (2) مثبت است.





$$q^2_{min} = \frac{a_{11}D_2 + a_{22}D_1}{2D_1D_2}$$

شرط ناپایداری : $H(q^2_{min}) < 0$

(3) $$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < \frac{(a_{11}D_2 + a_{22}D_1)^2}{4D_1D_2}$$

به شرطی که $a_{11}D_2 + a_{22}D_1 > 0$ در غیر اینصورت همواره $H(q^2)$ مثبت است.

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \end{pmatrix} \cos\frac{n\pi x}{L} \underset{t\to\infty}{\sim} \sum_{q_- < \frac{n\pi}{L} < q_+} e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \end{pmatrix} \cos\frac{n\pi x}{L}$$

به طور خلاصه شرایط تحقق ناپایداری Turin:

$$1- \quad a_{11} + a_{22} < 0$$

$$2- \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

$$3- \quad 2\sqrt{D_1 D_2}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)^{1/2} < a_{11}D_2 + a_{22}D_1$$

① از شرط (1) نتیجه می‌شود لااقل کدام از a_{11} یا a_{22} باید منفی باشد. به عنوان مثال $a_{22} < 0$. یعنی $\frac{\partial R_2}{\partial c_2} < 0$

در واقع ماده دوم نسبت به خودش مهاری (inhibitor) است.

② شرط (3) که $0 < a_{11}D_2 + a_{22}D_1$ و فرض $a_{22} < 0$ نتیجه می‌دهد که $a_{11} > 0$. به عبارتی a_{22}, a_{11} نمی‌توانند هم علامت باشند. در واقع ماده اول نسبت به خودش فعال‌کننده (activator) است.

③ نتیجه قبل که $a_{11}a_{22} < 0$ به کمک شرط (2) نتیجه می‌دهد $a_{12}a_{21} < 0$.

دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

Activator-Inhibitor $a_{12} < 0$, $a_{21} > 0$ $M = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$

Positive Feedback $a_{12} > 0$ $a_{21} < 0$ $M = \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$

(4)

$a_{22} < 0 < a_{11}$. $a_{11} + a_{22} < 0$ شرط (1)

$a_{11} D_2 + a_{22} D_1 > 0$ شرط (3)

در نتیجه باید $D_1 < D_2$.

واردصید $\tau_1 = \frac{1}{|a_{11}|}$ ، $\tau_2 = \frac{1}{|a_{22}|}$ که واحد آنها (time) است.

شرط (3) را به این صورت میتوان بازنویسی کرد $D_1 \tau_1 < D_2 \tau_2$

$\sqrt{D_1\tau_1}$ و $\sqrt{D_2\tau_2}$ را به‌عنوان دامنه فعال‌سازی یا مهارکنندگی تعبیر می‌شوند.

برای شکل‌گیری الگو باید دامنه مهارکنندگی ماده مهاری بیشتر از دامنه فعال‌سازی ماده فعال‌کننده باشد.

شکل‌گیری الگو در ابعاد بالاتر:

$$\begin{cases} \partial_t C_1 = D_1 \Delta C_1 + R_1(C_1, C_2) \\ \partial_2 C_2 = D_2 \Delta C_2 + R_2(C_1, C_2) \end{cases}$$

با شرط مرزی نیومن در ناحیه $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$.

$$0 = \partial_x C_i(0, y) = \partial_x C_i(L_1, y) = \partial_y C_i(x, 0) = \partial_y C_i(x, L_2)$$

با توجه به این شرط مرزی $\{C_i$ در بازه $\left\{ \cos\frac{n\pi x}{L_1} \cos\frac{m\pi y}{L_2} \right\}_{m,n=1}^{\infty}$ بسط داده می‌شوند.

برای محاسبه مقادیر ویژه دستگاه، ناپایداری

$$C_i(x,y,t) = \alpha_i e^{\lambda t} \cos q_1 x \cos q_2 y$$

در معادله خطی‌شده، مقدار λ را پیدا می‌کنیم.

