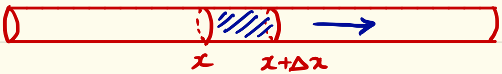
ریاضیات زیست

جلسه پانزده ۹۷/۱/۳۱

معادلات اصل بقاء (Conservation Law)

مثال ۱ :



قانون اصل بقاء :

$$\left(\text{میزان تغییرات ذرات در فاصله } (x, x+\Delta x)\right) = \left(\text{میزان ذرات ورودی در بازه } (x, x+\Delta x)\right) - \left(\text{میزان ذرات خروجی از بازه } (x, x+\Delta x)\right) \pm \left(\text{مقدار مرگ و میر یا تولد در داخل بازه } (x, x+\Delta x)\right)$$

$c(x,t) =$ چگالی ذرات در نقطه x در زمان t

$J(x,t) =$ شار حرکتی ذرات در نقطه x در زمان t

$\sigma(x,t) =$ مقدار متوسط مرگ و میر یا تولد در واحد زمان در لحظه t و نقطه x

$A =$ سطح مقطع ناحیه

کل جمعیت ذرات در بازه $(x, x+\Delta x)$ در زمان t $= \int_x^{x+\Delta x} c(y,t)\,dy$

قانون تعادل به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_x^{x+\Delta x} c(y,t)A\,dy\right] = \underbrace{J(x,t)A}_{\text{شار ورودی}} - \underbrace{J(x+\Delta x,t)A}_{\text{شار خروجی}} \pm \int_x^{x+\Delta x} \sigma(y,t)A\,dy$$

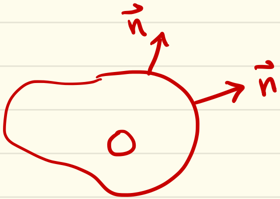
$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left[C(x,t)A\right] = \frac{J(x,t)A - J(x+\Delta x,t)A}{\Delta x} \pm \left(\sigma(x,t)A\right)$$

اگر A ثابت باشد آنگاه: معادله اصل تعادل

$$\boxed{\partial_t C = -\frac{\partial}{\partial x}J \pm \sigma}$$

اگر سطح مقطع A در نقاط مختلف متفاوت باشد یا حتی در زمان‌های مختلف شکل ناحیه تغییر کند. فرض می‌کنیم
در لحظه t در نقطه x سطح مقطع ناحیه $A(x,t)$ باشد. آنگاه از رابطه (1) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(C(x,t)A(x,t)\big) = -\frac{\partial}{\partial x}\big(J(x,t)\,A(x,t)\big) \pm \big(\sigma(x,t)\,A(x,t)\big)$$



معادله اصل بقای در ابعاد بالاتر:

ناحیه O حول نقطه x در نظر بگیرید و $\vec{n}$ بردار عمود برونگرای مرز ناحیه O.

کل جمعیت در ناحیه O در لحظه t $= \int_O C(x,t)\,dx$

قانون بقای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_O C(x,t)\,dx = \underbrace{-\int_{\partial O} (J\cdot\vec{n})\,dA}_{\text{کل شار ورودی منهای خروجی را اندازه می‌گیرد.}} \pm \int_O \sigma(x,t)\,dx \qquad (2)$$

نکته: علامت $(-)$ پشت انتگرال $\int_{\partial O}(J\cdot\vec{n})\,dA$ برای این است که $\vec{n}$ بردار عمود برونگرای ∂O است

و حاصل انتگرال فوق شار ورودی نهایی خروجی است.

از طرفی بنابر قضیه استوکس:

$$\int_{O}(\operatorname{div} J)\,dx = \int_{\partial O}(J\cdot\vec{n})\,dA$$

با جایگذاری در رابطه (2) و با توجه به اینکه ناحیه O دلخواه است نتیجه می‌شود که

معادله اصل بقای در حجم ابعاد:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}c(x,t) = -\operatorname{div} J \pm \sigma(x,t)}$$

به جمله $\sigma(x,t)$ واکنش (Reaction) گفته می‌شود. فعلاً فرض کنیم این عبارت برابر صفر است و تغییرات

جمعیت صرفاً بر اثر جابجایی ذرات تحت شار J انجام می‌شود.

برای مدل کردن شار J دو روش کلاسیک وجود دارد.

۱- (Convection)

فرض بر این است که جهت بر اثر نیروی بیرونی با سرعت $V(x,t)$ در حال حرکت است. در نتیجه

$$J(x,t) = \underbrace{c(x,t)}_{\text{چگالی}} \underbrace{V(x,t)}_{\text{سرعت}}$$

و معادله اصل بقاء به صورت

$$\frac{\partial}{\partial t} c = -\operatorname{div}(cV)$$

۲- (Diffusion) پخش:

بر اثر حرکتهای مولکولی ذرات به صورت تصادفی در فضا جهت پخش می‌شود.

قاعده فیک (Fick's law): جهت از نقاط با چگالی بالا به سمت نقاطی که کمترین چگالی را دارد حرکت می‌کند یعنی

$$J = -D \nabla c$$

که D ضریب پخش نامیده می‌شود.

که در این صورت معادله بقاء به صورت

$$\frac{\partial}{\partial t} c = -\operatorname{div} J = \operatorname{div}(D \nabla c)$$

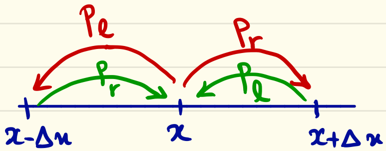
اگر $D = D(x,t)$ مقدار آن همیشه ثابت باشد، معادله به صورت ساده

$$\partial_t C = D \, \Delta C$$

خواهد بود که به معادله حرارت معروف است.

توجیه قاعده Fick :

فرض کنیم در فاصله یک بعدی قرار داریم و هر مولکول با احتمال P_r از نقطه x در واحد زمان τ به نقطه $x+\Delta x$ حرکت می‌کند و با احتمال P_ℓ به نقطه $x-\Delta x$ می‌رود.



$$C(x, t+\tau) = C(x,t)\left[1 - P_r - P_\ell\right] + P_r \, C(x-\Delta x, t) + P_\ell \, C(x+\Delta x, t)$$

با فرض اینکه $P_r = P_l = 1/2$ خواهیم داشت :

$$C(x,t+\tau) = \frac{1}{2}\Big[C(x-\Delta x,t) + C(x+\Delta x,t)\Big] \qquad (3)$$

$$C(x,t+\tau) = C(x,t) + \tau \frac{\partial C}{\partial t}(x,t) + O(\tau^2)$$

$$C(x\pm\Delta x,t) = C(x,t) \pm \Delta x \frac{\partial C}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x,t) + O((\Delta x)^3)$$

با جایگذاری تقریب‌های بالا در معادله (3) خواهیم داشت :

$$\tau \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \rightsquigarrow \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

که $D = \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\tau}$ ضریب پخش است. (یادآوری: فرض کردیم هر ذره در واحد زمان τ به اندازه Δx حرکت کند)

ضریب پخش اکسیژن

در آب در دمای $18^{\circ}C$ $\quad 1.98 \times 10^{-5} \frac{cm^2}{sec}$

" " $25^{\circ}C$ $\quad 2.41 \times 10^{-5} \frac{cm^2}{sec}$

یعنی به طور تقریب در ده ثانیه 2×10^{-3} سانتی‌متر جابجایی رخ دهد 0.25×10^{9} ثانیه طول می‌کشد تا یک متر جابجا شود (حدود صد سال)

نکته: پدیده پخش به تنهایی جوابگوی خیلی از واکنش‌ها نیست و اصولاً یک پدیده کند است.

مثال - فرض کنید یک سلول کروی شکل داریم به شعاع r که غلظت ماده غذایی روی سطح آن برابر C_0 است.

بنابر قاعده فیک:
$$J = -D\nabla C = D\frac{C_0}{r}$$

در نتیجه در واحد زمان جمعیت
$$\underset{\text{سطح}}{J S} = D\frac{C_0}{r} \times (4\pi r^2)$$
وارد سلول می‌شود.

اگر فرض کنیم میزانِ مصرف مواد غذاییِ سلول متناسب حجم سلول باشد پس،

$$\text{نرخ مصرف مواد غذایی} \approx \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\tau}$$

$$\frac{\text{نرخ ورودی مواد غذایی}}{\text{نرخ مصرف مواد غذایی}} = \frac{D C_0\, 4\pi r}{\frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\tau}} = 3 D C_0 \frac{\tau}{r^2}$$

برای ثبات سلول بایدِ نسبت بالا تقریباً برابر یک باشد.

$$3 D C_0 \frac{\tau}{r^2} \approx 1 \quad \Longrightarrow \quad c_0 \approx \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\Delta x}\right)^2$$

که Δx فاصله ای است که مولکول مواد غذاییِ در واحد زمان طی می کند.

اگر قرار باشد که یک سلول تنها با پدیدهٔ پخش تغذیه شود بایدِ حجمِ مواد غذاییِ روی سطح آن متناسب توان دو شعاع آن باشد.

یکی از راهکارهای مقابله با پدیده کند پخش متناسب کردن شکل و اندازه فضا است. در مثال قبل اگر نسبت سطح به حجم افزایش یابد ماندگاری کمتر است که ضریب پخش افزایش یافته است. (فرض D ثابت است)

راهکار دیگر تأثیر بعد حرکت در پخش است به طور خلاصه برای اینکه یک مولکول فاصله L را طی کند

در بعد یک: $$\tau_1 = \frac{(L-a)^2}{2D}$$ واحد زمانی طول میکشد.

