ریاضیات زیست

جلسه اول ۹۷/۱۱/۱۳

مدل جمعیتی : (رشد خطی)

مثال : ۱ حشره عمر متوسط یک سال را دارد.

۲ در پایان سال حشره‌های مونث، تولید نسل می‌کنند.

۳ یک کسر ثابتی از تخم‌ها به حشره تبدیل می‌شوند.

p_n : تعداد فرزندهای متولد شده در سال n-ام

a_n : تعداد حشره‌های مونث در سال n-ام

m : نسبت مرگ نوزادان

f : تعداد فرزندهای هر حشره مونث

r : تعداد حشره‌های مونث به کل حشره‌ها

$$p_{n+1} = f a_n$$

$$a_{n+1} = r\underbrace{(1-m)p_{n+1}}_{\text{تعداد فرزندهای زنده مانده}}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = [f r(1-m)]\, a_n$$

$$a_n = [f r(1-m)]^n a_0$$

نتیجه : اگر $fr(1-m)<1$ جمعیت به سمت نابودی پیش خواهد رفت.

مثال:

۱ گیاهی با طول عمر یکساله

۲ پایان تابستان گیاه تخم‌ریزی می‌کند.

۳ دانه‌های هر گیاه تا ۲ سال می‌توانند در زمین دوام بیاورند.

۴ در بهار کسری از دانه‌ها شکوفه می‌زنند.

۵ هوا: تعدادی از دانه‌ها در زمستان تحت تأثیر بارندگی و غیره از بین می‌روند یا جابجا می‌شوند.

$\gamma =$ تعداد دانه‌های هر گیاه در آخر تابستان

$\alpha =$ کسری از دانه‌های یکساله که جوانه می‌زنند.

$\beta =$ 〃 〃 دوساله 〃 〃

$\sigma =$ کسری از دانه‌ها که در زمستان از بین می‌روند.

$P_n =$ تعداد گیاه در سال n-ام

$S_n^1 =$ تعداد دانه‌های یکساله قبل از جوانه زدن (در اول بهار)

$S_n^2 =$ 〃 〃 دوساله 〃 〃 〃

$S_n^0 =$ تعداد دانه‌های تولید شده توسط گیاهان در سال n-ام

$$\left.\begin{aligned} P_n &= \alpha S_n^1 + \beta S_n^2 \\ S_{n+1}^1 &= (1-\sigma)\gamma P_n \,,\quad S_{n+1}^2 = (1-\sigma) S_n^1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{n+1} = \alpha S_{n+1}^1 + \beta S_{n+1}^2$$

$$= \alpha(1-\sigma)\gamma P_n + \beta(1-\sigma) S_n^1$$

$$P_{n+1} = \alpha(1-\sigma)\gamma P_n + \beta(1-\sigma)S^1_n = \alpha(1-\sigma)\gamma P_n + \beta\gamma(1-\sigma)^2 P_{n-1}$$

معادلات تفاضلی خطی :

$$x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n$$

$$y_n := x_{n+1} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = \alpha y_n + \beta x_n \end{cases}$$

$$X_n := \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow X_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} X_n = A X_n$$

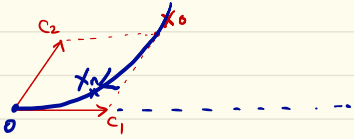
$$X_n = A^n X_0$$

حالت اول: A قطری شدنی است. $A = P^{-1} D P$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

λ_i مقادیر ویژه ماتریس A هستند که در معادله $\lambda^2 - (trA)\lambda + \det A = 0$ صدق می‌کنند.

$$A^n = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} P$$



حالت $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$

$$X_n = A^n X_0 = \lambda_1^n C_1 + \lambda_2^n C_2$$

که C_1 و C_2 بردارهای ویژه متناظر λ_1 و λ_2 هستند که $X_0 = C_1 + C_2$.

نتیجه: اگر $|\lambda_i| < 1$ برای $i = 1, 2$ خواهیم داشت $X_n \to 0$.

نکته - در مدل $x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n$ چندجمله‌ای مشخصه به صورت $\lambda^2 = \alpha\lambda + \beta$

است و اگر قدر مطلق ریشه‌های این چندجمله‌ای کوچکتر از یک باشد جبت سقوط خواهد شد.

حالت دوم: $A = P^{-1} D P$ که $D = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (در واقع $\dim(Nul(A-\lambda I)) = 1$)

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

$$X_n = \lambda^n C_1 + n\lambda^{n-1} C_2$$

نکته: اگر سیستم تفاضلی دو بعدی

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11} x_n + a_{12} y_n \\ y_{n+1} = a_{21} x_n + a_{22} y_n \end{cases}$$

مشابه به حالت قبل قابل بررسی است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(با یک تغییر متغیر همواره می‌توان این سیستم را به حالت $a_{11} = 0$ تبدیل کرد)

اگر پدیده‌ای داشته باشیم که مقدار جمعیت به m سال گذشته وابسته باشد، مدل خطی آن به صورت زیر است:

$$x_{n+m+1} = a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+2} + \cdots + a_m x_{n+m}$$

که به سادگی به یک سیستم دینامیکی خطی m-بعدی به صورت

$$X_{n+1} = A X_n$$

تبدیل می‌شود که $X_n = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$ و A یک ماتریس $m \times m$ است.

$$X_n = A^n X_0$$

فرم جردن (صورت مختلط).

برای هر ماتریس $m\times m$، A ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $A = P^{-1} J P$

و J که فرم جردن A نامیده می‌شود به صورت زیر است.

$$J = \begin{bmatrix} D_1 & & 0 \\ & D_2 & \\ 0 & & \ddots \; D_k \end{bmatrix}$$

D_i یک ماتریس $r_i \times r_i$ است، $m = r_1 + \cdots + r_k$ و $1 \le r_i \le m$.

$$D_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & \lambda_i \end{bmatrix}$$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$ مقدار ویژه A است.

نتیجه:
$$J^n = \operatorname{diag}(D_1^n, D_2^n, \ldots, D_k^n)$$

$$D_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & n\lambda_i^{n-1} & * \\ & \ddots & \ddots & n\lambda_i^{n-1} \\ 0 & & \ddots & \lambda_i^n \end{bmatrix}$$

$$X_n = A^n X_0 = P^{-1} J P X_0$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n C_0^i + n\lambda_i^{n-1} C_1^i + \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} C_2^i + \cdots + \binom{n}{r_i-1}\lambda_i^{n-r_i+1} C_{r_i-1}^i$$

نتیجه: اگر قدر مطلق همه مقادیر ویژه A کوچکتر از یک باشند، آنگاه $A^n \to 0$.

حالتهای مختلف سه بعدی:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_1 & 0 \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

ریاضیات زیست

جلسه دوم ۹۷/۱۱/۱۵

مدل غیرخطی

مدلهای خطی به صورت $X_{n+1} = AX_n$ یا در حالت اسکالر $x_{n+1} = ax_n$

نمایش داده می‌شوند. عیب بزرگ این مدلها این است که $x_n = a^n x_0$

یا به صفر میل می‌کند یا بی‌نهایت.

ضریب a در رشد خطی به صورت $a = \lambda r$ است که λ نرخ بقای نسل جدید است

و r متوسط تولید نسل گونه مورد مطالعه است.

به طور طبیعی می‌توان r یا λ (یا هر دو) تابعی از جمعیت باشند.

$a = a(x)$ نرخ رشد جمعیت به اندازه x می‌تواند باشد.

فرض طبیعی این است که a تابعی نزولی برحسب x باشد.

مدل ① $a(x_n)=\frac{r}{\alpha}x_n^{-b}$ ، $x_{n+1}=\frac{r}{\alpha}x_n^{1-b}$

r نرخ تولیدمثل است و $\lambda=\frac{1}{\alpha}x_n^{-b}$ نرخ بقای نسل جدید از دوره جنینی به بلوغ

برای اینکه این مدل معنی داشته باشد باید $\frac{1}{\alpha}x_n^{-b}<1$.

یعنی جمعیت از یک سیستم همواره بیشتر است.

نکته: ضرایب α و b از تحلیل داده‌های جمع‌آوری شده راجع به جمعیت گونه مورد مطالعه به دست می‌آید.

مدل ② $$x_{n+1}=x_n\exp\left(r\left(1-\frac{x_n}{K}\right)\right)$$

که K ظرفیت سیستم برای زندگی گونه زیستی است.

مدل ③ $$x_{n+1}=rx_n(1+ax_n)^{-b}$$

مثال ۴) $x_{n+1} = r x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$ (مدل لجستیک)

به زبان ریاضی همه این مدل‌ها را به صورت $x_{n+1} = f(x_n)$ می‌توان نشان داد.

سؤال: با توجه به تابع داده شده f و نقطه آغازین x_0، سرنوشت دنباله زیر چه می‌شود؟

$$x_0 \,,\, x_1 = f(x_0) \,,\, x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \,,\, \dots \,,\, x_n = f^n(x_0)$$

تعریف: نقاط $\bar{x} = f(\bar{x})$ که نقاط ثابت تابع f هستند جواب‌های تعادلی سیستم یا steady-state گفته می‌شوند.

$$x_n = \bar{x} + e_n \implies e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x}$$

$$= f(x_n) - f(\bar{x})$$

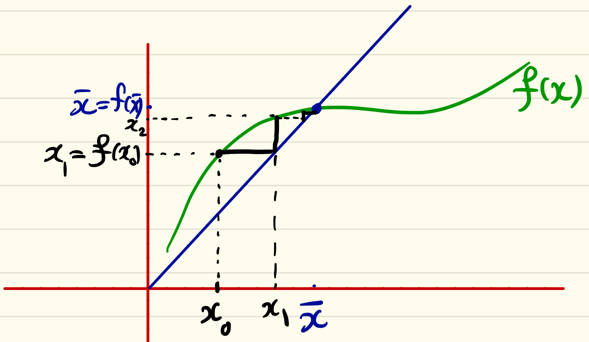
$$\approx f'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + O((x_n - \bar{x})^2)$$

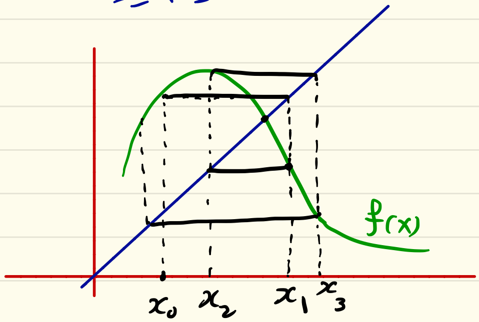
$$e_{n+1} \approx a\, e_n \qquad\qquad a = f'(\bar{x})$$

اگر $|a|<1$ آنگاه $e_n \to 0$ و درنتیجه $x_n \to \bar{x}$.