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (q_1^2 + q_2^2) + M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

اگر $Q^2 = q_1^2 + q_2^2$ ، باید مقادیر ویژه ماتریس

$$M - \begin{pmatrix} D_1 Q^2 & 0 \\ 0 & D_2 Q^2 \end{pmatrix}$$

را پیدا کنیم. شرط ناپایداری مشابه قبل این است که $H(q^2_{min}) < 0$.

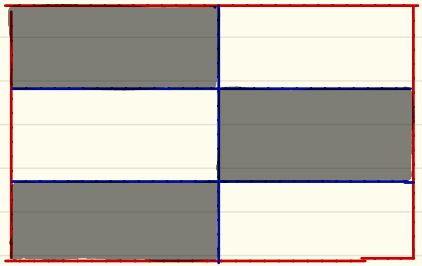
اگر (q_-^2, q_+^2) بازه‌ای باشد که H روی آن مثبت است، آنگاه همه $\cos q_1 x \cos q_2 y$ هایی که تشکیل الگوی دهند که

$$q_-^2 < q_1^2 + q_2^2 < q_+^2$$

$$\begin{pmatrix} C_1(x,t) \\ C_2(x,t) \end{pmatrix} = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{\lambda_{mn} t} \cos\frac{n\pi x}{L_1} \cos\frac{m\pi y}{L_2} \begin{pmatrix} \alpha_1^{mn} \\ \alpha_2^{mn} \end{pmatrix}$$

$$\sim \sum_{t\to\infty} e^{\lambda_{mn}} \cos\frac{n\pi x}{L_1} \cos\frac{m\pi y}{L_2} \begin{pmatrix} \alpha_1^{mn} \\ \alpha_2^{mn} \end{pmatrix}$$

$$\frac{q_-^2}{\pi^2} < \left(\frac{n}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_2}\right)^2 < \frac{q_+^2}{\pi^2}$$



$$\cos\frac{\pi x}{L_1} \cos\frac{2\pi y}{L_2}$$

ریاضیات زیست

جلسه بیست و یک ۹۷/۲/۲۳

بررسی کیفی مدلهای PDE

معادلات Lotka-Volterra

$n_i(t,x)$ جمعیت گونه i-ام را نشان می‌دهد $1 \le i \le N$

$$(1) \qquad \frac{\partial n_i}{\partial t} = \underbrace{D_i \Delta n_i}_{\text{Random Motion}} - \operatorname{div}\big(\underbrace{U_i}_{\text{سرعت حرکت}} n_i\big) + n_i \underbrace{R_i}_{\text{نرخ رشد گونه } i\text{-ام}}$$

در واقع R_i تقابل همه گونه‌های دیگر با گونه i-ام را بیان می‌کند. در ساده‌ترین حالت

$$R_i(n_1, \dots, n_N) = r_i + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} n_j$$

r_i: نرخ رشد گونه i-ام در غیاب گونه‌های دیگر

c_{ij}: ضریب تأثیر گونه j-ام روی گونه i-ام

گونه i شکار باشد و گونه j شکارچی آن گاه باید $c_{ij} < 0 \ , \ c_{ji} > 0$

در رابطه رقابتی $c_{ij} \ , \ c_{ji} < 0$

و در رابطه همزیستی $c_{ij} \ , \ c_{ji} > 0$

گزاره ۱: فرض کنید داده‌های اولیه $n_i^0 = n_i(0,x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ نامنفی باشند و $U_i \equiv 0$. به علاوه تابع موضعاً کران دار $P(t)$ وجود دارد به طوری که

$$|R_i(t,x)| \leq P(t)$$

در این صورت دستگاه (1) جواب ضعیف در $C(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$ دارد که $n_i(t,x) \geq 0$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}^+$.