در بعد دو: $$\tau_2 = \frac{L^2}{2D} \ln \frac{L}{a}$$

در بعد سه: $$\tau_3 = \frac{L^2}{2D} \frac{2}{3} \frac{L}{a}$$

ریاضیات زیست

جلسه شانزده ۹۷/۲/۲

معادله پخش :

$$\partial_t c = D \Delta c$$

اگر فرض کنیم در صفحه تابع $c(x,t)$ شعاعی باشد یعنی $c = c(r,t)$ با تغییر مختصات به قطبی معادله پخش به صورت

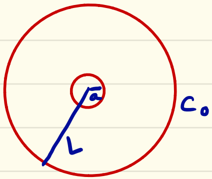
$$\partial_t c = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial c}{\partial r}\right)$$

خواهد بود و همچنین در فضا با فرض شعاعی بودن تابع c معادله به

$$\partial_t c = \frac{D}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial c}{\partial R}\right)$$

تبدیل خواهد شد.

مسأله: فرض کنیم یک سلول یک بعدی، دوبعدی و سه بعدی داریم روی مرز سلول مواد غذایی با غلظت ثابت c_0 وجود دارد.
شعاع سلول را L می‌گیریم و قرار است مواد غذایی با فرآیند پخش به مرکز سلول برسند. در مرکز سلول یک حفره به شعاع a
قرار دارد که مواد غذایی را مصرف می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد را در ابعاد مختلف می‌سنجیم.



بعد یک:

$$\partial_t c = D\,\partial_{xx} c$$

$$c(x,0)=0 \quad , c(L,t)=c_0 \quad , \quad c(a,t)=0$$

برای سادگی قرار دهید $a=0$. آنگاه

$$C_\infty(x) = \frac{c_0 x}{L}$$

$$c(x,t) = C_\infty(x) + \tilde{c}(x,t)$$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{c} = D\,\partial_{xx}\tilde{c} \\ \tilde{c}(L,t) = \tilde{c}(0,t) = 0 \\ \tilde{c}(x,0) = -C_\infty(x) = -\dfrac{c_0 x}{L} \end{cases}$$

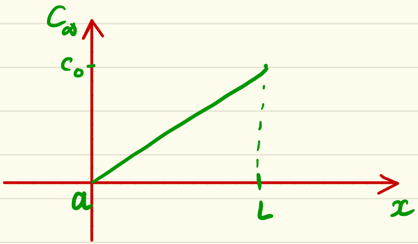
$$\tilde{C}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n' = -D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n \Rightarrow a_n(t) = a_n(0)\exp\left(-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

$$a_n(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{C}(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$C(x,t) = C_\infty(x) + \tilde{C}(x,t) = C_\infty(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\exp\left(-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\longrightarrow C_\infty(x) = \frac{c_0 x}{L}$$



حال اگر فرض کنیم $a \neq 0$ جواب حدی معادله فوق عبارت است از

$$C_\infty(x) = \frac{c_0(x-a)}{L-a}$$

تعداد کل مولکولهای مواد غذایی که در داخل سلول وارد دارد:

$$N = \int_a^L C_\infty(x)\,dx = \frac{1}{2} C_0 (L-a)$$

شار ورودی سلول در حالت حدی:

$$J = D \nabla C = \frac{D C_0}{L-a}$$

زمان ارسال مواد غذایی:

$$\tau = \frac{N}{J} = \frac{(L-a)^2}{2D}$$

بعد ۲:

$$\begin{cases} \partial_t C = \dfrac{D}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial C}{\partial r}\right) & a < r < L \\ C(L,t) = C_0 , \quad C(a,t) = 0 \\ C(r,0) = 0 \end{cases}$$

به کمک روش جداسازی متغیرها:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial C}{\partial r}\right) = -\lambda C \\ C(a,t) = C(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial C}{\partial r}\right) = -\lambda r C \qquad (1)$$

معادله بسل $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

بسل مرتبه صفر $xy'' + y' + xy = 0$

اگر y جواب معادله بسل مرتبه صفر باشد، $c(r) = y(\sqrt{\lambda}\,(r-a))$ جواب معادله (1)

است به علاوه باید
$$c(a) = c(L) = 0$$
$$y(0) = 0 = y(\sqrt{\lambda}\,(L-a))$$

در واقع مقدار ویژه λ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\sqrt{\lambda}\,(L-a)$ ریشه تابع بسل $J_0(x)$ باشد.

اگر $\{\lambda_n\}$ به صورت فوق انتخاب شوند،
$$c_n(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n}\,(r-a))$$

یک پایه برای فضای $L^2[a,L]$ هستند.

$$c(r,t) = c_0 \frac{(r-a)}{L-a} + \tilde{c}(r,t)$$

$$\tilde{c}(L,t) = \tilde{c}(a,t) = 0 \quad , \quad \tilde{c}(r,0) = -c_0 \frac{(r-a)}{L-a}$$

$$c_t = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} c \right) \rightsquigarrow \partial_t \tilde{c} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{c} \right) + \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{c_0}{L-a} \right)$$

$$= \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{c} \right) + \frac{D c_0}{r(L-a)}$$

$$\tilde{c}(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, C_n(r)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\, C_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (-D\lambda_n)\, a_n(t)\, C_n(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n C_n(r)$$

$$\Rightarrow \quad a_n'(t) = -D\lambda_n a_n(t) + \beta_n$$

$$a_n(t) - \frac{\beta_n}{D\lambda_n} = \left[a_n(0) - \frac{\beta_n}{D\lambda_n} \right] \exp(-D\lambda_n t)$$

در نتیجه :

$$C(r,t) \longrightarrow \frac{C_0(r-a)}{L-a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{D\lambda_n} C_n(r) = C_\infty(r)$$

از طرفی باید :

$$\frac{\partial}{\partial t}C = \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial C_\infty}{\partial r}\right) = 0 \\ C_\infty(L) = C_0 \;,\; C_\infty(a) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r\frac{\partial C_\infty}{\partial r} = A \quad \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow \quad C_\infty(r) = A\ln r + B$$

$$A\ln a + B = 0 \;,\; A\ln L + B = C_0$$

$$B = -A\ln a \qquad , \; A\ln\frac{L}{a} = C_0$$

تعداد کل مولکولهای مواد غذایی که در داخل سلول وارد دارد:

$$N = 2\pi \int_a^L C_\infty(r)\, r\, dr = 2\pi \int_a^L (A \ln r + B)\, r\, dr$$

$$\approx \pi L^2 C_0 \qquad a \ll L$$

شار ورودی سلول در حالت حدی:

$$J = D \nabla C_\infty = D \frac{\partial}{\partial r} C_\infty(L) = DA = \frac{D C_0}{\ln \frac{L}{a}}$$

زمان ارسال مواد غذایی:

$$\tau = \frac{N}{\int_{\partial B_L} J \cdot \vec{n}} = \frac{\pi L^2 C_0}{2\pi \frac{D C_0}{\ln \frac{L}{a}}} = \frac{L^2}{2D} \ln \frac{L}{a}$$

تمرین - محاسبه برای بعد ۳.

مثال- $\text{شعاع باکتری} = a = 20\mu$

$\text{سرعت حرکت ماکروفاژ} = s = 3\mu/min$

$\text{زمانی که یک ماکروفاژ در یک جهت ثابت حرکت می‌کند و بعد از آن تغییر مسیر می‌دهد.} = \epsilon = 5\ min$

$$D = \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\tau} = \frac{1}{2}s^2\epsilon = 22.5\ \mu^2/min$$

$\text{شعاع ناحیه‌ای که ماکروفاژ باید بخش شود.} = L = 2.8\times10^2\ \mu$

$\text{تعداد باکتری} = N = 1$

$\text{زمانی که باکتری احتیاج دارد تا تکثیر شود.} = \tau = 5\ h$

اگر فرآیند پخش در فضای سه‌بعدی انجام شود، زمانی که احتیاج است تا باکتری از بین برود $2\times10^4\ min \approx \frac{L^2}{2D}\times\frac{2}{3}\frac{L}{a}$

و در حالت دوبعدی $\frac{L^2}{2D}\ln\frac{L}{a} \approx 4.6\times10^3\ min$ و در حالت یک بعد $\frac{L^2}{2D} \approx 2\times10^3$

درواقع فرآیند پخش برای مهار کردن باکتری توسط ماکروفاژ خیلی کند است مگر آنکه مسیر حرکت ماکروفاژها به سمت باکتری تعیین شود که در این صورت زمان رسیدن به باکتری در حدود

$$\frac{L}{S} = \frac{2.8\times 10^{2}}{3} \approx 1.5\ h$$

است. مکانیزم جهت‌دهی به حرکت ماکروفاژ chemotaxi نامیده می‌شود.