قضیه- اگر $f(\bar{x})=\bar{x}$ و $|f'(\bar{x})|<1$، آنگاه همسایگی $B_\varepsilon(\bar{x})$ وجود دارد که اگر $x_0 \in B_\varepsilon(\bar{x})$ آنگاه $x_n \to \bar{x}$.

تعریف- اینگونه نقاط را نقاط جاذب سیستم گوییم.





مدل ۱

$$x_{n+1} = \frac{r}{\alpha} x_n^{1-b}$$

$$f(x) = \frac{r}{\alpha} x^{1-b} \quad , \quad f(\bar{x}) = \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{1/b}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{r(1-b)}{\alpha} \bar{x}^{-b} = \frac{r(1-b)}{\alpha} \times \frac{\alpha}{r} = 1-b$$

نتیجه - اگر $0 < b < 2$ باشد نقطه تعادلی $\bar{x}$ جاذب است.

مدل ۲

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n \exp\left(r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right)}_{f(x_n)}$$

$$\bar{x} = f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} = K , 0$$

$$f'(x) = \exp\left(r\left(1-\frac{x}{K}\right)\right)\left[1 - \frac{r}{K}x\right] ,$$

$$f'(0) = e^r \quad , \quad f'(K) = 1-r$$

نتیجه: اگر $0<r<2$ نقطه $\bar{x}=K$ جاذب است.

نکته- در تقریب خطی $e_{n+1} = a\,e_n$ برای سیستم دینامیکی $x_{n+1}=f(x_n)$ که $a = f'(\bar{x})$ در حالت $|a|>1$ ، خواهیم داشت $|e_n| \to \infty$ و این بدان معنا است که دنباله $\{x_n\}$ نمی‌تواند در همسایگی $\bar{x}$ برای مدت طولانی باقی بماند. این حالت را حالت ناپایدار (دافع) سیستم می‌گوییم.

در مثال بالا $\bar{x}=0$ حالت ناپایدار سیستم است.

سیستم دینامیکی غیرخطی :

سیستم دوبعدی
$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n , y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n , y_n) \end{cases}$$

در حالت کلی اگر $X_n \in \mathbb{R}^m \quad , \quad F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$X_{n+1} = F(X_n)$$

حالت تعادل سیستم $\bar{X} = F(\bar{X})$ یا
$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x},\bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x},\bar{y}) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix}$$ یا $A = DF(\bar{X})$

تقریب خطی سیستم $X_{n+1} = F(X_n)$ به صورت

$$e_{n+1} = A\, e_n \qquad e_n \in \mathbb{R}^m$$

یا در حالت دو بعدی

$$\begin{cases} e^1_{n+1} = \partial_x f \cdot e^1_n + \partial_y f \, e^2_n \\ e^2_{n+1} = \partial_x g \, e^1_n + \partial_y g \, e^2_n \end{cases}$$

که مشتقات $\partial_x f$ ، $\partial_y f$ ، ... در نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ محاسبه شده اند.

قضیه: اگر قدر مطلق همه مقادیر ویژه A کوچکتر از یک باشند، آنگاه $e_n \to 0$ و $X_n \to \bar{X}$ به شرط آنکه X_0 در نزدیکی $\bar{X}$ باشد.

در این حالت جواب تعادلی $\bar{X}$ را حالت پایدار سیستم (جاذب) گوییم.

قضیه - اگر لااقل قدرمطلق یکی از مقادیر ویژه ماتریس A از یک بزرگتر باشد آنگاه سیستم دینامیکی در راستای بردار ویژه متناظر آن مقدار ویژه دافع است.

این حالت سیستم را ناپایدار گوییم.

نکته - در حالت ناپایدار، اگر ماتریس $A=DF(\bar{x})$ یک مقدار ویژه با قدرمطلق کوچکتر از یک داشته باشد در راستای بردار ویژه متناظر آن جاذب است، هرچند از نقاط دیگر در همسایگی $\bar{x}$ از همسایگی آن نقطه دور خواهند شد.

نکته - اگر نقطه $\bar{x}$ دارای این خاصیت باشد، بعد از k مرحله سیستم به همان نقطه $\bar{x}$ برگردد، آن را تناوبی گویند

$$\bar{x},\ F(\bar{x}),\ F(F(\bar{x})),\ F^3(\bar{x}),\ \dots,\ F^k(\bar{x})=\bar{x}$$

در واقع $\bar{x}$ نقطه ساکن سیستم $X_{n+1}=F^k(X_n)$ است و رفتار سیستم در همسایگی مدار تناوبی بالا با خطی سازی تابع $G(x)=F^k(x)$ در نقطه $\bar{x}$ تحلیل می‌شود.

مثال - (مدل انگل - میزبان)

سیکل زندگی : egg , larvae , pupae , adults

دو نوع حشره داریم : یکی میزبان که مطابق سیکل بالا رشد می‌کند.
دومی انگل است که در لاروا حشره میزبان تخم گذاری می‌کند.

فرضیات زیستی : ① میزبانی که مورد تهاجم انگل قرار می‌گیرد به انگل تبدیل می‌شود.

② میزبانی که مورد تهاجم قرار نگیرد به حشره میزبان تبدیل می‌شود.

③ نسبت میزبانهایی که مورد تهاجم قرار می‌گیرند به تعداد برخوردهای دو گونه وابسته است.

$P_t =$ جمعیت انگلها در سال t ام

$N_t =$ جمعیت میزبان در سال t ام

$f = f(N_t, P_t) =$ کسری از میزبان که مورد تهاجم قرار نمی‌گیرد

$c =$ نرخ متوسط تبدیل یک میزبان به انگل

$\lambda =$ نرخ رشد میزبان

$$N_{t+1} = \underbrace{\lambda}_{\text{نرخ رشد}} \times \underbrace{N_t}_{\text{جمعیت}} \times \underbrace{f}_{\text{کسری که مورد تهاجم قرار نمی‌گیرد.}}$$

$$P_{t+1} = c \times N_t \times (1 - f)$$

$$\begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t \, f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} = c N_t \left(1 - f(N_t, P_t)\right) \end{cases}$$

تعداد میزبان‌های مورد تهاجم $= \underbrace{a}_{\text{کسری که به تهاجم ختم می‌شود.}} \times \underbrace{N_t \times P_t}_{\text{کل تقابل‌های دوگونه}}$

میانگین کل جمعیت میزبان‌هایی که در یک واحد زمانی (طول عمر) مورد تهاجم قرار می‌گیرند $\mu = \dfrac{a N_t P_t}{N_t} = a P_t$

فرآیند پواسونی : احتمال وقوع r رخداد در واحد زمان $P(r) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}$

که μ میانگین تعداد رخدادها در واحد زمان است .

پارامتر f در واقع احتمال این است که در واحد زمان (طول عمر) میزبان توسط انگل مورد حمله قرار نگیرد .

یا در حقیقت هیچ رخدادی در واحد زمان نداشته باشیم .

$$f = P(0) = e^{-\mu} = e^{-aP_t}$$

به طور خلاصه

$$\begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} = c N_t (1 - e^{-aP_t}) \end{cases} .$$

این سیستم دو نقطه تعادلی : $(\bar{N}, \bar{P}) = (0,0), \left(\dfrac{\ln\lambda}{a}, \dfrac{\lambda \ln\lambda}{(\lambda-1)ac}\right)$

$$F(N,P) = \left(\lambda N e^{-aP} , \; cN(1-e^{-aP})\right)$$

$$DF(0,0) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر $|\lambda|<1$ ، نقطه $(0,0)$ حالت پایدار و جاذب سیستم است .

$$DF(\bar{N},\bar{P}) = \begin{bmatrix} 1 & -\ln\lambda \\ c & -\dfrac{c\ln\lambda}{\lambda} \end{bmatrix}$$

فرض اضافه: نرخ رشد جمعیت میزبان را به صورت لجستیک در نظر می‌گیریم.

$$\lambda = \lambda(N_t) = \exp\left(r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)\right)$$

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t \exp\left(r\left(1-\frac{N_t}{k}\right) - aP_t\right) \\ P_{t+1} = cN_t \left(1-\exp(-aP_t)\right) \end{cases}$$

$$q = \frac{\bar{N}}{K}, \qquad \bar{P} = \frac{r}{a}(1-q), \quad \bar{N} = \frac{\bar{P}}{1-e^{-a\bar{P}}} \approx \frac{1}{a}$$

$$DF = \begin{bmatrix} 1-\frac{r}{k}\bar{N} & -a\bar{N} \\ \bar{P}/\bar{N} & a\bar{P} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det DF &= r(1-q)(2-rq) \\ tr &= 1+r-2rq \end{aligned}$$

با شرایط $|\det| < 1$, $|tr| < 2$ ، $|tr| < 1+\det$ هر دو مقدار ویژه کوچکتر از یک هستند.

ریاضیات زیست

جلسه ۲۷ /۱۱/ ۹۷

مدلهای پیوسته

مدل‌های گسسته $\qquad x_{n+1} = f(x_n)$

در مدل گسسته همواره یک دوره زمانی مشخص و ثابتی را در نظر می‌گیرید و تغییرات دینامیکی را بررسی می‌کنیم.

درمقابل مدلهای پیوسته زمان را یک کمیت پیوسته نگاه می‌کنیم و در هر بازه کوچکی از زمان تغییرات دینامیکی جمعیت قابل تأمل است.

مثال ـ تکثیر باکتری :

فرض : در فرآیند تکثیر باکتری می‌توان فرض کرد که در هر Δt ثانیه یک کسری از جمعیت با تقسیم شدن تکثیر می‌شوند.

$$N(t) = \text{تعداد باکتری در زمان } t$$

$$N(t+\Delta t) = N(t) + K\,N(t)\,\Delta t$$

$K =$ نرخ رشد جمعیت . به تعبیری در واحد زمان به اندازه K برابر کل جمعیت افزایش خواهیم داشت .

در مقایسه با مدل گسسته باید نوشته شود :
$$N_{n+1} = N_n + K N_n$$

$$\hookrightarrow \quad N_n = (K+1)^n N_0$$

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = K N(t) \longleftarrow$$ مدل پیوسته

(مدل Malthus ، 1978)
$$\frac{dN}{dt} = K N \longrightarrow N(t) = e^{Kt} N_0$$

$$N_n = N_0 e^{n \log(K+1)} \approx N_0 e^{n(K - K^2/2)}$$ در مقابل در مدل گسسته

اختلاف جواب در این دو مدل به این برمی‌گردد که جمعیت تکثیر شده در مدل گسسته باید یک واحد زمانی صبر کنند تا توانایی تکثیر را داشته باشند ولی در مدل پیوسته به محض تکثیر شدن باکتری‌ها جدید توانایی تکثیر را دارند.

در مدل ساده Malthus فرض بر این است که منابع به وفور در محیط پیدا می‌شود.

برای تحلیل دقیق‌تر فرض می‌کنیم $C(t)$ میزان غلظت منابع غذایی باشد و نرخ رشد جمعیت باکتری‌ها را تابعی از C قرار می‌دهیم $K = K(C)$.