اصل ماکسیمم برای معادله گرما: اگر تابع $u(t,x)$ در رابطه $u_t - \Delta u \leq 0$ در ناحیه $[0,T]\times\Omega$ صدق کند. در این صورت

$$\max_{(t,x)\in[0,T]\times\bar{\Omega}} u(t,x) = \max_{\Gamma} u(t,x) \qquad (2)$$

که $\Gamma = (\{0\}\times\bar{\Omega}) \cup ([0,T]\times\partial\Omega)$.

گزاره بالا به اصل ماکسیمم ضعیف موسوم است و اگر $u_t - \Delta u \geq 0$ به جای ماکسیمم، می‌نیمم را قرار دهیم.

اصل ماکسیمم قوی: اگر نقطه درونی $x_0 \in \Omega$ وجود داشته باشد که

$$u(t_0,x_0) = \max_{(t,x)\in[0,T]\times\bar{\Omega}} u(t,x)$$

آنگاه $u(t,x) = u(t_0,x_0)$ برای هر

$$x\in\bar{\Omega},\quad t<t_0$$

نسخه دیگری از اصل ماکسیمم : فرض کنید $u_t - \Delta u \le c u$

که $c(t,x) \ge 0$. در این صورت اگر ماکسیمم u در $[0,T] \times \Omega$ مثبت باشد، آنگاه رابطه (2) برقرار است. در حالت $u_t - \Delta u \ge cu$، تابع u می‌تواند منفی خود را روی مرز بگیرد. (در این حالت نیز باید $c(t,x) \ge 0$.)

اگر بدانیم که $u(0,x) \ge 0$ ، $u(t,x) \ge 0$ برای $x \in \partial\Omega$. آنگاه همیشه ماکسیمم u نامنفی است و نتیجه بالا برقرار است. در این حالت مثبت بودن ضریب c لازم نیست. تنها شرط لازم کران داری آن است.

اگر $|c(t,x)| \le M$ قرار دهید $v(t,x) = e^{tM} u(t,x)$

$$v_t - \Delta v = \left(M e^{tM} u + e^{tM} u_t\right) - e^{tM} \Delta u$$

$$\le e^{tM} \left[Mu + cu \right] = (M+c) v$$

اثبات گزاره I :

$$\partial_t n_i - D_i \Delta n_i = n_i R_i$$

تابع $(n_i)_- = \max(0, -n_i)$ را در معادله بالا ضرب کرده و انتگرال بگیرید :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (n_i)_- \partial_t n_i - D_i \Delta n_i \cdot (n_i)_- \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} n_i R_i (n_i)_- \, dx$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \left[(n_i)_-\right]^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^d} D_i |\nabla (n_i)_-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} R_i (n_i)_-^2$$

$$\leq \Gamma(t) \int_{\mathbb{R}^d} (n_i)_-^2 \, dx$$

اگر $e(t) = \int_{\mathbb{R}^d} (n_i)_-^2 \, dx$ رابطه بالا نشان می دهد که $\frac{d}{dt} e(t) \leq 2 \Gamma(t) e(t)$

$$\Longrightarrow \quad e(t) \leq e(0) \exp\left[\int_0^t 2\Gamma(s) \, ds\right]$$

چون در لحظه $t=0$ ، $n_i(0,x) \geq 0$ بنابراین $e(0) = 0$ و در نتیجه $e(t) = 0$ یعنی $(n_i)_- = 0$

یا به عبارتی $n_i(t,x) \geq 0$.

خاصیت یکنوایی برای سیستم های هرزتی

$$\partial_t n_i - D\Delta n_i = n_i R_i \qquad 1 \leq i \leq 2$$

وقتی سیستم هرزتی : $\frac{\partial R_1}{\partial n_2} \geq 0$ ، $\frac{\partial R_2}{\partial n_1} \geq 0$

گزاره II . در یک سیستم هرزتی اگر (n_1, n_2) و (m_1, m_2) دو جواب باشند به طوری که

i) $0 \leq n_i \leq \rho^1$ ، $0 \leq m_i \leq \rho^1$

ii) $|R_i| \leq \rho^2$ $\quad 1 \leq i \leq 2$

iii) $\left|\frac{\partial}{\partial n_i} R_j\right| \leq \rho^3$ $\quad 1 \leq i,j \leq 2$