مدل Keller-Segel .

$$\partial_t c = \underbrace{\operatorname{div}(D\nabla c)}_{\text{Random Motion}} - \underbrace{\operatorname{div}(\chi c \nabla u)}_{\text{Chemotaxi}}$$

u آنزیمی است که به شار c تأثیر می‌گذارد. χ ثابت chemotaxi است و u در معادله پخش صدق می‌کند.

$$\partial_t u = \operatorname{div}(\mu \nabla u)$$

در بعد یک جواب Steady-State به صورت زیر است:

در بازه $[0,L]$ $\quad \partial_t c = 0 \Rightarrow D\,\partial_x c - x c\,\partial_x u =$ ثابت

در نقطه $x=0$ همیشه داریم $c = \partial_x c = 0$ در نتیجه

$$D\,\partial_x c = x c\,\partial_x u \quad \text{in } [0,L]$$

$$\Rightarrow \ln c(x) = \frac{D}{x} u(x) + a$$

$$\Rightarrow c(x) = \tilde{a} \exp\left(\frac{D}{x} u(x)\right) \quad \text{in } [0,L]$$

از طرف دیگر $\partial_t u = 0 \Rightarrow \partial_x u =$ ثابت $\Rightarrow u(x) = \alpha x$

در نتیجه

$$c(x) = \tilde{a} \exp\left(\frac{D}{x} \alpha x\right)$$

که ثابت $\tilde{a}$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $c(L) = c_0$.

مقایسه کنید با حالت پخش معمولی که $C(x) = \frac{C_0 x}{L}$.

در حالت Chemotaxi

$$C(x) = C_0 \exp\left(r(x-L)\right)$$

که $r = \frac{D\alpha}{x}$.

$$\int_0^L C(x)\,dx = \frac{C_0}{r}\left[1 - \exp(-rL)\right]$$

ریاضیات زیست

جلسه هفده ۹۷/۲/۷

Reaction – Diffusion

$$u_t = \underbrace{\operatorname{div}(D\nabla u)}_{\text{بخش انتشار}} + \underbrace{f(u)}_{\text{واکنش}}$$

ساده‌ترین مدل : رشد خطی $f(u) = \alpha u$. در بعد یک در بازه $[0,L]$.

$$\begin{cases} u_t = D\,\partial_x^2 u + \alpha u \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \rightsquigarrow \text{جمعیت در دو سر بازه صفر است} \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \rightsquigarrow \text{توزیع اولیه جمعیت} \end{cases}$$

می‌توان فرض کرد که

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n' = \left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D + \alpha\right] a_n \\ a_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\exp\left[\left(a-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)t\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

اگر $a<\frac{D\pi^2}{L^2}$ آنگاه $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=0$.

اگر $a>\frac{D\pi^2}{L^2}$ آنگاه $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=\infty$.

اگر $a=\frac{D\pi^2}{L^2}$ آنگاه جواب $u(x,t)$ می‌تواند به ∞ یا $u(x)=\sin\frac{\pi x}{L}$ همگرا شود.

این پدیده مثل این است که در نقطه بحرانی $a=\frac{D\pi^2}{L^2}$ یک انشعاب داریم.

مسأله رشد خطی در بعد ۲ :

$$\begin{cases} \partial_t u = D\Delta u + \mu u & 0<x<a \,,\, 0<y<b \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) & \\ \nabla u \cdot n = 0 & \text{روی مرز} \end{cases}$$

جریان جمعیت روی مرز ناحیه وجود ندارد $\longleftarrow$

یا به عبارتی ناحیه ایزوله است.

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}(t)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

که $C_{m,n}(0)$ از توزیع اولیه $u_0(x,y)$ به دست می‌آید.

$$C'_{m,n} = \left(-D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] + \mu\right) C_{m,n}$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}(0)\exp\left[\mu t - D\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)t\right]\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

اگر $\mu < 0$ خواهیم داشت $u(x,y,t) \longrightarrow 0$.

برای $\mu > 0$ وابسته به توزیع اولیه رفتار مجانبی جواب متفاوت است .

رشد خطی در ناحیه بیکران : $-\infty < x < +\infty$ $\quad u_t = D u_{xx} + \mu u$

$$u(x,0) = u_0(x) = \delta_0(x)$$

در واقع فرض کردیم همه جمعیت در نقطه $x=0$ قرار دارند و کل جمعیت $1 = \int u_0(x)dx$ است .

اگر $\mu = 0$ جواب معادله بالا همان جواب اساسی معادله طارت است :

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

و در حالت کلی

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(\mu t - \frac{x^2}{4Dt}\right)$$

اگر نقاط (x,t) را در نظر بگیریم که $P(x,t) = \tilde{P} =$ ثابت ،

$$\frac{x}{t} = \pm\left[4\mu D - \frac{2D}{t}\ln t - \frac{4D}{t}\ln\sqrt{2\pi D}\;\tilde{P}\right]^{1/2}$$

وقتی $t \to \infty$ ، می‌توان گفت که

$$\frac{x}{t} \approx \pm 2\sqrt{\mu D}$$

به تعبیری یک موج حرکتی جبهه با جگالی $\tilde{P}$ با سرعت $2\sqrt{\mu D}$ در ناحیه توزیع می‌شود .

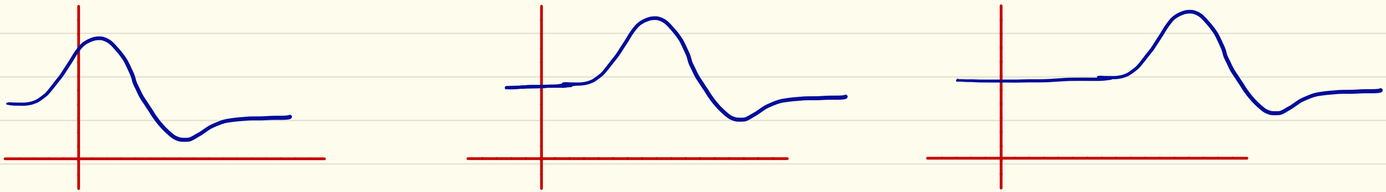
ریاضیات زیست

جلسه هجده ۹۷/۲/۹

معادله R-D با نرخ رشد لجستیک

$$\partial_t u = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u(1-u)$$

موج رونده (travelling wave) : جواب $u(x,t) = U(x-ct)$ به ازای ثابت c یک موج رونده
برای معادله گفته می‌شود و c سرعت موج است.



$t=0$

$u(x,0) = U(x)$

$u(x,1) = U(x-c)$

$u(x,2) = U(x-2c)$

$$U = U(\xi) \quad , \quad u(x,t) = U(x-ct)$$

$$u_t = -c\, U_\xi (x-ct) \quad , \quad u_{xx} = U_{\xi\xi}(x-ct)$$

$$u_t = D u_{xx} + \alpha u(1-u) \quad \Rightarrow \quad -cU_\xi = DU_{\xi\xi} + \alpha U(1-U)$$

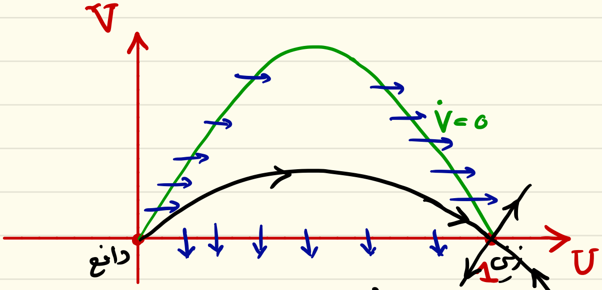
چون مقدار 1 ظرفیت محیط برای جمعیت دیده شده است درنتیجه باید $0 \le u(x,t) \le 1$ و همچنین $0 \le U(\xi) \le 1$

$$\begin{cases} U_\xi = V \\ V_\xi = -\frac{c}{D}V - \frac{\alpha}{D}U(1-U) \end{cases}$$

نقاط بحرانی این دستگاه عبارتند از $(U,V) = (0,0), (1,0)$

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha}{D} & -\frac{c}{D} \end{bmatrix} \qquad \det = \frac{\alpha}{D} > 0 \quad , \quad tr = -\frac{c}{D}$$

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{D} & -\frac{c}{D} \end{bmatrix} \qquad \det < 0$$

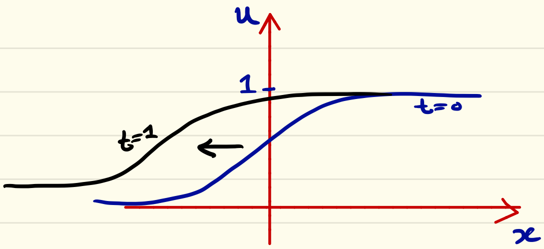


حالت $c<0$

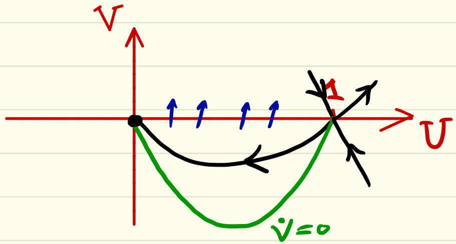
اگر $c<0$ ، خم پوچ $\dot{V}=0$ به صورت $V = -\frac{\alpha}{c}U(1-U)$ است

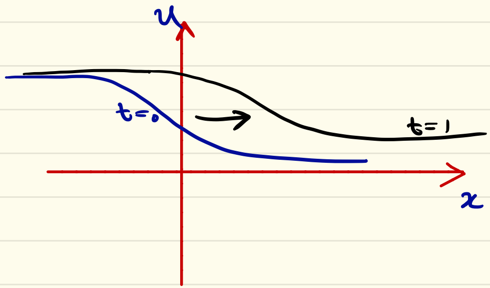
گزاره: اگر $|c| > 2\sqrt{\alpha D}$ آنگاه مداری وجود دارد که دو نقطه بحرانی $(0,0)$ و $(1,0)$ را به هم وصل می‌کند.

با توجه به اینکه $c<0$ است نمودار حاصل به سمت چپ حرکت می‌کند.



حالت $c>0$. نقطه $(0,0)$ جاذب می‌شود





توزیع اولیه جهت تعیین می‌کند که کدام از این دو جواب متناسب مدل ارائه شده است.