ساده‌ترین مدل: $K = \kappa C \longleftarrow$

$$\frac{dN}{dt} = \kappa C N \qquad (1)$$

هر باکتری در واحد زمان α واحد از منابع غذایی برای تکثیر استفاده می‌کند.

$$\text{میزان کاهش منابع غذایی} = C(t+\Delta t) - C(t) = -\alpha \left(N(t+\Delta t) - N(t) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dC}{dt} = -\alpha \frac{dN}{dt} = -(\alpha \kappa N) C \qquad (2)$$

تذکر: در مدل تغییر جمعیت $\frac{dN}{dt} = KN$ اگر $K<0$ به معنای نرخ مرگ (از بین رفتن) جمعیت است.

$$(2) \Rightarrow \frac{d}{dt}(C+\alpha N)=0 \Rightarrow C(t)+\alpha N(t)=C_0+\alpha N_0$$

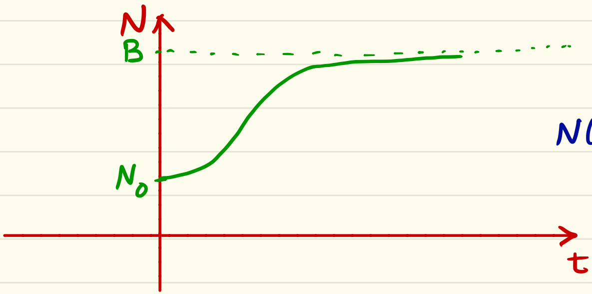
$$(1) \Rightarrow \frac{d}{dt}N=\kappa CN=\kappa\,(C_0+\alpha N_0-\alpha N)\,N$$

مدل لجستیک

$$N(t)=\frac{N_0 B}{N_0+(B-N_0)\,e^{-rt}}$$

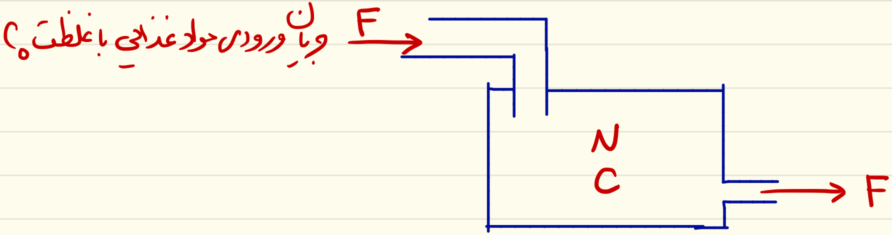
$$r=\kappa(C_0+\alpha N_0)\ , \quad B=\frac{C_0+\alpha N_0}{\alpha}$$

ظرفیت محیط



$$N(t)\longrightarrow B\ , \quad C(t)\longrightarrow 0$$

مدل اصلاح شده :



در داخل ظرف $N(t)$ و $C(t)$ غلظت باکتری و مواد غذایی است.

با جریان F مواد غذایی وارد و با همین جریان باکتری و مواد غذایی خارج می‌شوند

در واقع حجم مجموع N و C ثابت است.

$$\frac{dN}{dt} = \overbrace{K(C)N}^{\text{میزان تکثیر باکتری}} - \overbrace{FN}^{\text{جریان خروجی}}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha \underbrace{K(C)N}_{\text{میزان مصرف مواد غذایی}} - \underbrace{FC}_{\text{جریان خروجی}} + \underbrace{FC_0}_{\text{جریان ورودی}}$$

معادله اول را از لحاظ بعد بررسی می‌کنیم:

$$\underbrace{\frac{dN}{dt}}_{\frac{\text{number}}{\text{volume} \times \text{time}}} = \underbrace{K(C)}_{\frac{1}{\text{time}}}\, \underbrace{N}_{\frac{\text{number}}{\text{volume}}} - \underbrace{F}_{\frac{\text{volume}}{\text{time}}}\, \underbrace{N}_{\frac{\text{number}}{\text{volume}}}$$

جمله آخر FN از لحاظ بعد با بقیه جملات همخوانی ندارد. دلیلش این است که F میزان حجم خروجی را نشان می‌دهد که در N (غلظت باکتری) معنای تغییر غلظت را نمی‌دهد. درواقع FN تعداد باکتری‌هایی است که خارج شده است

برای محاسبه تغییر غلظت باید به جای FN نوشت $\frac{FN}{V}$.

راه دیگر برای نگاه به مسأله: $N(t)V =$ جمعیت باکتری را نشان می‌دهد و مدل را برحسب تغییرات جمعیت نوشت (به جای غلظت)

$$\frac{d(N(t)V)}{dt} = K(C)\big(N(t)V\big) - FN$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} = K(C)N - \frac{FN}{V}$$

به همین ترتیب

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha K(C) N - \frac{FC}{V} + \frac{FC_0}{V}$$

$K(C) =$ نرخ رشد را می‌توان خطی گرفت که به مدل لجستیک می‌رسد.

مدل واقعی‌تر این است که

$$K(C) = \frac{K_{max} C}{K_0 + C}$$

K_{max} ماکزیمم نرخ رشد است و K_0 حالتی است که نرخ رشد $\frac{1}{2} K_{max}$ است.

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \dfrac{K_{max} C N}{K_0 + C} - \dfrac{FN}{V} \\[2ex] \dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{\alpha K_{max} C N}{K_0 + C} - \dfrac{FC}{V} + \dfrac{FC_0}{V} \end{cases}$$

بی‌بعدسازی مدل:

در این فرآیند متغیرهای N و C را به صورت حاصلضرب یک پارامتر بی‌بعد در واحد اندازه‌گیری می‌نویسیم.

$$N(t) = \underset{\text{پارامتر بی‌بعد}}{n(t)} \times \underset{\text{واحد اندازه‌گیری}}{\hat{N}} \qquad C(t) = c(t) \times \hat{C}$$

همینطور برای زمان $T = t\hat{T}$

$$\frac{d(n\hat{N})}{d(t\hat{T})} = \frac{\hat{T}K_{max}(c\hat{C})(n\hat{N})}{K_0 + c\hat{C}} - \frac{\hat{T}F(n\hat{N})}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dn}{dt} = \frac{\hat{T}K_{max}\,cn}{K_* + c} - \alpha_1 n$$

$$\alpha_1 = \frac{F\hat{T}}{V}, \qquad K_* = \frac{K_0}{\hat{C}}$$

به طور مشابه

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{\alpha_2\,cn}{K_* + c} - \alpha_1 c + \beta_1$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha K_{max}\hat{N}\hat{T}}{\hat{C}}, \qquad \beta_1 = \frac{FC_0\hat{T}}{\hat{C}V}$$

با انتخاب واحد اندازه‌گیری مناسب می‌توان مدل را به صورت زیر ساده کرد

$$
\begin{cases}
\dfrac{dn}{dt} = \alpha_* \left(\dfrac{c}{1+c}\right) n - n \\[2ex]
\dfrac{dc}{dt} = -\left(\dfrac{c}{1+c}\right) n - c + \beta_*
\end{cases}
$$

که $\hat{T} = \dfrac{V}{F}$ ، $\hat{C} = K_0$ و $\hat{N} = \dfrac{K_0 F}{\alpha K_{max} V}$.

$$\alpha_* = \hat{T} K_{max} = \frac{K_{max} V}{F} \quad , \quad \beta_* = \frac{F C_0 \hat{T}}{\hat{C} V} = \frac{C_0}{K_0}$$

ریاضیات زیست

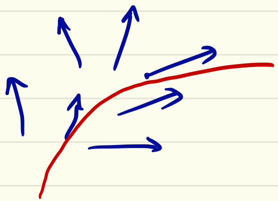
جلسه چهارم ۹۷/۱۱/۲۹

دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی (ODE)

$$\dot{X} = F(t, X)$$

$$X : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

میدان برداری $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$



جواب این معادله خم $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ که در هر نقطه $\gamma(t)$ مماس γ میدان برداری F است.

$$\dot{\gamma} = F(t, \gamma(t))$$

قضیه وجود جواب: اگر F تابعی پیوسته باشد، آنگاه برای هر بردار $X_0 \in \mathbb{R}^n$ و $t_0 \in \mathbb{R}$ معادله فوق جوابی دارد که $X(t_0) = X_0$.

قضیه یکتایی جواب: اگر میدان $F(t,X)$ تابعی پیوسته و نسبت به X لیپ‌شیتز باشد یعنی ثابت $L>0$ وجود دارد که

$$|F(t,X)-F(t,Y)| \leq L|X-Y| \qquad \forall X,Y \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

آنگاه جواب معادله دیفرانسیل $\dot{X}=F(t,X)$ با شرط اولیه $X(t_0)=X_0$ یکتا است.

تذکر: اگر میدان برداری $F(t,X)=F(X)$ مستقل از زمان باشد، معادله دیفرانسیل $\dot{X}=F(X)$ اتونوموس گوییم. ویژگی این معادلات این است که اگر $X(t)$ جواب معادله باشد به ازای هر θ ثابت $Y(t)=X(t+\theta)$ نیز جواب معادله است که زمان شروع مسیر حرکت تغییر کرده است. قضیه یکتایی جواب تضمین می‌کند که خم‌های جواب هیچگاه همدیگر را قطع نمی‌کنند. درصورتی‌که اگر میدان برداری وابسته به زمان باشد، خم‌های جواب در فضای فاز می‌توانند همدیگر را قطع کنند ولی در زمان‌های مختلف. یعنی اگر $X(t)$ و $Y(t)$ دو جواب $\dot{X}=F(t,X)$ باشند ممکن است $X(t_1)=Y(t_2)$ که تناقضی با قضیه یکتایی جواب ندارد.

تعریف. اگر $F(t, X_*) = 0$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}$. آنگاه تابع ثابت $X(t) \equiv X_*$ یک جواب معادله است.

این جواب را ایستا (Steady State) یا نقطه تعادل سیستم می‌نامیم.

خطی‌سازی: اگر X_* نقطه تعادل $\dot{X} = F(X)$ باشد و $A = DF(X_*)$ یک ماتریس $n \times n$ است.

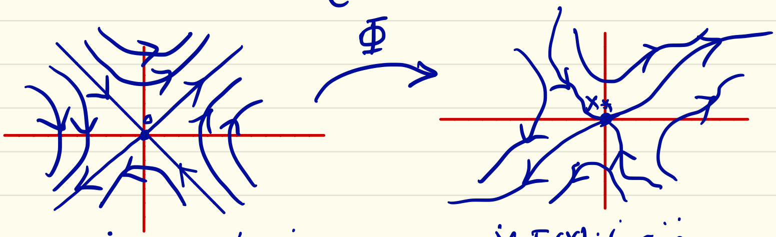
سیستم $\dot{X} = AX$ خطی شده معادله غیرخطی $\dot{X} = F(X)$ در نقطه X_* است.

اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه A ناصفر باشند، نقطه X_* را یک نقطه تعادل هذلولوی می‌نامیم.

قضیه: اگر X_* یک نقطه تعادل هذلولوی $\dot{X} = F(X)$ باشد و $A = DF(X_*)$. نگاشت همریختی $\Phi : B_\delta(0) \to B_\varepsilon(X_*)$

وجود دارد که اگر $\gamma(t)$ جواب $\dot{X} = AX$ باشد، آنگاه $\eta(t) = \Phi(\gamma(t))$ جواب $\dot{X} = F(X)$ است.

به علاوه $\Phi(0) = X_*$.



فضای فاز $\dot{X} = AX$ فضای فاز $\dot{X} = F(X)$

سیستم خطی :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

جواب این دستگاه برابر است با

$$X(t) = \exp\big((t-t_0)A\big)\, X_0$$

که

$$\exp(B) = I + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{3!} + \cdots$$

اگر $A = P^{-1} J P$ که J فرم جردن ماتریس A باشد آنگاه به سادگی می‌توان دید که

$$\exp(A) = P^{-1} \exp(J)\, P$$

$$\exp(tA) = P^{-1} \exp(tJ)\, P$$

اگر قرار دهیم $Y = PX$ آنگاه $\dot{Y} = P\dot{X} = PAX = PAP^{-1}Y = JY$

با تبدیل خطی $X \longmapsto PX = Y$ جمهای جواب $\dot{X} = AX$ به جمهای جواب $\dot{Y} = JY$ تصویر می‌شوند.

برای بررسی رفتار سیستم $\dot{X} = AX$ به سراغ $\dot{Y} = JY$ می‌رویم. برای این کار کافی است e^{tJ} را محاسبه کنیم.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند.

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r} \end{bmatrix}$$

$$e^{tJ_i} = e^{t\lambda_i} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{r_i \times r_i}$$

جواب $\dot{Y} = JY$ بصورت $Y = (u_1, \dots, u_r)$ که u_i شامل r_i مؤلفه Y است

متناظر بلوک جردن J_i . جواب با شرط آغازین Y_0 برابر $Y(t) = e^{tJ} Y_0$ است .

یعنی

$$Y(t) = \left(e^{tJ_1} u_1^0, \dots, e^{tJ_r} u_r^0\right)$$

مثلاً اگر در $\mathbb{R}^3$ ، داشته باشیم $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 0 \\ 0 & & \mu \end{bmatrix}$ فرم جردن باشد ، آنگاه

$$e^{t\lambda}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = e^{t\lambda}\begin{bmatrix} y_1^0 + t y_2^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \left(e^{t\lambda}(y_1^0 + t y_2^0), e^{t\lambda} y_2^0, e^{t\mu} y_3^0\right)$$

نتیجه: اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه A منفی باشند، آنگاه $t \to +\infty$ وقتی $e^{tA} \to 0$

و همه جوابهای $\dot{X} = AX$ به صفر همگرا خواهند بود. در این حالت مبدأ را نقطه جاذب (پایدار مجانبی) می‌نامیم.

مثال - در مثال قبل اگر $\lambda = i\omega$. آنگاه دو جواب حقیقی زیر به دست می‌آیند:

این حالت در $\mathbb{R}^3$ اتفاق نمی‌افتد

حداقل بعد ۵ لازم است.

(باید $i\omega$ - نیز مقدار ویژه باشد)

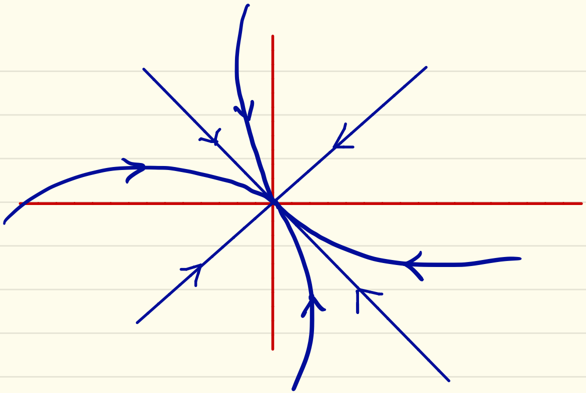
$$\begin{cases} Y_1(t) = \left(\cos(\omega t)\,(y_1^0 + t y_2^0) \,,\ \cos(\omega t)\, y_2^0 \,,\ e^{t\mu} y_3^0 \right) \\ Y_2(t) = \left(\sin(\omega t)\,(y_1^0 + t y_2^0) \,,\ \sin(\omega t)\, y_2^0 \,,\ e^{t\mu}\, y_3^0 \right) \end{cases}$$

مثال - $J = \begin{bmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$ و $\mu < 0$ آنگاه وقتی $t \to \infty$ جوابهای معادله کران دار می‌مانند.

$$Y(t) = \left(e^{it\omega} y_1^0 \,,\ e^{-it\omega} y_2^0 \,,\ e^{t\mu} \right)$$

در این حالت مبدأ پایدار است. زیرا همه جوابها در نزدیکی مبدأ باقی می‌مانند.

مثال-



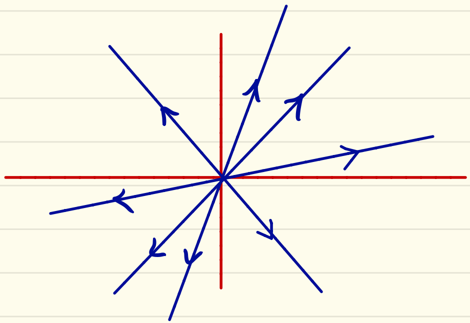
راستای متناظر مقدار ویژه μ.

فرم جردن ماتریس A به صورت

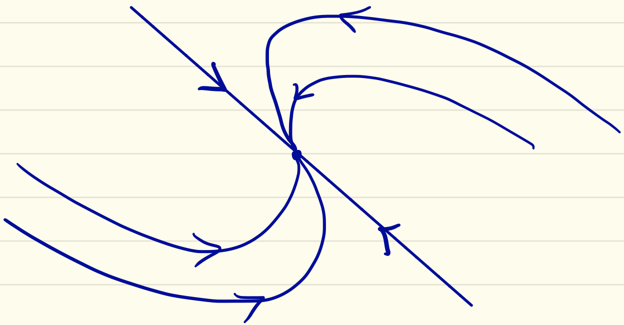
$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$$

$(\lambda\neq\mu)$. $\lambda<\mu<0$

$$(e^{t\lambda}y_1 , e^{t\mu}y_2)$$

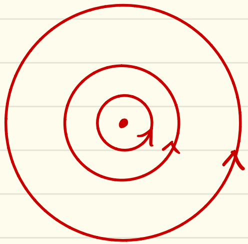


$\lambda=\mu>0$

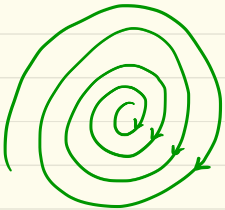


$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad , \lambda < 0$$

$$e^{t\lambda}(y_1 + t y_2 , y_2)$$



حالت $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\beta$



حالت $\alpha < 0 \ , \ \lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$

مدل رشد باکتری :

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \alpha_*\left(\dfrac{c}{1+c}\right)n - n = f(n,c) \\[2ex] \dfrac{dc}{dt} = -\left(\dfrac{c}{1+c}\right)n - c + \beta_* = g(n,c) \end{cases}$$

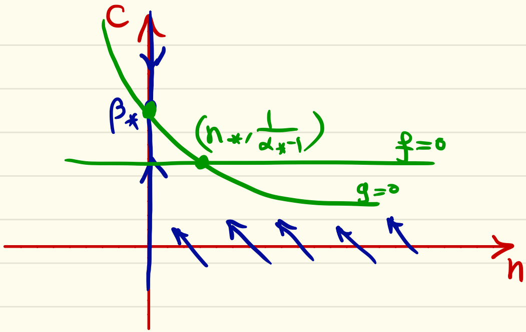
$$f(n,c) = 0 \implies n = 0\,, \quad c = \frac{1}{\alpha_* - 1}$$

$$g(n,c) = 0 \implies n = (\beta_* - c)\,\frac{1+c}{c}$$

دو نقطه تعادل $(0,\beta_*)$ و $\left(n_*, \frac{1}{\alpha_*-1}\right)$ در ربع اول $n,c \geq 0$ وجود دارد.

دقت کنید به ازای هر نقطه آغازینِ (n_0,c_0) در ربع اول هم جواب معادله بالا در ربع اول باقی می‌ماند.

(به لحاظ مفاهیم زیستی این خاصیت مدل ضروری است)



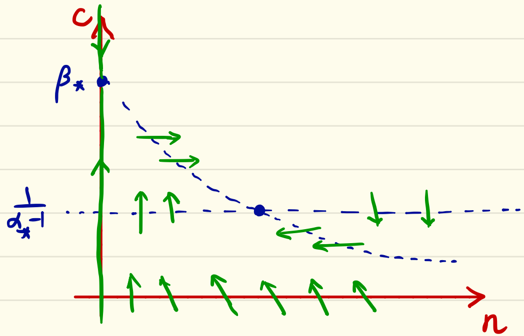
روی خط $n=0$،

$f=0 , \quad g=\beta_*-c$

روی خط $c=0$،

$f=-n , \quad g=\beta_*$

بنابر قضیه یکتایی جواب معادله دیفرانسیل هیچ جواب‌هایی که از نقطه‌ای در ربع اول شروع می‌شوند نمی‌توانند خط $n=0$ را قطع کنند. همچنین از آنجا که جهت میدان برداری روی $c=0$ به سمت نیم صفحه بالا است در نتیجه همه جواب‌هایی که از نقطه $(n_0,0)$ شروع می‌شوند به سمت داخل ربع اول حرکت می‌کنند.



حالت تعادل $(0, \beta_*)$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_*\beta_*}{1+\beta_*} - 1 & 0 \\ -\frac{\beta_*}{1+\beta_*} & -1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = \frac{\alpha_*\beta_*}{1+\beta_*} - 1$

اگر $\beta_*(\alpha_*-1) > 1$ نقطه $(0, \beta_*)$ زینی است. $\left[\frac{C_0}{K_0}\left(K_{max}\frac{V}{F} - 1\right) > 1\right]$

نکته: اگر $\beta_*(\alpha_*-1) < 1$ تنها نقطه تعادل در ناحیه $c, n \geq 0$ همین نقطه است و حالت تعادل $\left(n_*, \frac{1}{\alpha_*-1}\right)$ رخ نمی‌دهد.