در این صورت اگر $n_i(0,x) \le m_i(0,x)$ برای $i \le 2$ آنگاه

$$n_i(t,x) \le m_i(t,x) \qquad \forall t \ge 0$$

اثبات.

$$\partial_t (n_1 - m_1) - D_1 \Delta (n_1 - m_1) = n_1 R_1(n_1, n_2) - m_1 R_1(m_1, m_2)$$

$$= (n_1 - m_1) R_1(n_1, n_2) + m_1 \left[R_1(n_1, n_2) - R_1(m_1, m_2) \right]$$

$$= (n_1 - m_1) R_1(n_1, n_2) + m_1 \left[(n_1 - m_1)\, \partial_1 R_1(n_1^*, n_2^*) + (n_2 - m_2) \partial_2 R_1(n_1^*, n_2^*) \right]$$

$$\le \left(r^2 + r^1 r^3 \right) (n_1 - m_1) + r^1 r^3 (n_2 - m_2)$$

عبارت بالا را در $(n_1 - m_1)_+$ ضرب کنید.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}[(n_1-m_1)_+]^2 \le (\rho^2+\rho'\rho^3)\int_{\mathbb{R}^d}[(n_1-m_1)_+]^2 dx + \rho'\rho^3\int_{\mathbb{R}^d}(n_2-m_2)_+(n_1-m_1)_+$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}[(n_2-m_2)_+]^2 \le (\rho^2+\rho'\rho^3)\int_{\mathbb{R}^d}[(n_2-m_2)_+]^2 dx + \rho'\rho^3\int_{\mathbb{R}^d}(n_2-m_2)_+(n_1-m_1)_+$$

که اگر همه را با هم جمع کنیم و قرار دهیم: $e(t) = \int_{\mathbb{R}^d}[(n_1-m_1)_+]^2+[(n_2-m_2)_+]^2\,dx$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}e(t) \le (\rho^2+\rho'\rho^3)e(t) + 2\rho'\rho^3\int_{\mathbb{R}^d}(n_1-m_1)_+(n_2-m_2)_+$$

$$\le (\rho^2+\rho'\rho^3)e(t) + \rho'\rho^3\left[\int_{\mathbb{R}^d}[(n_1-m_1)_+]^2+[(n_2-m_2)_+]^2\,dx\right.$$

$$\le C\,e(t)$$

چون $e(0)=0$ پس $e(t)=0$ برای هر $t\geq 0$.

ریاضیات زیست

جلسه بیست و دو ۹۷/۲/۳۰

روش اغتشاش (Perturbation)

بازهن اینکه دستگاه معادلات $\partial_t u_i = D_i \Delta u_i$ در اطراف $u_i \equiv 0$ پایدار است.

می‌خواهیم بررسی کنیم تحت چه شرایطی $\partial_t u_i = D_i \Delta u_i + F_i$ نیز به $u_i \equiv 0$ پایدار می‌شود.

$$(*) \begin{cases} \partial_t u_i = D_i \Delta u_i + F_i(t,x;u_1,\cdots,u_N) & 1 \le i \le N \\ u_i(t,x) = 0 & x \in \partial\Omega \\ u_i(0,x) = u_i^0(x) \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

قضیه: فرض کنید $\min_{1\le i\le N} D_i = D > 0$ و ثابت $L>0$ وجود داشته باشد که

(1) $$\sum_{i=1}^{N} F_i(t,x;u)\, u_i \le L\,|u|^2$$

(2) $$\delta = D\lambda_1 - L > 0$$

اگر λ_1 اولین مقدار ویژه عملگر لاپلاس در Ω باشد،

در این صورت $\int_\Omega |u(t,x)|^2 dx \le e^{-2\delta t} \int_\Omega |u^0(x)|^2$.