مثال ـ $n(x,t)$ چگالی سلولها

$g(x,t)$ چگالی گلوکز

$$\partial_t n = D_0 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + kn(g-g_0)$$

g_0 کمترین مقدار گلوکز مورد نیاز سلول برای رشد است.

$$\partial_t g = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - cKn(g-g_0)$$

اگر فرض کنیم ضریب پخش سلولها خیلی کوچکتر از ضریب پخش گلوکز باشد، می‌توانیم قرار دهیم $D_0 = 0$.

$$\tilde{g} = g - g_0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_t n = kn\tilde{g} \\ \partial_t \tilde{g} = D \dfrac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2} - ckn\tilde{g} \end{cases}$$

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا معادله بالا جواب موج رونده دارد؟

$$n(x,t) = N(x - vt) \quad , \quad \tilde{g}(x,t) = G(x - vt)$$

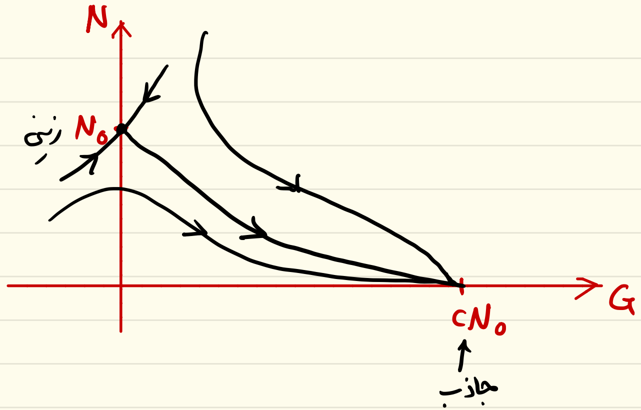
$$\begin{cases} -\nu N' = kNG \\ -\nu G' = DG'' - ckNG \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad -c\nu N' - \nu G' = DG'' \quad \xRightarrow{\int_{-\infty}^{\xi}}$$

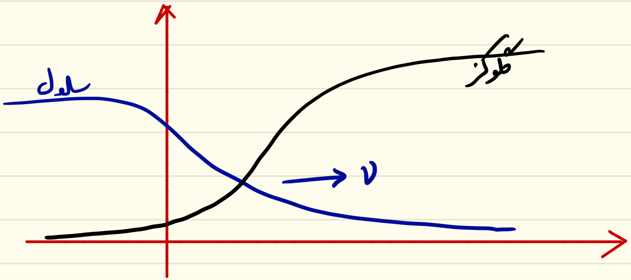
$$-c\nu N(\xi) + c\nu N(-\infty) - \nu G(\xi) + \nu G(-\infty) = DG'(\xi) - DG'(-\infty)$$

اگر حالتی را در نظر بگیریم که غلظت گلوکز در $+\infty$ یک مقدار ثابت مشخص داشته باشد و در $-\infty$ صفر باشد،
و همچنین تجمع سلول‌ها در $-\infty$ برابر ثابت N_0 باشد و در $+\infty$ صفر باشد، آنگاه

$$\begin{cases} DG'(\xi) = -c\nu N(\xi) + c\nu N_0 - \nu G(\xi) \\ -\nu N'(\xi) = -kN(\xi)G(\xi) \end{cases}$$



N
N_0
زینی
G
cN_0
جاذب



سالم
طوکز
v

ریاضیات زیست

جلسه نوزده ۹۷/۲/۱۶

شکل‌گیری الگو (Pattern Formation)

مدل شکل‌گیری جلبک: پدیده chemotaxi است با آنزیم cAMP.

چگالی سلول‌های جلبک $= a(x,t)$

غلظت cAMP $= c(x,t)$

$\chi =$ ضریب chemotaxi

$f =$ نرخ تولید cAMP توسط هر سلول جلبک

K نرخ از بین رفتن cAMP در محیط

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[J_{random} + J_{chemo} \right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\mu \frac{\partial a}{\partial x} + \chi a \frac{\partial c}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[J_{diffusion} \right] + \text{Sources}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[-D \frac{\partial c}{\partial x} \right] + fa - Kc$$

$$
(1)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial a}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu \dfrac{\partial a}{\partial x} - \chi a \dfrac{\partial c}{\partial x} \right] \\[2ex]
\dfrac{\partial c}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D \dfrac{\partial c}{\partial x} \right) + f a - k c
\end{cases}
$$

شرایط مرزی: فرض می‌کنیم این پدیده زیستی در یک محیط ایزوله انجام می‌شود. یعنی شار ورودی یا خروجی روی مرز نداریم.

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \qquad \text{روی مرز}$$

سیستم فوق دارای حالت تعادل $a(x,t) = \bar{a}$ و $c(x,t) = \bar{c}$ است که

$$f\bar{a} = k\bar{c}$$

شکل‌گیری الگوی تجمعی جلبک‌ها نتیجه ناپایداری حالت تعادل سیستم است.

تعریف پایداری:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\Delta u + \alpha u =: \tilde{L} u$$

$$\tilde{L} : C^2(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega)$$

$\lambda \in Spec(L)$ طیف عملگر L می‌نامیم هرگاه

(۱) $Nul(L - \lambda I) \neq \{0\}$ یعنی $L - \lambda I$ یک به یک نیست و تابع u وجود دارد که $Lu = \lambda u$.

در این حالت λ مقدار ویژه و u تابع ویژه است.

(۲) $L - \lambda I$ یک به یک است ولی پوشا نیست. در این حالت λ را طیف اساسی می‌نامیم.

قضیه: طیف عملگر $Lu = div(D(x)\nabla u)$ فقط شامل مقدار ویژه است و به صورت دنباله

$$\cdots \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

است که $\lambda_n \to -\infty$. به علاوه توابع ویژه این عملگر یک پایه برای فضای $L^2(\Omega)$ تشکیل می‌دهند.

نکته -
$$\mathrm{Spec}(\Delta+\alpha I)=\{\cdots\leq\lambda_3+\alpha\leq\lambda_2+\alpha<\lambda_1+\alpha\}$$

روش حل معادله $u_t=Lu$ به کمک توابع ویژه.

اگر $\{\lambda_n\}$ مقادیر ویژه و $\{\varphi_n\}$ توابع ویژه باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\varphi_n(x)$$

و با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(t)\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)L\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\lambda_n\varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow\quad a_n'(t)=\lambda_n a_n(t)\quad\Rightarrow\quad a_n(t)=e^{t\lambda_n}a_n(0)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{t\lambda_n}a_n(0)\varphi_n(x)=:e^{tL}u_0$$

قضیه: اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه L منفی باشند آنگاه $u\equiv 0$ پایدار مجانبی است. یعنی $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)=0$

به ازای هر جواب معادله $u_t = Lu$.

تذکر: اگر عملگر L خودالحاق باشد، آنگاه طیف آن حقیقی است.

پایداری معادلات غیرخطی:
$$u_t = Lu + f(u) \qquad (2)$$

فرض کنید $u=\bar{u}(x)$ یک حالت تعادل باشد. آنگاه $\bar{u}(x)$ پایدار است به این معنا که $\varepsilon>0$ وجود دارد که اگر $\|u_0(x)-\bar{u}(x)\|_{L^2}<\varepsilon$

آنگاه جواب (2) با شرط اولیه $u(x,0)=u_0(x)$ در همسایگی $\bar{u}(x)$ باقی می‌ماند.

و اگر $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)=\bar{u}(x)$ آنگاه $\bar{u}(x)$ را پایدار مجانبی گوییم.

قضیه: $\bar{u}(x)$ جواب پایدار مجانبی (1) است، هرگاه مقدار ثابت $0<\alpha$ وجود داشته باشد که

طیف عملگر خطی $Lu + f'(\bar{u}(x))\,u$ در ناحیه $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \le \alpha < 0\}$ واقع شود.

بررسی پایداری دستگاه (1).

با خطی‌سازی حول نقطه $(\bar{a},\bar{c})$ سیستم روبرو به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu \dfrac{\partial a}{\partial x} - \chi \bar{a}\dfrac{\partial c}{\partial x}\right] \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial c}{\partial x}\right) + fa - kc \end{cases}$$

برای محاسبه مقادیر ویژه این عملگر باید دستگاه زیر حل شود:

$$(3)\begin{cases} \mu \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \chi \bar{a}\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \lambda a \\[2ex] D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + fa - kc = \lambda c \end{cases}$$

با شرایط مرزی $\quad \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=0,L} = 0$

به کمک سری فوریه می‌توانیم قرار دهیم :

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

باید مقدار λ را پیدا کنیم که متناظر آن دنباله $\{a_n\}$ و $\{c_n\}$ وجود داشته باشند که (3) برقرار باشد.

معادل این است که

$$\begin{cases} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mu a_n + \chi \bar{a} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c_n = \lambda a_n \\ -D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c_n + f a_n - K c_n = \lambda c_n \end{cases} \Longrightarrow (A_n - \lambda I)\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mu & \chi \bar{a}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ f & -D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - K \end{bmatrix}$$

جمع‌بندی: λ مقدار ویژه (3) است $\Longleftrightarrow$ به ازای لااقل یک مقدار n، λ مقدار ویژه ماتریس A_n است.

در این صورت تابع ویژه متناظر λ، $\begin{pmatrix} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \\ c_n \cos\frac{n\pi x}{L} \end{pmatrix}$ است که $\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$ بردار ویژه A_n است.