معادله خطی شده در این نقطه:

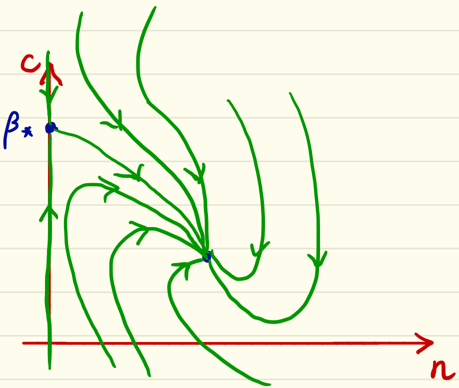
$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \lambda_2 n \\ \frac{dc}{dt} = -\frac{\beta_*}{1+\beta_*} n - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(t) - 0 = e^{\lambda_2 t} n_0 \\ C(t) - \beta_* = \frac{-1}{\alpha_*} e^{\lambda_2 t} n_0 + \left(C_0 - \frac{1}{\alpha_*}\right) e^{-t} \end{cases}$$

پس از انتقال به نقطه $(0, \beta_*)$

حالت تعادل $\left(n_*,\ \dfrac{1}{\alpha_*-1}\right)$

$$J=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_* A \\ -1/\alpha_* & -(A+1) \end{bmatrix},\quad A=\left(\frac{\alpha_*-1}{\alpha_*}\right)^2 n_*$$

مقادیر ویژه $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-A$



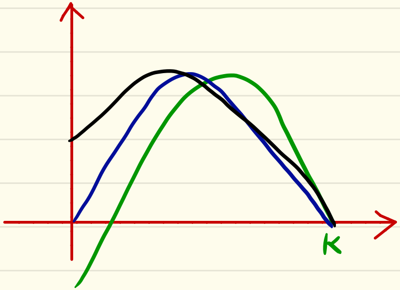
بنابراین این حالت یک نقطه جاذب است .

ریاضیات زیست

جلسه پنجم ۹۷/۱۲/۴

مدل‌های جمعیتی :

تک گونه :



$$\frac{dN}{dt} = N\,g(N)$$

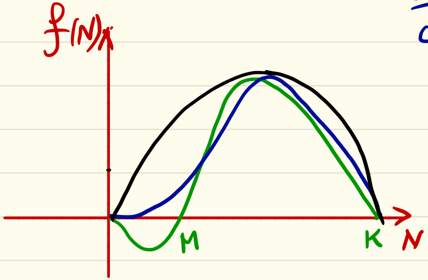
نرخ رشد

۱. رشد نمایی (Malthus, 1798)

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

۲. رشد لجستیک (Verhulst, 1838)

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1-\frac{N}{K}\right)N$$



۳. Allee Effect : بیشترین نرخ رشد برای وقتی است که جمعیت به یک اندازه‌ای رسیده باشد. (در مقابل در رشد لجستیک بیشترین نرخ رشد برای حالت $N=0$ است)

$$g(N) = r\left(\frac{N}{M}-1\right)\left(1-\frac{N}{K}\right)$$ یا $$rN\left(1-\frac{N}{K}\right) \quad , \quad (K-N)(K+N+\mu)$$

۴- (Gompertz law) هرچه سن بالاتر برود نرخ رشد کمتر می‌شود. (نرخ مرگ و میر بیشتر می‌شود)

به سه نوع زیر می‌توان این مدل را بیان کرد:

- $$\frac{dN}{dt} = \underbrace{\lambda e^{-\alpha t}}_{\text{نرخ رشد}} N$$

- $$\frac{dN}{dt} = \gamma N \, , \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\alpha \gamma$$

- $$\frac{dN}{dt} = (-k \ln N) N$$

تعامل دوگونه جمعیت ← شکار و شکارچی

← رقابتی

← همزیستی

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\, f(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = y\, g(x,y) \end{cases}$$

مدل شکار و شکارچی : x جمعیت شکار

y جمعیت شکارچی

هرچه x بیشتر باشد نرخ رشد y بیشتر است : $\partial_x g > 0$

هرچه y بیشتر باشد نرخ رشد x کمتر است : $\partial_y f < 0$

در مدل لجستیک برای رشد جمعیت شکار و شکارچی باید $\partial_x f \leq 0$ و $\partial_y g \leq 0$.

ساده‌ترین مدل (Lotka-Volterra, 1910)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - by) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = y(-d + cx) \end{cases}$$

علامت منفی در اینجا بدین معناست که شکارچی تنها از شکار تغذیه می‌کند

وقتی $x=0$ است جمعیت شکارچی رو به نابودی می‌رود.

حالتهای تعادل : $(0,0)$ ، $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$

خطی سازی

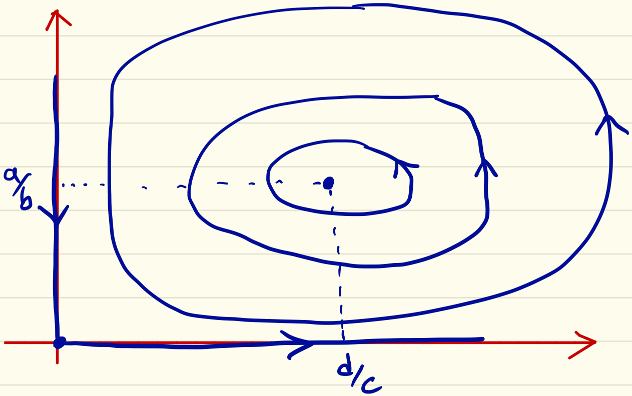
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

نقطه زینی

$$\begin{bmatrix} 0 & -bd/c \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $\pm\sqrt{ad}\, i$

نقطه تعادل غیرهذلولوی است.



خم‌های جواب روی سطوح تراز

تابع

$$L(x,y)= cx - d\log x + by - a\log y$$

قرار دارند.

مدل کمی پیچیده‌تر: فرض کنیم رشد جمعیت شکار به تنهایی لجستیک باشد. یعنی

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax\left(1-\dfrac{x}{K}\right) - bxy \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -dy + cxy \end{cases}$$

نقطه تعادل $(0,0)$ در این مدل مشابه قبل زینی است. نقطه دوم به صورت $\left(\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{b} - \dfrac{da}{cbK}\right)$ است که

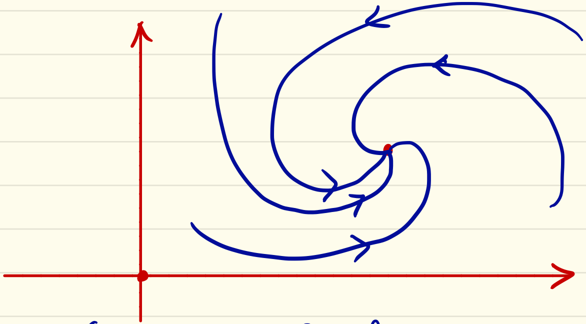
خطی شده سیستم در این نقطه به صورت

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{ad}{cK} & -\frac{bd}{c} \\ c\left(\frac{a}{b} - \frac{da}{cbK}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

است.

هر دو مقدار ویژه A منفی هستند. $\Leftarrow$ $\det A > 0$ ، $\operatorname{tr} A < 0$

(حالت $\det A < 0$ معادل این است که $\frac{a}{b} - \frac{da}{cbK} < 0$ و در این حالت نقطه تعادل دوم در ربع اول قرار ندارد)



قضیه (شاخص پوانکاره): اگر سیستم دوبعدی جواب تناوبی داشته باشد، باید داخل آن یک نقطه تعادل باشد که شاخص پوانکاره آن $+1$ است.

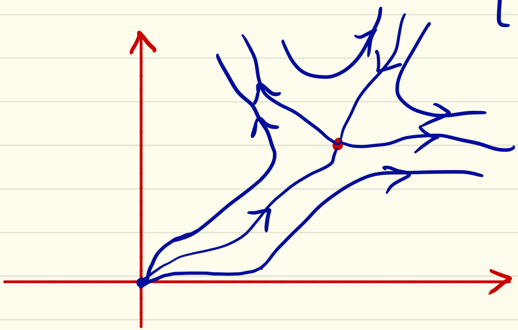
مدل رقابتی :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\, f(x,y) \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = y\, g(x,y) \end{cases}$$

$\partial_y f < 0$ ، $\partial_x g < 0$ $\longleftarrow$ x و y رقابتی برای حیات دارند.

مثال ساده :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = cy - dxy \end{cases}$$



نقاط تعادل $(0,0)$ و $(c/d \,,\, a/b)$

$(0,0)$ $\downarrow$ دافع $\longrightarrow$ هر دو وضعیت ناپایدار است

$(c/d \,,\, a/b)$ $\downarrow$ زینی

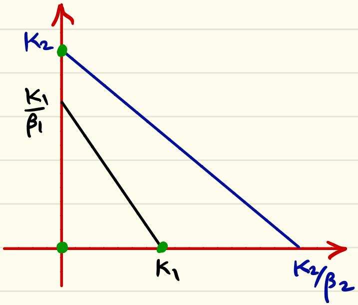
جهت هر دو گونه به بی‌نهایت میل می‌کند.

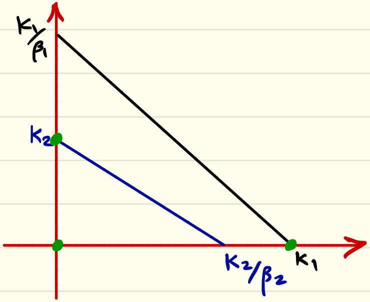
اصلاح مدل با فرض رشد لجستیک برای هر دو گونه :

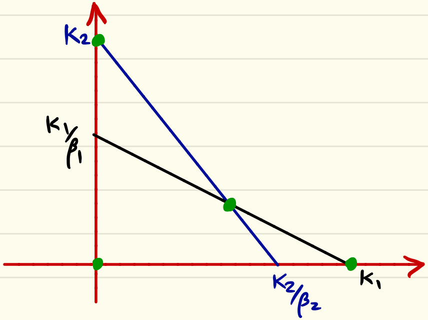
$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = r_1 x \left(K_1 - x - \beta_1 y\right) \\[2ex]
\dfrac{dy}{dt} = r_2 y \left(K_2 - y - \beta_2 x\right)
\end{cases}
$$

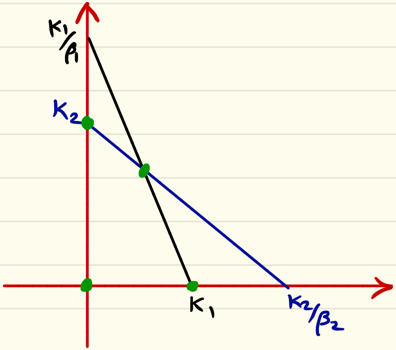
Nullclines : $\begin{cases} x = 0 \quad \text{یا} \quad x + \beta_1 y = K_1 \\ y = 0 \quad \text{یا} \quad \beta_2 x + y = K_2 \end{cases}$

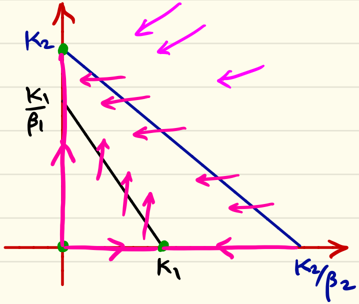
حداکثر سه نقطه تعادل داریم. چهار حالت زیر می‌تواند رخ دهد.