نکته - شرط (1) ضعیف‌تر از شرط $|F(t,x;u)| \le L|u|$ که

$$F = (F_1, \cdots, F_N)$$

نکته - می‌دانیم که اولین تابع ویژه عملگر لاپلاس یک تابع مثبت است که

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \lambda_1 w_1 & \text{in } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

به علاوه می‌دانیم

$$\lambda_1 = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx}$$

در نتیجه نامساوی

$\lambda_1 \int v^2 dx \le \int |\nabla v|^2 dx$ برقرار است که به آن نامساوی پوانکاره می‌گوییم .

اثبات قضیه: اگر معادله را در u_i ضرب کنیم و از آن انتگرال بگیریم:

$$u_i \partial_t u_i = D_i u_i \Delta u_i + u_i F_i$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_i^2 = -D_i \int_\Omega |\nabla u_i|^2 + \int u_i F_i \le -D_i \lambda_1 \int u_i^2 + \int u_i F_i$$

اگر از $i=1,\dots,N$ را با هم جمع کنیم $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\int_\Omega |u|^2}_{\varphi(t)} \le -D\lambda_1 \int_\Omega |u|^2 + L\int_\Omega |u|^2$$

$$= -\delta \int_\Omega |u|^2$$

$$\varphi' \le -2\delta\varphi \Rightarrow \varphi(t) \le e^{-2\delta t}\varphi(0)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |u(t,x)|^2 dx \le e^{-2\delta t} \int_\Omega |u^\circ(x)|^2 dx$$

تذکر: اگر به دنبال نتیجه مشابه برای شرط مرزی نیومن باشیم باید دقت کنیم که در مسأله مقدار ویژه

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

برای اولین مقدار ویژه داریم $\lambda_1 = 0$ و $w_1(x) \equiv 1$ تابع ثابت است. در این حالت نامساوی پوانکاره به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\lambda_2 \int_\Omega |v(x) - \langle v \rangle|^2 \, dx \le \int_\Omega |\nabla v|^2 \qquad v \in C^1(\Omega)$$

که λ_2 دومین مقدار ویژه برای شرط مرزی نیومن است و منظور از $\langle v \rangle$، میانگین تابع v است.

$$\langle v \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x) \, dx$$

قضیه: فرض کنید در (*) با شرط مرزی نیومن $\partial_\eta u_i = 0$، تابع $F_i = F_i(t;u)$ مستقل از x باشد.

به علاوه $\min_{1\le i\le N} D_i = D > 0$ و ثابت $L > 0$ وجود داشته باشد که

$$(1) \qquad \big(F(t;u) - F(t,v)\big)\cdot(u-v) \le L\,|u-v|^2$$

$$(2) \qquad \delta := D\lambda_2 - L > 0$$

آنگاه $u_i(t,x)$ به یک جواب هموژن در دامنه همگرا است و

$$\int_\Omega \big|u(t,x) - \langle u(t)\rangle\big|^2 dx \le e^{-2\delta t} \int_\Omega |u^0(x) - \langle u^0\rangle|^2 dx$$

اثبات - ابتدا از معادله میانگین گیری کنید :

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \quad \partial_t u_i = D_i \Delta u_i + F_i(t,u)$$

$$\frac{d}{dt}\langle u_i\rangle = \langle F_i\rangle = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} F_i(t,u(t,x))\,dx$$

(دقت کنید $\int_{\Omega}\Delta u_i = 0$ به دلیل شرط مرزی نیومن)

$$\partial_t\left[u_i - \langle u_i\rangle\right] = D_i\,\Delta\left[u_i - \langle u_i\rangle\right] + F_i - \langle F_i\rangle$$

تنها t وابستگی

رابطه بالا را در $u_i - \langle u_i\rangle$ ضرب کرده و انتگرال بگیرید:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u-\langle u\rangle|^2\,dx \le -D\int_{\Omega}|\nabla(u-\langle u\rangle)|^2 + \int_{\Omega}(F-\langle F\rangle)\cdot(u-\langle u\rangle)$$

$$\int_{\Omega}\langle F\rangle\cdot(u-\langle u\rangle) = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\langle F_i\rangle(u_i-\langle u_i\rangle) = 0$$ در نتیجه $0 = \int_{\Omega} u_i - \langle u_i\rangle\,dx$ دقت کنید