شرط پایداری حالت تعادل $(\bar{a}, \bar{c})$ برای دستگاه (1) این است که

$$\operatorname{tr} A_n < 0 \;, \quad \det A_n > 0 \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

دقت کنید $\operatorname{tr} A_n < 0$ برای هر n. درنتیجه:

نتیجه: $(\bar{a}, \bar{c})$ ناپایدار است اگر به ازای لااقل یک مقدار n، $\det A_n < 0$.

یا به طور معادل

$$\mu \left[D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k \right] < f \chi \bar{a}$$

به ازای لااقل یک مقدار n

یا به عبارتی برای $n=1$.

$$\boxed{\mu \left(D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + k \right) < f \chi \bar{a}}$$

$\leftarrow$ شرط ناپایداری

با توجه به نکته‌ای که برای حل معادلات به کمک توابع ویژه گفته شد، می‌دانیم که

$$\partial_t \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a(x,t) \\ c(x,t) \end{pmatrix} = \sum_n \alpha_n(0)\, e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\chi \bar{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ f & D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - k \end{pmatrix}$$

که $L\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$ و $\alpha_n(0)$ از بسط شرط اولیه محاسبه می‌شود.

با توجه به مطالب قبل λ_n باید در $\det(A_n - \lambda_n I) = 0$ صدق کند و $\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \cos\frac{n\pi x}{L} \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a(x,t) \\ c(x,t) \end{pmatrix} = \sum_n e^{\lambda_n t} \alpha_n(0) \cos\frac{n\pi x}{L} \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

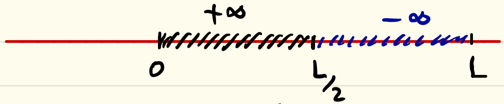
* تذکر: مقدار λ_n می‌تواند مختلط باشد که در این صورت بردار ویژه متناظر $\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$ نیز چنین است.

فرض کنید $0 < \mathrm{Re}\lambda_1$ و قسمت حقیقی بقیه مقادیر ویژه منفی هستند در این صورت

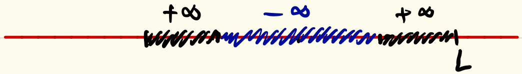
$$a(x,t) \approx e^{\lambda_1 t}\alpha_1(0)\cos\frac{\pi x}{L}\begin{pmatrix}a_1\\ c_1\end{pmatrix}$$ وقتی $t \to \infty$

الگوی $\cos\frac{\pi x}{L}$

الگوی $\cos\frac{2\pi x}{L}$



رفتار مکانی وقتی $t \to \infty$



رفتار مکانی متناظر $\cos\frac{2\pi x}{L}$ وقتی $t \to \infty$

ریاضیات زیست

جلسه بیست ۹۷/۲/۲۱

ناپایداری Turin

دو ماده شیمیایی در حال واکنش هستند که اگر فقط حول جمعیتِ این دو را نگاه کنیم به یک نقطه تعادل پایدار $(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ می‌رسند:

$$(ODE)\begin{cases} \dfrac{\partial c_1}{\partial t} = R_1(c_1, c_2) \\ \dfrac{\partial c_2}{\partial t} = R_2(c_1, c_2) \end{cases}$$

اگر این مواد علاوه بر واکنش فوق با diffusion جابجایی نیز داشته باشند، حال تعادل $(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ ناپایدار می‌شود.
و این ناپایداری باعث شکل‌گیری یک الگو در سیستم خواهد شد.

$$(PDE)\begin{cases} \dfrac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \dfrac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + R_1(c_1, c_2) \\ \dfrac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \dfrac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + R_2(c_1, c_2) \end{cases}$$

شرط مرزی نیومن در بازه $(0, L)$ در نظر می‌گیریم.

$(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ در هر دو معادله ODE و PDE صدق می‌کند.

شرط پایداری در ODE :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = \left.\frac{\partial R_i}{\partial C_j}\right|_{\bar{C}_1, \bar{C}_2}$$

1- $a_{11} + a_{22} < 0$

2- $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$

شرط ناپایداری (PDE) .

خطی سازی PDE در نقطه $(\bar{c}_1,\bar{c}_2)$

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \partial_t C=\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\partial_x^2 C+MC$$

با توجه به شرایط مرزی نویمن c_1 و c_2 هر کدام بسط فوریه کسینوسی دارند و با جایگذاری مشابه به مثال حلقه قبل می‌توان مقادیر ویژه را محاسبه کرد. برای سادگی فرض می‌کنیم $C(x,t)=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\cos qx\, e^{\lambda t}$ و در معادله فوق جایگذاری می‌کنیم

$$\lambda e^{\lambda t}\cos qx\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}(-q^2)\cos qx\, e^{\lambda t}+M\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\cos qx\, e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow\left[M+\begin{pmatrix} -D_1q^2 & 0 \\ 0 & -D_2q^2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(به ازای $q=\frac{n\pi}{L}$ $\quad n=0,1,2,\cdots$)

$$A_q = \begin{pmatrix} a_{11} - q^2 D_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - q^2 D_2 \end{pmatrix}$$

مقادیر ویژه عملگر دیفرانسیلی، مقادیر ویژه ماتریس

هستند به ازای q های مختلف.

شرط ناپایداری: به ازای لااقل یک q، ماتریس A_q مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت داشته باشد.

دقت کنید

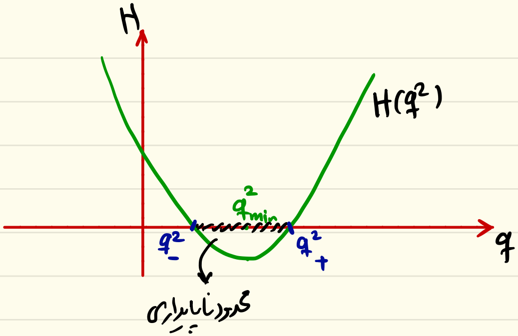
$$\operatorname{tr} A_q = a_{11} + a_{22} - q^2 (D_1 + D_2)$$

که با توجه به شرط (1) همیشه مقدار منفی دارد. در نتیجه وجود یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت معادل است با:

$$0 > \det A_q = (a_{11} - q^2 D_1)(a_{22} - q^2 D_2) - a_{12} a_{21}$$ به ازای لااقل یک مقدار q.

$$= (D_1 D_2) q^4 - (a_{11} D_2 + a_{22} D_1) q^2 + \underbrace{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}_{\text{بنا بر شرط (2) مثبت است.}}$$

$$:= H(q^2)$$



$$q^2_{min} = \frac{a_{11}D_2 + a_{22}D_1}{2D_1D_2}$$

شرط ناپایداری : $\quad H(q^2_{min}) < 0$

$$(3) \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < \frac{(a_{11}D_2 + a_{22}D_1)^2}{4D_1D_2}$$

درضمن باید $a_{11}D_2 + a_{22}D_1 > 0$ در غیر اینصورت چندجمله‌ای $H(q^2)$ همواره مثبت است.

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \end{pmatrix} \cos\frac{n\pi x}{L} \underset{t\to\infty}{\sim} \sum_{q_- < \frac{n\pi}{L} < q_+} e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \end{pmatrix} \cos\frac{n\pi x}{L}$$

به‌طور خلاصه شرایط تحقق ناپایداری Turin:

$$1-\quad a_{11}+a_{22}<0$$

$$2-\quad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$$

$$3-\quad 2\sqrt{D_1D_2}\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)^{1/2}<a_{11}D_2+a_{22}D_1$$

(1) از شرط (1) نتیجه می‌شود لااقل یکی از a_{11} یا a_{22} باید منفی باشد. به‌عنوان مثال $a_{22}<0$. یعنی $\frac{\partial R_2}{\partial c_2}<0$

در واقع ماده دوم نسبت به خودش مهاری (inhibitor) است.

(2) شرط (3) که $0<a_{11}D_2+a_{22}D_1$ و فرض $a_{22}<0$ نتیجه می‌دهد که $a_{11}>0$. به عبارتی a_{11} و a_{22} نمی‌توانند هم علامت باشند. در واقع ماده اول نسبت به خودش فعال‌کننده (activator) است.

(3) نتیجه قبل که $a_{11}a_{22}<0$ به کمک شرط (2) نتیجه می‌دهد $a_{12}a_{21}<0$.

دو حالت زیر می‌توانند رخ دهد:

<u>Activator-Inhibitor</u> $a_{12}<0$, $a_{21}>0$ $M = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$

<u>Positive Feedback</u> $a_{12}>0$ $a_{21}<0$ $M = \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$

4

شرط (1) $a_{11}+a_{22}<0$ ، $a_{22}<0<a_{11}$

شرط (3) $a_{11}D_2 + a_{22}D_1 > 0$

درنتیجه باید $D_1 < D_2$.

قرار دهید $\tau_1 = \frac{1}{|a_{11}|}$ ، $\tau_2 = \frac{1}{|a_{22}|}$ که واحد آنها (time) است.

شرط (3) را به این صورت می‌توان بازنویسی کرد $D_1\tau_1 < D_2\tau_2$

$\sqrt{D_1\tau_1}$ و $\sqrt{D_2\tau_2}$ را به‌عنوان دامنه فعال‌سازی یا مهارکنندگی تعبیر می‌شوند.

برای شکل‌گیری الگو باید دامنه مهارکنندگی ماده مهاری بیشتر از دامنه فعال‌سازی ماده فعال‌کننده باشد.