K_2
K_1/β_1
K_1
K_2/β_2

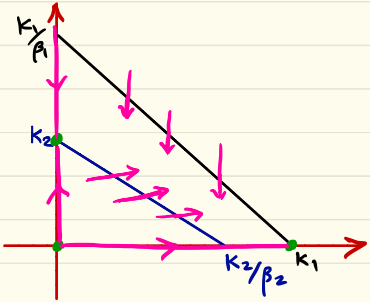

K_1/β_1
K_2
K_2/β_2
K_1


K_2
K_1/β_1
K_2/β_2
K_1

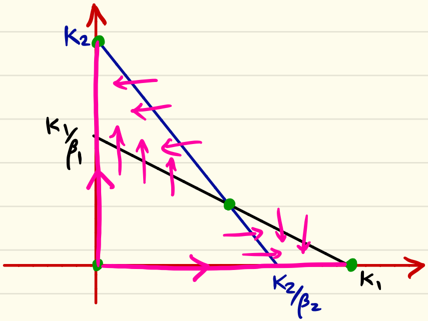

K_1/β_1
K_2
K_1
K_2/β_2



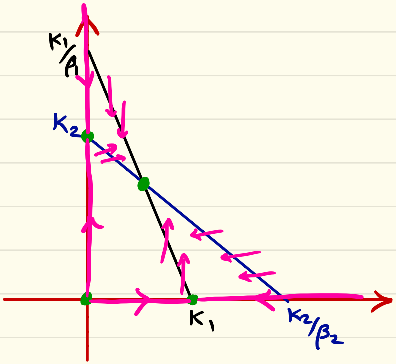
K2
K1/β1
K1
K2/β2



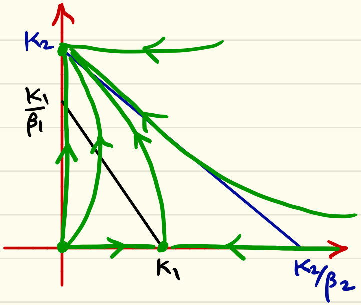
K1/β1
K2
K2/β2
K1

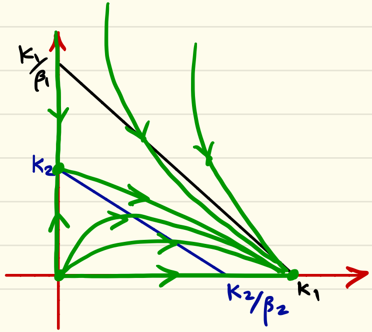


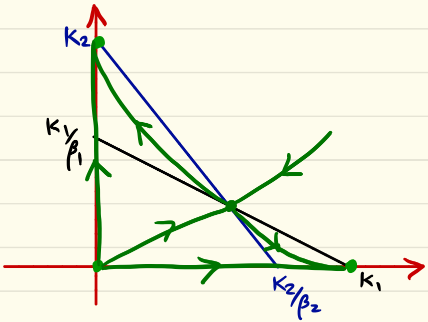
K2
K1/β1
K2/β2
K1

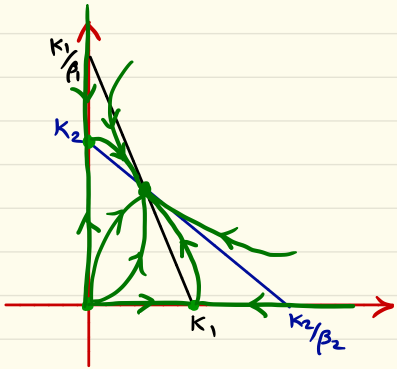


K1/β1
K2
K1
K2/β2









تنها حالتی که یک وضعیت تعادل پایدار ارائه
کنند که هردو گونه بقاء دارند .

ریاضیات زیست

جلسه ششم ۹۷,۱۲,۶

مدل‌های اپیدمی

مدل SIR :

Kermack-Mckndrick (1927)

S : گروه مستعد بیماری

I : گروه ناقل بیماری

R : گروه واکسینه

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta} \boxed{I} \xrightarrow{\nu} \boxed{R}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \nu I \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = \nu I \end{cases}$$

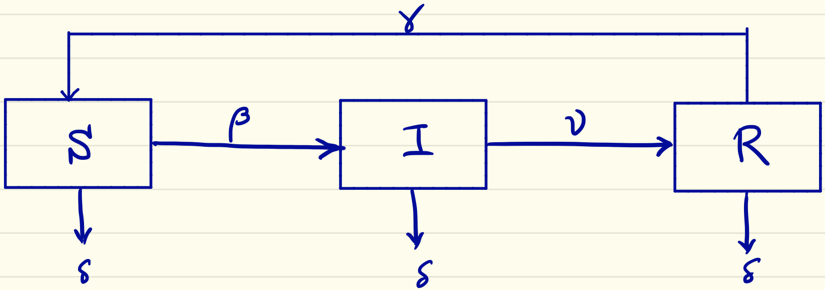
فرض این است که $S+I+R=N$ ثابت است.

SIRS مدل

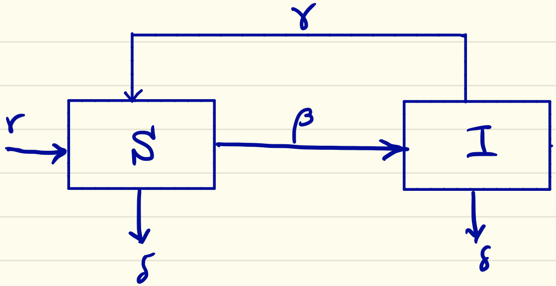
$$
\begin{tikzcd}
\boxed{S} \arrow[r, "\beta"] & \boxed{I} \arrow[r, "\nu"] & \boxed{R} \arrow[ll, bend right, "\gamma"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS}{dt} = -\beta S I + \gamma R \\[2ex]
\dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \nu I \\[2ex]
\dfrac{dR}{dt} = \nu I - \gamma R
\end{cases}
$$

مدل SIRS با نرخ مرگ طبیعی



مدل SIS با نرخ مرگ طبیعی



$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I - \delta S + \gamma I + rN \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \delta I - \gamma I \\[2ex] N = S + I \end{cases}$$

مدل SIRS

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I + \gamma R \\[2mm] \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \nu I \\[2mm] \dfrac{dR}{dt} = \nu I - \gamma R \end{cases}$$

چون $S+I+R=N$ ثابت است، با

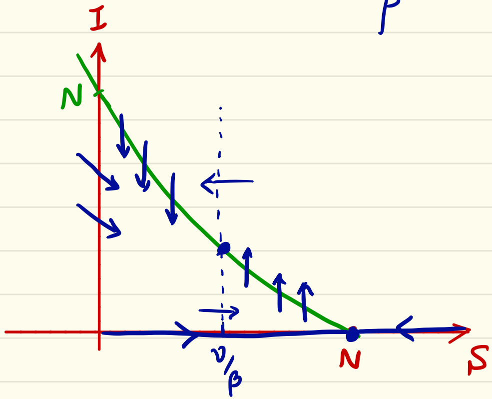
جایگزینی $R = N - S - I$ می‌توان معادله R را حذف کرد.

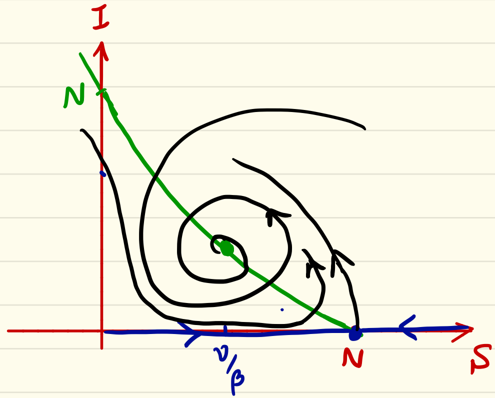
$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I + \gamma (N - S - I) \\[2mm] \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \nu I \end{cases}$$

Nullclines :
$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = 0 \implies I = 0 \quad \text{یا} \quad S = \nu/\beta \\[2mm] \dfrac{dS}{dt} = 0 \implies \gamma (N - S - I) = \beta S I \end{cases}$$

دو نقطه تعادل $(S,I)=(N,0)$ و $\left(\nu/\beta , \dfrac{\gamma(N-\nu/\beta)}{\nu+\gamma}\right)$ وجود دارد.

نقطه دوم به شرطی در ناحیه $0 \le S, I$ قرار دارد که $\nu/\beta < N$.

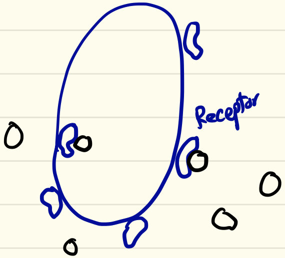




مدلهای پدیده های مولکولی

در مدل رشد باکتری میزان مصرف مواد غذایی توسط هر باکتری با فرمول $K(C)=\frac{K_{max}C}{K_0+C}$ بیان شد.

فرآیند تغذیه یک باکتری به صورت مولکولی بدین شرح است.



۱. در بدنه باکتری گیرنده های مواد غذایی وجود دارند.

۲. هرکدام از گیرنده ها یک سلول مواد غذایی را جذب می‌کند.

۳. گیرنده و سلول مواد غذایی به داخل سلول باکتری نفوذ می‌کند و ماده غذایی را آزاد می‌کند.

۴. گیرنده آزاد شده به سطح سلول باکتری برمی‌گردد و فرآیند جذب را تکرار می‌کند.

$C=$ غلظت مواد غذایی

$X_0=$ گیرنده های آزاد

$X_1=$ گیرنده هایی که مواد غذایی جذب کرده اند.

$P=$ مواد غذایی آزاد شده داخل سلول باکتری

شیوه تغذیه سلول باکتری حاصل دو فرایند شیمیایی زیر است :

فرض براین است که جذب مواد غذایی قبل از ورود به داخل سلول برگشت پذیر است .

$$C + X_0 \underset{K_{-1}}{\overset{K_1}{\rightleftharpoons}} X_1$$

$$X_1 \xrightarrow{K_2} P + X_0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = -K_1 c x_0 + K_{-1} x_1 \\[2ex] \dfrac{dx_0}{dt} = -K_1 c x_0 + K_{-1} x_1 + K_2 x_1 \\[2ex] \dfrac{dx_1}{dt} = K_1 c x_0 - K_{-1} x_1 - K_2 x_1 \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = K_2 x_1 \end{cases}$$

در سه معادله اول کست P ظاهر نمی‌شود. برای همین می‌توان از معادله چهارم صرف نظر کرد.

