به نام او

امتحان پایان ترم درس ریاضیات زیستی وقت امتحان: ۳ ساعت ۹۸/۴/۲

---

۱. مدت زمانی که یک سلول دایره‌ای دو بعدی لازم دارد که تنها با فرآیند پخش تغذیه شود را محاسبه کنید. شعاع سلول، R، شعاع هسته سلول، a، غلظت مواد غذایی رو محیط سلول مقدار ثابت c_0 و ضریب پخش مواد غذایی D است.

۲. معادله واکنشی_انتشاری

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-\alpha)$$

را برای ثابت $1 > \alpha > 0$ در ناحیه $-\infty < x < \infty$ در نظر بگیرید. منظور از یک جواب موج رونده برای این معادله چیست؟ ایده کلی اثبات وجود چنین جوابی را بنویسید. نشان دهید علامت سرعت موج رونده هم‌علامت با مقدار انتگرال $\int_0^1 f(s)ds$ است که $f(s) = s(1-s)(s-\alpha)$.

۳. الف_ مقادیر ویژه عملگر خطی

$$\mathcal{L}(u,v) = \begin{bmatrix} D_1 u_{xx} - v_{xx} \\ D_2 v_{xx} + u - v \end{bmatrix}$$

با دامنه $\{(u,v) : u_x(0) = v_x(0) = u_x(1) = v_x(1) = 0\}$ را محاسبه کنید.

ب_ به کمک آن شرایط پایداری حالت تعادل $(u,v) = (1,1)$ در پدیده انتقال شیمیایی زیر را بررسی کنید.

$$\begin{cases} u_t = \partial_x(D_1 u_x - u v_x) \\ v_t = D_2 v_{xx} + u - v \end{cases}$$

ج_ مدل فوق بیانگر شکل گیری چه الگوهایی می‌تواند باشد.

۴. یک مدل واکنشی_انتشاری برای فرآیند

$$O_2 \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} O + O$$

بنویسید و یک تابع آنتروپی برای آن معرفی کنید. (باید نشان دهید که تابع معرفی شده در شرط آنتروپی صدق می‌کند.)

۵. مدل رقابتی زیر را در ناحیه $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t - D_1 \Delta u = u R_1(u,v) \\ v_t - D_2 \Delta v = v R_2(u,v), \end{cases}$$

که در آن $\partial_v R_1 \le 0$ و $\partial_u R_2 \le 0$. نشان دهید در این سیستم ترتیب جمعیتی $u_2 \le u_1 \le 0$ و $v_1 \le v_2 \le 0$ در همه زمانها حفظ می‌شود. (هر گونه شرط کرانداری برای مساله لازم است در نظر بگیرید.)

موفق باشید.