شکل‌گیری الگو در ابعاد بالاتر:

$$
\begin{cases}
\partial_t C_1 = D_1 \Delta C_1 + R_1(C_1, C_2) \\
\partial_2 C_2 = D_2 \Delta C_2 + R_2(C_1, C_2)
\end{cases}
$$

با شرط مرزی نویمن در ناحیه $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$.

$$
0 = \partial_x C_i(0, y) = \partial_x C_i(L_1, y) = \partial_y C_i(x, 0) = \partial_y C_i(x, L_2)
$$

با توجه به این شرط مرزی C_i در پایه $\left\{ \cos\frac{n\pi x}{L_1} \cos\frac{m\pi y}{L_2} \right\}_{m,n=1}^{\infty}$ بسط داده می‌شوند.

برای محاسبه مقادیر ویژه دستگاه، با جایگذاری

$$C_i(x,y,t) = \alpha_i e^{\lambda t} \cos q_1 x \cos q_2 y$$

در معادله خطی شده، مقدار λ را پیدا می‌کنیم.

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (q_1^2 + q_2^2) + M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

اگر $Q^2 = q_1^2 + q_2^2$ ، باید مقادیر ویژه ماتریس

$$M - \begin{pmatrix} D_1 Q^2 & 0 \\ 0 & D_2 Q^2 \end{pmatrix}$$

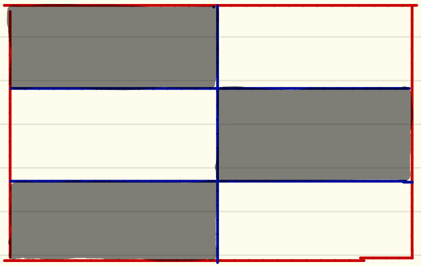
را پیدا کنیم. شرط ناپایداری مشابه قبل این است که $H(q^2_{min}) < 0$.

اگر (q_-^2 , q_+^2) بازه‌ای باشد که H روی آن منفی است، آنگاه همه $\cos q_1 x \cos q_2 y$ های تشکیل الگو می‌دهند که

$$q_-^2 < q_1^2 + q_2^2 < q_+^2$$

$$\begin{pmatrix} C_1(x,t) \\ C_2(x,t) \end{pmatrix} = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{\lambda_{mn} t} \cos\frac{n\pi x}{L_1} \cos\frac{m\pi y}{L_2} \begin{pmatrix} \alpha_1^{mn} \\ \alpha_2^{mn} \end{pmatrix}$$

$$\underset{t\to\infty}{\sim} \sum_{\frac{q_-^2}{\pi^2} < \left(\frac{n}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_2}\right)^2 < \frac{q_+^2}{\pi^2}} e^{\lambda_{mn}} \cos\frac{n\pi x}{L_1} \cos\frac{m\pi y}{L_2} \begin{pmatrix} \alpha_1^{mn} \\ \alpha_2^{mn} \end{pmatrix}$$



$\cos\frac{\pi x}{L_1} \cos\frac{2\pi y}{L_2}$

ریاضیات زیست

جلسه بیست و یک   ۹۷/۲/۲۳

بررسی کیفی مدل‌های PDE.

معادلات Lotka-Volterra.

$n_i(t,x)$ جمعیت گونه i-ام را نشان می‌دهد $1 \le i \le N$

$$(1) \qquad \frac{\partial n_i}{\partial t} = \underbrace{D_i \Delta n_i}_{\text{Random Motion}} - \operatorname{div}(U_i n_i) + n_i R_i$$

U_i: سرعت حرکت

R_i: نرخ رشد گونه i-ام

در واقع R_i تعامل همه گونه‌های دیگر با گونه i-ام را بیان می‌کند. در ساده‌ترین حالت

$$R_i(n_1, \dots, n_N) = r_i + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} n_j$$

r_i: نرخ رشد گونه i-ام در غیاب گونه‌های دیگر

c_{ij}: ضریب تاثیر گونه j-ام روی گونه i-ام

گونه شکار باشد و گونه ز شکارچی آن گاه باید $c_{ij} < 0$ ، $c_{ji} > 0$

در روابط رقابتی $c_{ij} , c_{ji} < 0$

و در روابط همزیستی $c_{ij} , c_{ji} > 0$

گزاره I : فرض کنید داده‌های اولیه $n_i^0 = n_i(0,x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ نامنفی باشند و $U_i \equiv 0$. به علاوه تابع موضعاً کران‌دار $\Gamma(t)$ وجود دارد به طوری که

$$|R_i(t,x)| \le \Gamma(t)$$

در این صورت دستگاه (1) جواب ضعیف در $C(\mathbb{R}^+ ; L^2(\mathbb{R}^d))$ دارد که $n_i(t,x) \ge 0$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}^+$.

اصل ماکسیمم برای معادله گرما: اگر تابع $u(t,x)$ در رابطه $u_t - \Delta u \leq 0$ در ناحیه $[0,T]\times\Omega$ صدق کند. در این صورت

$$(2) \qquad \max_{(t,x)\in[0,T]\times\bar{\Omega}} u(t,x) = \max_{\Gamma} u(t,x)$$

که $[0,T]\times\partial\Omega \cup (\{0\}\times\bar{\Omega}) = \Gamma$.

گزاره بالا به اصل ماکسیمم ضعیف معروف است و اگر $u_t - \Delta u \geq 0$ به جای ماکسیمم، مینیمم را قرار می‌دهیم.

اصل ماکسیمم قوی: اگر نقطه درونی $x_0 \in \Omega$ وجود داشته باشد که

$$u(t_0, x_0) = \max_{(t,x)\in[0,T]\times\bar{\Omega}} u(t,x)$$

آنگاه $u(t,x) = u(t_0,x_0)$ برای هر

$x \in \bar{\Omega}, \quad t < t_0$

نسخه دیگری از اصل ماکسیمم: فرض کنید $u_t - \Delta u \leq c\,u$

که $0 \leq c(t,x)$. در این صورت اگر ماکسیمم u در $[0,T] \times \bar{\Omega}$ مثبت باشد، آن‌گاه رابطه (2) برقرار است. درحالت $u_t - \Delta u \geq cu$، تابع u می‌نیمم منفی خود را روی مرز می‌گیرد. (در این حالت نیز باید $c(t,x) \geq 0$.)

اگر بدانیم که $u(0,x) \geq 0$ و $u(t,x) \geq 0$ برای $x \in \partial\Omega$. آن‌گاه همیشه ماکسیمم u نامنفی است و نتیجه بالا برقرار است. در این حالت مثبت بودن ضریب c لازم نیست. تنها شرط لازم کران داری آن است.

اگر $|c(t,x)| \leq M$ قرار دهید $v(t,x) = e^{tM} u(t,x)$

$$v_t - \Delta v = \left(M e^{tM} u + e^{tM} u_t\right) - e^{tM} \Delta u$$

$$\leq e^{tM} \left[Mu + cu \right] = (M+c)\, v$$

اثبات گزاره I :

$$\partial_t n_i - D_i \Delta n_i = n_i R_i$$

تابع $(n_i)_- = \max(0, -n_i)$ را در معادله بالا ضرب کرده و انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (n_i)_- \partial_t n_i - D_i \Delta n_i \cdot (n_i)_- \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} n_i R_i (n_i)_- \, dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \left[(n_i)_-\right]^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^d} D_i |\nabla (n_i)_-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} R_i (n_i)_-^2$$

$$\leq \Gamma(t) \int_{\mathbb{R}^d} (n_i)_-^2 \, dx$$

اگر $e(t) = \int_{\mathbb{R}^d} (n_i)_-^2 dx$ رابطه بالا نشان می‌دهد که $\frac{d}{dt} e(t) \leq 2\Gamma(t) e(t)$

$$\Longrightarrow \quad e(t) \leq e(0) \exp\left[\int_0^t 2\Gamma(s)\, ds\right]$$

چون در لحظه $t=0$ ، $n_i(0,x)\geq 0$ بنابراین $e(0)=0$ و در نتیجه $e(t)=0$ یعنی $(n_i)_-=0$

یا به عبارتی $n_i(t,x)\geq 0$.

خاصیت یکنوایی برای سیستم های همزیستی

$$\partial_t n_i - D\Delta n_i = n_i R_i \qquad 1\leq i\leq 2$$

فرض سیستم همزیستی : $\frac{\partial R_2}{\partial n_1}\geq 0$, $\frac{\partial R_1}{\partial n_2}\geq 0$

گزاره II . در یک سیستم همزیستی اگر (n_1,n_2) و (m_1,m_2) دو جواب باشند به طوری که

i) $\quad 0\leq n_i\leq \Gamma^1 \quad , \quad 0\leq m_i\leq \Gamma^1$

ii) $\quad |R_i|\leq \Gamma^2 \qquad 1\leq i\leq 2$

iii) $\quad \left|\frac{\partial}{\partial n_i} R_j\right|\leq \Gamma^3 \qquad 1\leq i,j\leq 2$

در این صورت اگر $n_i(0,x) \le m_i(0,x)$ برای $1 \le i \le 2$ آنگاه

$$n_i(t,x) \le m_i(t,x) \qquad \forall t \ge 0$$

اثبات.

$$\partial_t (n_1 - m_1) - D_1 \Delta (n_1 - m_1) = n_1 R_1(n_1, n_2) - m_1 R_1(m_1, m_2)$$

$$= (n_1 - m_1) R_1(n_1, n_2) + m_1 \left[R_1(n_1, n_2) - R_1(m_1, m_2) \right]$$

$$= (n_1 - m_1) R_1(n_1, n_2) + m_1 \left[(n_1 - m_1)\, \partial_1 R_1(n_1^*, n_2^*) + (n_2 - m_2)\, \partial_2 R_1(n_1^*, n_2^*) \right]$$

$$\le (\Gamma^2 + \Gamma^1 \Gamma^3)(n_1 - m_1) + \Gamma^1 \Gamma^3 (n_2 - m_2)$$