همچنین $r = x_0 + x_1$ مقدار ثابتی است. زیرا مجموع گیرنده‌های آزاد و اشغال شده همیشه عدد ثابتی است.

درضمن $\frac{dx_0}{dt} + \frac{dx_1}{dt} = 0$ در معادله برقرار است. درنتیجه یک سیستم دینامیکی دو بعدی به شرح زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = -k_1 rc + (k_{-1} + k_1 c)x_1 \\ \\ \frac{dx_1}{dt} = k_1 rc - (k_{-1} + k_2 + k_1 c)x_1 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم که $\frac{dx_1}{dt} \approx 0$ یا به طور معادل $x_1 = \frac{k_1 rc}{k_{-1} + k_2 + k_1 c}$ آنگاه معادله اول به صورت

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{K_{max} C}{K_0 + C} = -K(C)$$

که توصیه می‌کند که چرا نرخ مصرف مواد غذایی توسط باکتری با تابع $K(C)$ محاسبه می‌شود.

$$c = c_0 C^* \quad , \quad x_1 = x_1^* r \quad , \quad t = t^*/k_1 r$$

$$\frac{dc^*}{dt^*} = -c^* + \left(\frac{k_{-1}}{k_1 c_0} + c^*\right) x_1^*$$

$$\frac{dx_1^*}{dt^*} = \frac{c_0}{r}\left[c^* - \left(\frac{k_{-1}+k_2}{k_1 c_0} + c^*\right) x_1^*\right]$$

اگر فرض کنیم که همواره غلظت مواد غذایی در مرحله اول خیلی بیشتر از تعداد گیرنده‌ها باشد، شرط این است که $\varepsilon = \frac{r}{c_0} \approx 0$

درواقع سیستم زیر خلاصه شده این فرآیند مولکولی است:

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = -c + (K - \lambda + c)\,x & \longrightarrow \text{slow} \\[2ex] \varepsilon \dfrac{dx}{dt} = c - (K + c)\,x & \longrightarrow \text{Fast} \end{cases}$$

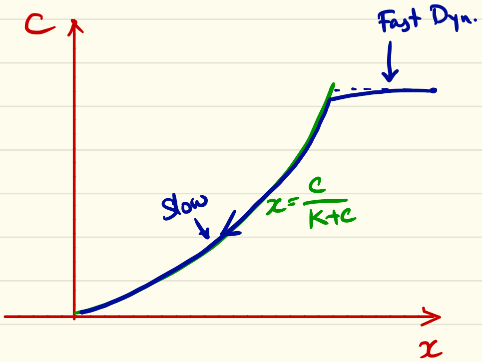
$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = -c + (K-\lambda+c)\,x & \longrightarrow \text{slow} \\[2ex] \varepsilon \dfrac{dx}{dt} = c - (K+c)\,x & \longrightarrow \text{Fast} \end{cases}$$

برای مقادیر خیلی کوچک ε ، دینامیک x خیلی سریع اتفاق می‌افتد و در واقع تغییرات x تقریباً مقدار ثابتی دارد

در نتیجه $x(t) \longrightarrow \dfrac{c}{K+c}$ و تغییرات c از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dc}{dt} = -c + (K-\lambda+c)\frac{c}{K+c} = \frac{-\lambda c}{K+c}$$

که یعنی این دینامیک این است که مواد غذایی با سرعت $\dfrac{\lambda}{K+c}$ مصرف می‌شوند.



با دو نقطه آغازین منحنی جواب به خم $x = \frac{c}{K+c}$
جذب می‌شود و در راستای این خم به نقطه تعادل
$(0,0)$ می‌رسد.

ریاضیات زیست

جلسه هشتم ۹۷/۱۲/۱۱

واکنش شیمیایی زیر را درنظر بگیرید

$$2C + X_0 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X_2 \xrightarrow{k_2} X_0 + 2P$$

که در آن دو مولکول C با X_0 ترکیب می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = -k_1 c^2 x_0 + k_{-1} x_2 \\[2ex] \dfrac{dx_0}{dt} = -k_1 c^2 x_0 + k_{-1} x_2 + k_2 x_2 \end{cases}$$

با فرض $x_0 + x_2 = r$ مقدار ثابت مشابه قبل به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = -c^2 + (K - \lambda + c^2)x \\[2ex] \varepsilon \dfrac{dx}{dt} = c^2 - (K + c^2)x \end{cases}$$

(دقت کنید در معادلات قبلی در سمت راست معادله به جای توابع c را قرار داده‌ام c^2.)

در نتیجه

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{\lambda c^2}{K+c^2}$$

در زمانی که برای واکنش شیمیایی ۲ مولکول c لازم باشد نرخ مصرف آن $K(C) = \frac{\lambda c}{K+c^2}$ خواهد بود.

و همینطور اگر n مولکول لازم باشد، $K(C) = \frac{\lambda c^{n-1}}{K+c^n}$.

نکته مهم این است که واکنش $2C + X_0 \rightleftharpoons X_2$ به طور مستقیم انجام نمی‌گیرد بلکه محصول دو واکنش مجزای زیر است:

$$\begin{cases} C + X_0 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_0 + P \\ C + X_1 \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} X_2 \xrightarrow{\alpha_2} X_1 + P \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dc}{dt} = -k_1 c x_0 + k_{-1} x_1 - k_2 c x_1 + k_{-2} x_2 \\[2ex]
\dfrac{dx_0}{dt} = -k_1 c x_0 + (k_{-1} + \alpha_1) x_1 \\[2ex]
\dfrac{dx_1}{dt} = k_1 c x_0 - (k_{-1} + \alpha_1) x_1 - k_2 c x_1 + (k_{-2} + \alpha_2) x_2 \\[2ex]
\dfrac{dx_2}{dt} = k_2 c x_1 - (k_{-2} + \alpha_2) x_2
\end{cases}
$$

$x_0 + x_1 + x_2 = r$ یک مقدار ثابت است.

با فرض اینکه دینامیک x_0، x_1 و x_2 سریع هست، می‌توان فرض کرد که $\dfrac{dx_0}{dt} = \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dx_2}{dt} = 0$

$$c x_0 = \frac{k_{-1} + \alpha_1}{k_1} x_1 := K x_1$$

$$c x_1 = \frac{k_{-2} + \alpha_2}{k_2} x_2 := K' x_2 \quad \Rightarrow \quad x_0 + \frac{c}{K} x_0 + \frac{c^2}{KK'} x_0 = r$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \frac{r}{KK'}\left(KK' + K'c + c^2\right)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{-rc\left(\alpha_1 K' + \alpha_2 c\right)}{KK' + K'c + c^2} \qquad (*)$$

درحالیکه در حالت تجمع دو واکنش داریم:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{-\lambda c^2}{K + c^2}$$

اگر مقدار $K'c$ در $(*)$ نسبت به دو جمله c^2 و KK' خیلی کوچک باشد

$$K'c \ll KK' \quad \text{و} \quad K'c \ll c^2$$

$$\Rightarrow \frac{k_{-2}+\alpha_2}{k_2} = K' \ll c \ll K = \frac{k_{-1}+\alpha_1}{k_1}$$

با فرض محدودیت C در این بازه دینامیک حذف مولکول‌های C تقریباً برابر است با :

$$\frac{dc}{d\tau} = \frac{-2\alpha_2 c^2}{KK' + c^2}$$

مدلهای رقابتی برای پدیده‌های شیمیایی :

در خیلی از سلولها دو نوع ماده X و Y تولید می‌شوند که در بعضی مواقع سلول فقط ماده X را تولید می‌کند و همان سلول در زمان دیگر ماده Y را.

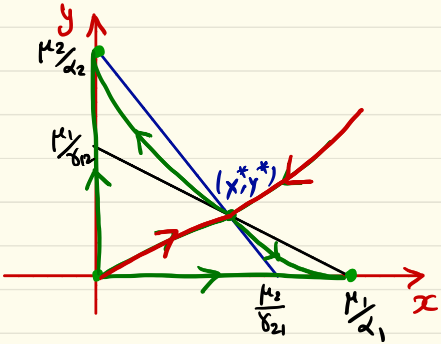
اگر x و y غلظت این دو نوع ماده باشد و یک مدل رقابتی برای رشد x و y بنویسیم ، داریم :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mu_1 x - \alpha_1 x^2 - \gamma_{12} xy \\ \dfrac{dy}{dt} = \mu_2 y - \alpha_2 y^2 - \gamma_{21} xy \end{cases}$$

مواد X و Y در اثر یک آنزیم به همدیگر می‌چسبند و تولید جفتهای X−X ، X−Y یا Y−Y می‌کنند.

افزایش جفتهای X−X و X−Y باعث کاهش تولید X می‌شود و همچنین جفتهای X−Y و Y−Y باعث کاهش تولید Y.

در مدل سیستم‌های رقابتی چهار حالت مختلف می‌تواند اتفاق بیفتد که یکی از آنها حالت زیر است.



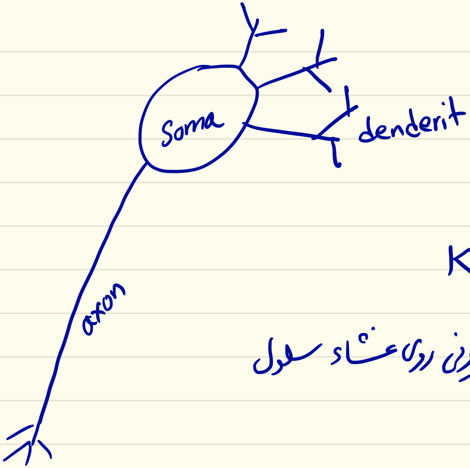
در آن دو نقطه $(\frac{\mu_1}{\alpha_1},0)$ و $(0,\frac{\mu_2}{\alpha_2})$ جاذب هستند. وقتی سیستم جذب نقطه $(\frac{\mu_1}{\alpha_1},0)$ می‌شود جمعیت X غالب می‌شود و فقط تولید X داریم. شرط وقوع این اتفاق $\frac{\mu_2}{\gamma_{21}} < \frac{\mu_1}{\alpha_1}$ و $\frac{\mu_1}{\gamma_{12}} < \frac{\mu_2}{\alpha_2}$ است. در این حالت مدار قرمزرنگ منحنی‌های جاذب نقطه (x^*,y^*) هستند، اگر نقطه آغازین سمت راست این منحنی باشد جذب $(\frac{\mu_1}{\alpha_1},0)$ می‌شود.

با تغییر آنها در سلول ضرایب α_1، μ_1، γ_{12} و α_2، μ_2، γ_{21} تغییر می‌کند و رفتار دینامیکی سیستم از حالت شرطهای $\frac{\mu_2}{\gamma_{21}} < \frac{\mu_1}{\alpha_1}$ و $\frac{\mu_1}{\gamma_{12}} < \frac{\mu_2}{\alpha_2}$ به حالتهای دیگر تبدیل می‌شود.