به طور مشابه

$$\int_{\Omega} F(t;\langle u\rangle)\cdot(u-\langle u\rangle)\,dx = 0$$

در نتیجه با به کمک نامساوی پوانکاره داریم:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u-\langle u\rangle|^2\,dx \le -D\lambda_2\int_{\Omega}|u-\langle u\rangle|^2\,dx + \int_{\Omega}\big(F(t;u)-F(t;\langle u\rangle)\cdot(u-\langle u\rangle)$$

$$\le (L-D\lambda_2)\int_{\Omega}|u-\langle u\rangle|^2\,dx$$

روش آنتروپی :

واکنش شیمیایی بین مواد $S_1, \dots, S_N$.

$$a_1 S_1 + \cdots + a_N S_N \underset{K_-}{\overset{K_+}{\rightleftharpoons}} b_1 S_1 + \cdots + b_N S_N$$

$a_i, b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

اگر غلظت S_i را با $n_i(t,x)$ نشان دهیم :

$$\partial_t n_i - D_i \Delta n_i = b_i K_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i} - a_i K_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i}$$

$$+ a_i K_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i} - b_i K_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i}$$

$$= (b_i - a_i)\left[K_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i} - K_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i}\right]$$

تابع زیر یک آنتروپی برای این سیستم است:

$$S(t,x) = \sum_{i=1}^{N} n_i \left[\ln(n_i) + \sigma_i - 1 \right]$$

که σ_i ها بگونه‌ای انتخاب می‌شوند (هر چند انتخاب آنها یکتا نیست) که

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i (a_i - b_i) = \ln K_+ - \ln K_-$$

گزاره:

$$\frac{d}{dt} \int S(t,x)\, dx = - \sum_{i=1}^{N} D_i \int \frac{|\nabla n_i|^2}{n_i} dx - D(t,x) \leq 0$$

$$0 \leq D(t,x) := \int_{\Omega} \left[\ln\left(K_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i} \right) - \ln\left(K_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i} \right) \right] \left[K_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i} - K_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i} \right] dx$$

مثال-

$$O_2 \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftharpoons}} O + O$$

$n_1 = [O_2]$ ، $n_2 = [O]$

$$\begin{cases} \partial_t n_1 - D_1 \Delta n_1 = k_- (n_2)^2 - k_+ n_1 \\ \partial_t n_2 - D_2 \Delta n_2 = 2k_+ n_1 - 2k_- (n_2)^2 \end{cases}$$

دامنه $\Omega = \mathbb{R}^d$ یا Ω کراندار با شرط مرزی نیومن

$b_2 = 2$, $a_2 = b_1 = 0$ ، $a_1 = 1$

$$\sigma_1 (a_1 - b_1) + \sigma_2 (a_2 - b_2) = \ln k_+ - \ln k_-$$

$$\sigma_1 - 2\sigma_2 = \ln k_+ - \ln k_-$$

$$S(t,x) := n_1 \left[\ln (k_+ n_1) - 1 \right] + n_2 \left[\ln (k_-^{1/2} n_2) - 1 \right]$$

$$\partial_t [2n_1 + n_2] - \Delta [2D_1 n_1 + D_2 n_2] = 0$$ -آنتروپی

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_\Omega 2n_1 + n_2 \, dx = 0 \Rightarrow \int 2n_1(t,x) + n_2(t,x) \, dx = \int 2n_1^0(x) + n_2^0(x) \, dx$$