عبارت بالا را در $(n_1 - m_1)_+$ ضرب کنید.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\left[(n_1-m_1)_+\right]^2 \leq (\rho^2+\rho^1\rho^3)\int_{\mathbb{R}^d}\left[(n_1-m_1)_+\right]^2 dx + \rho^1\rho^3\int_{\mathbb{R}^d}(n_2-m_2)_+(n_1-m_1)_+$$

به طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\left[(n_2-m_2)_+\right]^2 \leq (\rho^2+\rho^1\rho^3)\int_{\mathbb{R}^d}\left[(n_2-m_2)_+\right]^2 dx + \rho^1\rho^3\int_{\mathbb{R}^d}(n_2-m_2)_+(n_1-m_1)_+$$

که اگر هر دو را با هم جمع کنیم و قرار دهیم :

$$e(t) = \int_{\mathbb{R}^d}\left[(n_1-m_1)_+\right]^2+\left[(n_2-m_2)_+\right]^2 dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}e(t) \leq (\rho^2+\rho^1\rho^3)\,e(t) + 2\rho^1\rho^3\int_{\mathbb{R}^d}(n_1-m_1)_+(n_2-m_2)_+$$

$$\leq (\rho^2+\rho^1\rho^3)\,e(t) + \rho^1\rho^3\left[\int_{\mathbb{R}^d}\left[(n_1-m_1)_+\right]^2+\left[(n_2-m_2)_+\right]^2 dx\right.$$

$$\leq C\,e(t)$$

چون $e(0)=0$ پس $e(t)=0$ برای هر $t\geq 0$.

ریاضیات زیست

جلسه بیست و دو ۹۷/۲/۳۰

روش اغتشاش (Perturbation)

با فرض اینکه دستگاه معادلات $\partial_t u_i = D_i \Delta u_i$ در ناحیه Ω به حالت تعادل $u_i \equiv 0$ همگرا است.

می‌خواهیم بررسی کنیم تحت چه شرایطی $\partial_t u_i = D_i \Delta u_i + F_i$ نیز به $u_i \equiv 0$ همگرا می‌شود.

$$(*)\quad \begin{cases} \partial_i u_i = D_i \Delta u_i + F_i(t, x; u_1, \dots, u_N) & 1 \le i \le N \\ u_i(t,x) = 0 & x \in \partial\Omega \\ u_i(0,x) = u_i^0(x) \in L^2(\Omega) & \end{cases}$$

قضیه: فرض کنید $\min_{1 \le i \le N} D_i = D > 0$ و ثابت $L > 0$ وجود داشته باشد که

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{N} F_i(t, x; u)\, u_i \le L |u|^2$$

اگر λ_1 اولین مقدار ویژه عملگر لاپلاس در Ω باشد.

$$(2)\qquad \delta = D\lambda_1 - L > 0$$

در این صورت

$$\int_\Omega |u(t,x)|^2 dx \leq e^{-2\delta t} \int_\Omega |u^0(x)|^2 .$$

نکته - شرط (1) ضعیف‌تر از شرط $|F(t,x;u)| \leq L|u|$ که

$$F = (F_1, \dots, F_N)$$

نکته - می‌دانیم که اولین تابع ویژه عملگر لاپلاس یک تابع مثبت است که

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \lambda_1 w_1 & \text{in } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

به علاوه می‌دانیم

$$\lambda_1 = \inf_{v \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx}$$

در نتیجه نامساوی

$$\lambda_1 \int v^2 dx \leq \int |\nabla v|^2 dx$$

برقرار است که به آن نامساوی پوانکاره می‌گوییم.

اثبات قضیه: اگر معادله را در u_i ضرب کنیم و از آن انتگرال بگیریم:

$$u_i \partial_t u_i = D_i u_i \Delta u_i + u_i F_i$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_i^2 = -D_i \int_\Omega |\nabla u_i|^2 + \int u_i F_i \le -D_i \lambda_1 \int u_i^2 + \int u_i F_i$$

اگر از $i=1,\dots,N$ را با هم جمع کنیم $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\int_\Omega |u|^2}_{\varphi(t)} \le -D\lambda_1 \int_\Omega |u|^2 + L\int_\Omega |u|^2$$

$$= -\delta \int_\Omega |u|^2$$

$$\varphi' \le -2\delta\varphi \Longrightarrow \varphi(t) \le e^{-2\delta t}\varphi(0)$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega |u(t,x)|^2 dx \le e^{-2\delta t} \int_\Omega |u^0(x)|^2 dx$$

تذکر: اگر به دنبال نتیجه مشابه برای شرط مرزی نویمن باشیم باید دقت کنیم که در مسأله مقدار ویژه

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

برای اولین مقدار ویژه داریم $\lambda_1 = 0$ و $w_1(x) \equiv 1$ تابع ثابت است. در این حالت نامساوی پوانکاره به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\lambda_2 \int_\Omega |v(x) - \langle v \rangle|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla v|^2 \qquad v \in C^1(\Omega)$$

که λ_2 دومین مقدار ویژه برای شرط مرزی نویمن است و منظور از $\langle v \rangle$، میانگین تابع v است.

$$\langle v \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x)\, dx$$

قضیه: فرض کنید در $(*)$ با شرط مرزی نویمن $\partial_\nu u_i = 0$، تابع $F_i = F_i(t; u)$ مستقل از x باشد.

به علاوه $\min_{1 \le i \le N} D_i = D > 0$ و ثابت $L > 0$ وجود داشته باشد که

$$(1) \qquad \big(F(t;u) - F(t,v)\big) \cdot (u - v) \le L \, |u - v|^2$$

$$(2) \qquad \delta := D\lambda_2 - L > 0$$

آنگاه $u_i(t,x)$ به یک جواب همگن در دامنه همگراست و

$$\int_\Omega \big| u(t,x) - \langle u(t) \rangle \big|^2 dx \le e^{-2\delta t} \int_\Omega \big| u^0(x) - \langle u^0 \rangle \big|^2 dx$$

اثبات - ابتدا از معادله میانگین گیری کنید:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \qquad \partial_t u_i = D_i \Delta u_i + F_i(t,u)$$

$$\frac{d}{dt}\langle u_i\rangle = \langle F_i\rangle = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega F_i(t,u(t,x))\,dx$$

(دقت کنید $\int_\Omega \Delta u_i = 0$ به دلیل شرط مرزی نیومن)

$$\partial_t\left[u_i - \langle u_i\rangle\right] = D_i\,\Delta\left[u_i - \langle u_i\rangle\right] + F_i - \langle F_i\rangle$$

تنها به t وابسته است.

رابطه بالا را در $u_i - \langle u_i\rangle$ ضرب کرده و انتگرال بگیرید:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u-\langle u\rangle|^2\,dx \le -D\int_\Omega |\nabla(u-\langle u\rangle)|^2 + \int_\Omega (F-\langle F\rangle)\cdot(u-\langle u\rangle)$$

دقت کنید $0 = \int_\Omega u_i - \langle u_i\rangle\,dx$ در نتیجه $\int_\Omega \langle F\rangle\cdot(u-\langle u\rangle) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\langle F_i\rangle(u_i-\langle u_i\rangle) = 0$

به طور مشابه

$$\int_\Omega F(t;\langle u\rangle)\cdot(u-\langle u\rangle)\,dx = 0$$

در نتیجه به کمک نامساوی پوانکاره داریم:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u-\langle u\rangle|^2\,dx \leq -D\lambda_2\int_\Omega |u-\langle u\rangle|^2\,dx + \int_\Omega \big(F(t;u)-F(t;\langle u\rangle)\big)\cdot(u-\langle u\rangle)$$

$$\leq (L-D\lambda_2)\int_\Omega |u-\langle u\rangle|^2\,dx$$

روش آنتروپی :

واکنش شیمیایی بین مواد $S_1, \dots, S_N$:

$$a_1 S_1 + \cdots + a_N S_N \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftharpoons}} b_1 S_1 + \cdots + b_N S_N$$

$a_i, b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

اگر غلظت S_i را با $n_i(t,x)$ نشان دهیم :

$$\begin{aligned} \partial_t n_i - D_i \Delta n_i &= b_i k_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i} - a_i k_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i} \\ &\quad + a_i k_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i} - b_i k_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i} \\ &= (b_i - a_i)\left[k_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i} - k_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i}\right] \end{aligned}$$

تابع زیر یک آنتروپی برای این سیستم است :

$$S(t,x) = \sum_{i=1}^{N} n_i \left[\ln(n_i) + \sigma_i - 1 \right]$$

که σ_i ها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند (هر چند انتخاب آن‌ها یکتا نیست) که

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i (a_i - b_i) = \ln K_+ - \ln K_-$$

گزاره :

$$\frac{d}{dt} \int S(t,x)\, dx = - \sum_{i=1}^{N} D_i \int \frac{|\nabla n_i|^2}{n_i}\, dx - D(t,x) \leq 0$$

$$0 \leq D(t,x) := \int_{\Omega} \left[\ln\left(K_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i}\right) - \ln\left(K_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i}\right) \right] \left[K_+ \prod_{i=1}^{N} n_i^{a_i} - K_- \prod_{i=1}^{N} n_i^{b_i} \right] dx$$

مثال -

$$O_2 \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftharpoons}} O + O$$

$n_1 = [O_2]$ ، $n_2 = [O]$

دامنه $\Omega = \mathbb{R}^d$ یا Ω کران‌دار با شرط مرزی نویمن

$$\begin{cases} \partial_t n_1 - D_1 \Delta n_1 = k_-(n_2)^2 - k_+ n_1 \\ \partial_t n_2 - D_2 \Delta n_2 = 2k_+ n_1 - 2k_-(n_2)^2 \end{cases}$$

$a_1 = 1$ ، $a_2 = b_1 = 0$, $b_2 = 2$

$$\sigma_1(a_1 - b_1) + \sigma_2(a_2 - b_2) = \ln k_+ - \ln k_-$$

$$\sigma_1 - 2\sigma_2 = \ln k_+ - \ln k_-$$

$$S(t,x) := n_1\left[\ln(k_+ n_1) - 1\right] + n_2\left[\ln(k_-^{1/2} n_2) - 1\right]$$

نکته -

$$\partial_t [2n_1 + n_2] - \Delta[2D_1 n_1 + D_2 n_2] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega 2n_1 + n_2 \, dx = 0 \Rightarrow \int 2n_1(t,x) + n_2(t,x)\, dx = \int 2n_1^0(x) + n_2^0(x)\, dx$$

درنتیجه :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega S(t,x)\,dx = -\int_\Omega \left[D_1 \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1} + D_2 \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2}\right] dx$$

$$-\int_\Omega \left[\ln\left(k_-(n_2)^2\right) - \ln\left(k_+ n_1\right)\right]\left[k_-(n_2)^2 - k_+ n_1\right] dx$$

$$\Longrightarrow \quad S(t,x) = S(t,0) - \int_0^t \int_\Omega D_1 \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1} + D_2 \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2} + \cdots$$

ازطرفی تابع آنتروپی $S(t,x)$ از پایین کران دار است (بنا به توصیف آن در صفحه قبل)

درنتیجه ثابت $C(k_+,k_-)$ وجود دارد که

$$\int_0^\infty \int_\Omega D_1 \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1} + D_2 \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2} + \left[\ln\left(k_-(n_2)^2\right) - \ln\left(k_+ n_1\right)\right]\left[k_-(n_2)^2 - k_+ n_1\right] dx\,dt \leq C$$

درنتیجه $\lim_{t\to\infty} \frac{|\nabla n_i|^2}{n_i} = 0 = \lim_{t\to\infty} k_- n_2^2 - k_+ n_1$

ریاضیات زیست

جلسه بیست و سه ۹۷/۳/۴

انفجار جمعیت.

اگر یک مدل ODE برای جمعیت به صورت

$$\dot{z}(t) = z(t)^q$$

$$z(t)^{1-q} - z(0)^{1-q} = (1-q)t$$

اگر $q > 1$ و $z(0) > 0$ معادله فوق تا زمان $t < T = \frac{z(0)^{1-q}}{q-1}$ تعریف می‌شود

$$\lim_{t \to T} z(t) = \infty$$

تعریف- در یک مدل جمعیتی اگر در زمان متناهی کل جمعیت به بی‌نهایت میل کند، پدیده انفجار جمعیت رخ داده است.

مثال -

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^2 & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \end{cases}$$

قضیه - اگر u_0 به اندازه کافی بزرگ باشد (؟) آنگاه در یک زمان T^* انفجار جواب رخ می‌دهد،

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \infty \quad \text{as} \quad t \longrightarrow T^*$$

اثبات به کمک تکنیک تابع ویژه :

فرض کنید w_1 اولین تابع ویژه $-\Delta$ در Ω باشد یعنی

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \lambda_1 w_1 & \text{in } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

که λ_1 اولین مقدار ویژه است. می‌دانیم $w_1(x) > 0$ در Ω . به علاوه فرض کنید $\int_\Omega w_1^2(x)dx = 1$.

معادله را در w_1 ضرب کنید و انتگرال بگیرید:

$$\frac{d}{dt}\int u(x,t)\,\omega_1(x)\,dx = \int \Delta u(x,t)\,\omega_1(x)\,dx + \int [u(x,t)]^2\,\omega_1(x)\,dx$$

فرمول گرین:
$$\int_{\Omega} \Delta u\,\omega_1 - u\,\Delta\omega_1 = \int_{\partial\Omega} \partial_n u\,\omega_1 - u\,\partial_n\omega_1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)\,\omega_1(x)\,dx = \int u(x,t)\,\underbrace{\Delta\omega_1}_{-\lambda_1\omega_1}\,dx + \int [u(x,t)]^2\,\omega_1(x)\,dx$$

$$\geq -\lambda_1 \int u(x,t)\,\omega_1\,dx + \left[\int u(x,t)\,\omega_1(x)\,dx\right]^2 \underbrace{\left[\int \omega_1^2\,dx\right]^{-1}}_{1}$$

$$z(t) = \int_{\Omega} u(x,t)\,\omega_1(x)\,dx \Rightarrow \frac{d}{dt}z(t) \geq -\lambda_1 z(t) + z(t)^2$$

$$\frac{d}{dt}\big[\underbrace{e^{\lambda_1 t} z}_{r(t)}\big] \geq e^{-\lambda_1 t}\left[e^{\lambda_1 t} z(t)\right]^2$$

$$\frac{\dot r}{r^2} \geq e^{-\lambda_1 t}$$

$$\Rightarrow \quad -r^{-1}(t) + r^{-1}(0) \geq \int_0^t e^{-\lambda_1 s}\, ds = \frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}$$

$$r(t) \geq \left[r^{-1}(0) - \frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} \right]^{-1}$$

اگر $r^{-1}(0) > \frac{1}{\lambda_1}$ آنگاه T^* وجود دارد که $\lim_{t \to T^*} r(t) = \infty$.

$$\Rightarrow \lim_{t \to T^*} z(t) = \infty . \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega u(x,t)\, \omega_1(x)\, dx \xrightarrow{t \to T^*} \infty$$

$$\wedge\!|$$

$$\left[\int (u(x,t))^2 dx\right]^{1/2} \underbrace{\left[\int (\omega_1(x))^2 dx\right]}_{1}{}^{1/2}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to T^*} \int (u(x,t))^2 dx = \infty$$

اصل مقایسه در ODE : در معادله $\dot{x} \geq f(x,t)$ که $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ لیپشیتز است.

اگر $\dot{y} = f(y,t)$ که $y(0) = x(0)$ آنگاه

$x(t) \geq y(t)$ برای $t \geq 0$.

$$\frac{dz}{dt} \geq -\lambda_1 z + z^2$$

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda_1 y + y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 - \lambda_1 y} = t$$

$$\ln\left(\frac{y(t)-\lambda_1}{y(0)-\lambda_1}\right) - \ln\left(\frac{y(t)}{y(0)}\right) = \lambda_1 t \Rightarrow \frac{y(t)-\lambda_1}{y(t)} = \frac{y(0)-\lambda_1}{y(0)} e^{\lambda_1 t}$$

$$z(t) \geq y(t) = \lambda_1 \left[1 - \frac{z(0)-\lambda_1}{z(0)} e^{\lambda_1 t}\right]^{-1}, \quad y(0) = z(0)$$

اگر $z(0) > \lambda_1$ آنگاه برای یک T^* وقتی $t \to T^*$ ، $z(t) \to \infty$.

قضیه: اگر u_0 به اندازه کافی کوچک باشد، در واقع $u_0(x) \le \left[\min_{y\in\Omega} \frac{\lambda_1}{\omega_1(y)}\right]\omega_1(x)$ ،

آنگاه معادله فوق جواب سرتاسری دارد، یعنی $u(x,t)$ برای هر $t\ge 0$ تعریف می‌گردد.

اثبات ـ $\tilde{\omega}(x) := \left[\min_{y\in\Omega} \frac{\lambda_1}{\omega_1(y)}\right]\omega_1(x)$ و $v(x,t) = u(x,t) - \tilde{\omega}(x)$

دقت کنید $v(x,0)\le 0$ و $v(x,t) = 0$ برای $x\in\partial\Omega$.

برای اثبات از اصل ماکسیمم استفاده می‌کنیم:

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - \Delta\tilde{\omega} = u^2 - \lambda_1\tilde{\omega} \le u^2 - \tilde{\omega}^2$$

$$= [u-\tilde{\omega}][u+\tilde{\omega}]$$

$$\Rightarrow \quad v_t - \Delta v \le [u+\tilde{\omega}]\, v$$

اگر $u + \tilde{\omega}$ کران دار باشد می‌توانیم از اصل ماکسیمم استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که

$$(*) \qquad u(x,t) \leq \tilde{\omega}(x)$$

با فرض اینکه قبلاً نشان داده‌ایم $0 \leq u(x,t)$ ، نتیجه می‌شود که می‌توان جواب PDE را برای هر زمان t گسترش داد.

دقت کنید به دلیل ترتیب $(*)$ اگر u تا زمان t_1 تعریف شده باشد، PDE زیر

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^2 \\ u(x,t_1) = u_1(x) \end{cases}$$

برای حداقل بازه $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon]$ جواب تعریف می‌شود که ε به نرم $\|u_1\|_{L^2}$ ربط دارد.

به دلیل $(*)$ می‌توان نتیجه گرفت که جواب PDE برای هر $t \geq 0$ تعریف شده است.