نتیجه:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega S(t,x)\,dx = -\int_\Omega \left[D_1\frac{|\nabla n_1|^2}{n_1} + D_2\frac{|\nabla n_2|^2}{n_2}\right]dx$$

$$-\int_\Omega \left[\ln(K_-(n_2)^2) - \ln(K_+ n_1)\right]\left[K_-(n_2)^2 - K_+ n_1\right]dx$$

$$\Rightarrow \quad S(t,x) = S(t,0) - \int_0^t \int_\Omega D_1\frac{|\nabla n_1|^2}{n_1} + D_2\frac{|\nabla n_2|^2}{n_2} + \cdots$$

از طرفی تابع آنتروپی $S(t,x)$ از بالا کران دار است (بنابه تعریف آن در صورت مثال)

نتیجه ثابت $C(K_+, K_-)$ وجود دارد که

$$\int_0^\infty \int_\Omega D_1\frac{|\nabla n_1|^2}{n_1} + D_2\frac{|\nabla n_2|^2}{n_2} + \left[\ln(K_-(n_2)^2) - \ln(K_+ n_1)\right]\left[K_-(n_2)^2 - K_+ n_1\right]dx\,dt \le C$$

نتیجه $\lim_{t\to\infty} \frac{|\nabla n_i|^2}{n_i} = 0 = \lim_{t\to\infty} K_- n_2^2 - K_+ n_1$

ریاضیات زیست

جلسه بیست و سه ۹۷/۳/۴

انفجار جمعیت.

اگر یک مدل ODE برای جمعیت به صورت $\dot{z}(t) = z(t)^q$

$$z(t)^{1-q} - z(0)^{1-q} = (1-q)t$$

اگر $q > 1$ و $z(0) > 0$ معادله فوق تا زمان $t < T = \frac{z(0)^{1-q}}{1-q}$ تعریف شده و

$$\lim_{t \to T} z(t) = \infty$$

تعریف- در یک مدل جمعیتی اگر در زمان متناهی کل جمعیت به بی‌نهایت میل کند، پدیده انفجار جمعیت رخ داده است.

مثال -

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^2 & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \end{cases}$$

قضیه - اگر u_0 به اندازه کافی بزرگ باشد (؟) آنگاه در یک زمان T^* انفجار جواب رخ می‌دهد،

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \infty \qquad \text{as } t \longrightarrow T^*$$

اثبات به کمک تکنیک تابع ویژه :

فرض کنید w_1 اولین تابع ویژه $-\Delta$ در Ω با شرط مرزی

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \lambda_1 w_1 & \text{in } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

که λ_1 اولین مقدار ویژه است. می‌دانیم $w_1(x) > 0$ در Ω. به علاوه فرض کنید $\int_\Omega w_1^2(x)\,dx = 1$.

معادله را در w_1 ضرب کنید و انتگرال بگیرید :

$$\frac{d}{dt}\int u(x,t)\,\omega_1(x)\,dx = \int \Delta u(x,t)\,\omega_1(x)\,dx + \int [u(x,t)]^2\,\omega_1(x)\,dx$$

$$\int_\Omega \Delta u\,\omega_1 - u\,\Delta\omega_1 = \int_{\partial\Omega} \partial_n u\,\omega_1 - u\,\partial_n\omega_1 \quad \text{:فرمول گرین}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)\,\omega_1(x)\,dx = \int u(x,t)\,\underbrace{\Delta\omega_1}_{-\lambda_1\omega_1}\,dx + \int [u(x,t)]^2\,\omega_1(x)\,dx$$

$$\geq -\lambda_1 \int u(x,t)\,\omega_1\,dx + \left[\int u(x,t)\omega_1(x)\,dx\right]^2 \underbrace{\left[\int \omega_1^2\,dx\right]^{-1}}_{1}$$

$$z(t) = \int_\Omega u(x,t)\,\omega_1(x)\,dx \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}z(t) \geq -\lambda_1 z(t) + z(t)^2$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left[e^{\lambda_1 t} z\right]}_{r(t)} \geq e^{-\lambda_1 t}\left[e^{\lambda_1 t} z(t)\right]^2$$

$$\frac{\dot{r}}{r^2} \geq e^{-\lambda_1 t}$$

$$\Rightarrow \quad -r^{-1}(t) + r^{-1}(0) \geq \int_0^t e^{-\lambda_1 s}\, ds = \frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}$$

$$r(t) \geq \left[r^{-1}(0) - \frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} \right]^{-1}$$

اگر $r^{-1}(0) > \frac{1}{\lambda_1}$ آنگاه T^* وجود دارد که $\lim_{t \to T^*} r(t) = \infty$.

$$\Rightarrow \lim_{t \to T^*} z(t) = \infty . \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega u(x,t)\, w_1(x)\, dx \xrightarrow{t \to T^*} \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\int (u(x,t))^2 dx \right]^{1/2} \underbrace{\left[\int (w_1(x))^2 dx \right]^{1/2}}_{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to T^*} \int (u(x,t))^2 dx = \infty$$

اصل مقایسه در ODE : در نامعادله $\dot{x} \geq f(x,t)$ که $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ لیپشیتز است.

اگر $\dot{y} = f(y,t)$ که $y(0) = x(0)$ آنگاه

$x(t) \geq y(t)$ برای $t \geq 0$.

$$\frac{dz}{dt} \geq -\lambda_1 z + z^2$$

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda_1 y + y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 - \lambda_1 y} = t$$

$$\frac{y(t)-\lambda_1}{y(t)} = \frac{y(0)-\lambda_1}{y(0)} e^{\lambda_1 t} \Leftarrow \ln\left(\frac{y(t)-\lambda_1}{y(0)-\lambda_1}\right) - \ln\left(\frac{y(t)}{y(0)}\right) = \lambda_1 t$$

$$z(t) \geq y(t) = \lambda_1 \left[1 - \frac{z(0)-\lambda_1}{z(0)} e^{\lambda_1 t}\right]^{-1} \quad , \quad y(0) = z(0)$$

اگر $z(0) > \lambda_1$ آنگاه برای یک T^* وقتی $t \to T^*$ ، $z(t) \to \infty$.

قضیه: اگر u_0 به اندازه کافی کوچک باشد، در واقع $u_0(x) \le \left[\min_{y\in\Omega} \frac{\lambda_1}{\omega_1(y)}\right] \omega_1(x)$،

آنگاه حداقل فوق جواب سراسری دارد، یعنی $u(x,t)$ برای هر t تعریف می‌شود.

اثبات - $\tilde{\omega}(x) := \left[\min_{y\in\Omega} \frac{\lambda_1}{\omega_1(y)}\right] \omega_1(x)$ و $v(x,t) = u(x,t) - \tilde{\omega}(x)$

دقت کنید $v(x,0) \le 0$ و $v(x,t) = 0$ برای $x \in \partial\Omega$.

برای اثبات از اصل ماکسیمم استفاده می‌کنیم:

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - \Delta\tilde{\omega} = u^2 - \lambda_1 \tilde{\omega} \le u^2 - \tilde{\omega}^2$$
$$= [u-\tilde{\omega}][u+\tilde{\omega}]$$

$$\Rightarrow \quad v_t - \Delta v \le [u+\tilde{\omega}]\, v$$

اگر $u+\tilde{u}$ کران‌دار باشد می‌توانیم از اصل ماکسیمم استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که

$$u(x,t) \le \tilde{w}(x) \qquad (*)$$

با وضع شرطی که قبلاً گفته‌ایم $u(x,t) \ge 0$، نتیجه می‌شود که می‌توان جواب PDE را برای هر زمان t تر بعد داد.

دقت کنید به دلیل ترکیب $(*)$ اگر u تا زمان t_1 تعریف شده باشد، PDE زیر

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^2 \\ u(x,t_1) = u_1(x) \end{cases}$$

برای حداقل بازه $t \in [t_1, t_1+\varepsilon]$ جواب تعریف می‌شود که ε به نرم $\|u_1\|_{L^2}$ ربط دارد.

به دلیل $(*)$ می‌توان نتیجه گرفت که جواب PDE برای هر $t \ge 0$ تعریف شده است.