ریاضیات زیست

جلسه دوازده ۹۷/۱/۱۹

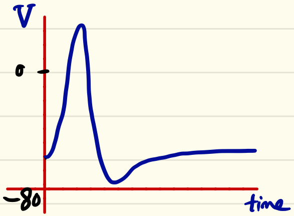
دینامیکِ سلول عصبی



جریان الکتریکی داخل سلول عصبی توسط جابجاییِ یون‌های Na^+ ، K^+ ، Cl^- ، Ca^{2+} و A^- ایجاد می‌شود که از طریقِ کانال‌های یونی روی غشاء سلول جابجا می‌شوند.

کانال‌ها دو نوع هستند: همیشه باز و دیگری دریچه وابسته به ولتاژ دارند (voltage-gated) .

اگر ولتاژ غشاء سلول را صفر قرار دهیم، در حالت استراحت داخل سلول ولتاژ حدود 65mV - تا 60- است.



با ورود یون‌های سدیم نورون فعال می‌شود که به آن اسپایک (Spike) گوییم.

سپس با باز شدن کانال‌های پتاسیم نورون به حالت استراحت برمی‌گردد.

مدل سلول عصبی بر مبنای یک مدار الکتریکی

$$C\frac{dV}{dt} = I$$

ظرفیت خازنی

جریان

$$I = I_i + I_{Na} + I_K + I_L$$

جریان ورودی

$$I_{ion} = g_{ion}(V - V_{ion})$$

رسانایی سلول نسبت به یون خاص که بستگی دارد به میزان عملکرد کانال‌ها

پتانسیل سلول

پتانسیل تعادل یون

محاسبه رسانایی یونی سلول عصبی :

سه پارامتر m ، n و h وجود دارند

$$g_{Na} = \bar{g}_{Na}\, m^3 h$$

$$g_k = \bar{g}_k\, n^4$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)\,n = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)}$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)\,m = \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)}$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)\,h = \frac{h_\infty(V) - h}{\tau_h(V)}$$

$$X_\infty = \frac{\alpha_X(V)}{\alpha_X(V) + \beta_X(V)} \quad , \quad \tau_X(V) = \frac{1}{\alpha_X(V) + \beta_X(V)} \qquad X = m, n, h$$

ثابت‌های موجود در معادله در صفحه ۳۲۳ کتاب آمده است.

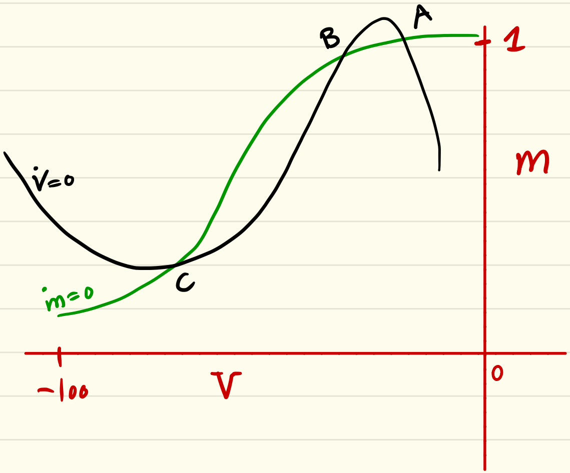
به طور خلاصه معادلات Hodgkin_Huxley به صورت زیر است:

$$
\begin{cases}
C\dot{V} = I - \bar{g}_K n^4 (V - V_K) - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_m) - \bar{g}_L (V - V_L) \\
\dot{m} = (m_\infty(V) - m)/\tau_m(V) \\
\dot{n} = (n_\infty(V) - n)/\tau_n(V) \\
\dot{h} = (h_\infty(V) - h)/\tau_h(V)
\end{cases}
$$

روش تحلیل بعد :

روش Fitzhugh : (V,m) دینامیک سریعتری نسبت به (h,n) دارد.

برای همین فرض می‌کنیم h و n ثابت هستند و دینامیک (V,m) را تحلیل می‌کنیم.



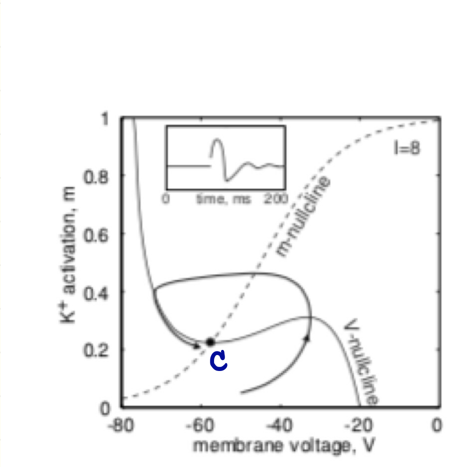
در حالت کلی اگر nullcline های V و m را رسم کنیم سه نقطه تعادل A، B و C داریم

که B زینی است و A و C پایدار هستند.

با تغییرات n و h یا جریان ورودی I این دو nullcline تغییر می‌کنند

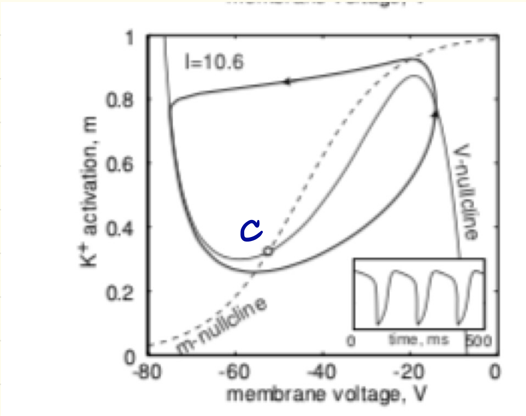
به صورتی که در یک حالت دو نقطه A و B حذف می‌شوند

تنها حالت تعادل C می‌ماند که حالت استراحت است.



با جریان کم ورودی تنها نقطه تعادل C که پایدار است وجود دارد

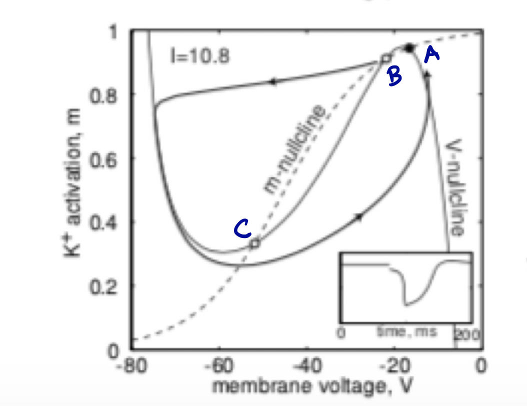
و یک نورون با تحریک کم اسپایک زده و به حالت استراحت برمی‌گردد.



با مقدار جریان متوسط تنها نقطه تعادل (حالت استراحت)

ناپایدار است. در این حالت یک مدار تناوبی وجود دارد

که معادل این است که نورون اسپایک‌های متوالی می‌زند.



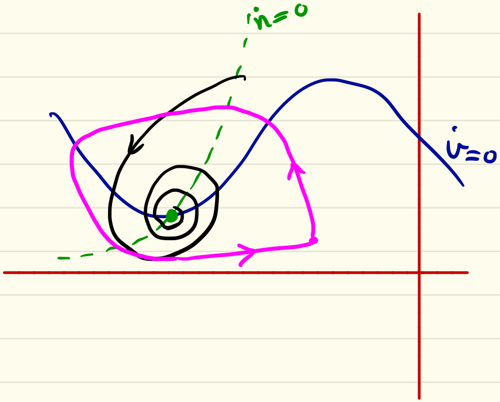
با جریان ورودی بیشتر سه نقطه تعادل داریم که A حالت فعال نورون نقطه جاذب است .

در این حالت با فعال شدن کانالهای h و n نقاط تعادل A و B از بین می رود و نورون به نقطه جاذب (حالت استراحت) C برمی گردد . (شکل اول صفحه قبل)

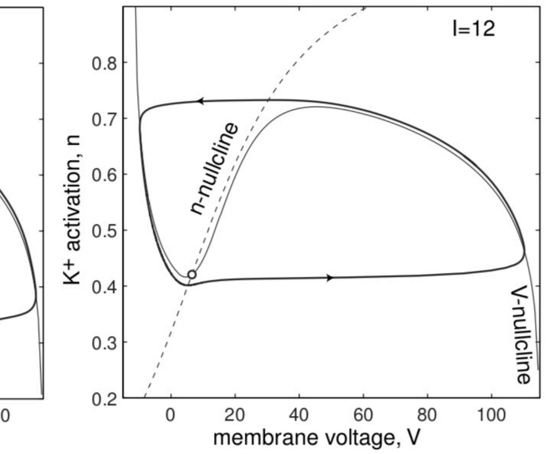
رویکرد دوم :

و $h \equiv 1$ قرار میدهیم $g_K = \bar{g}_K n$ به علاوه فرض می‌کنیم دینامیک m خیلی سریع است در واقع $m = m_\infty(v)$

$$\begin{cases} C\dot{v} = I - g_{Na}\, m_\infty(v)\,(v - v_{Na}) - g_K\, n\,(v - v_K) \\ \dot{n} = \left(n_\infty(v) - n\right)/\tau(v) \end{cases}$$



که با رسم nullcline های v و n یک نقطه تعادل پیدا میشود،
که برای جریان کوچک پایدار است و وقتی جریان بزرگ شود نقطه تعادل
ناپایدار می‌شود. این نقطه تعادل حالت استراحت نورون است که وقتی
با جریان کوچک تحریک می‌شود با اسپایک زدن دوباره جذب همان حالت استراحت
خواهد شد.



I=0
V-nullcline
n-nullcline
0
20
40
60
80
100
membrane voltage, V
I=12
K+ activation, n
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
n-nullcline
V-nullcline
0
20
40
60
80
100
membrane voltage, V

مدل Fitzhugh-Nagumo.

در مدل قبلی Nullcline مربوط به v شبیه یک منحنی درجه سه است. می‌توان دید که دینامیک سیستم مثل نزدیک به سیستم زیر است:

$$\frac{dx}{dt} = c\left[y + x - \frac{x^3}{3} + z(t)\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x - a + by}{c}$$

x ولتاژ، $z(t)$ جریان خروجی

با فرض‌های مناسب روی پارامترهای a، b و c در حالت $z = 0$ سیستم فوق یک مدار تناوبی جاذب دارد.

ریاضیات زیست

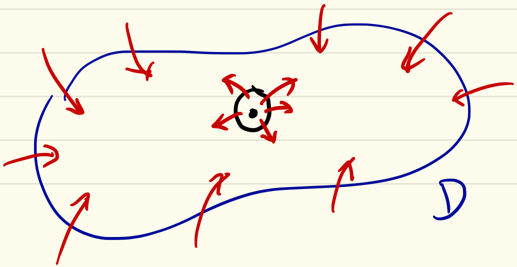
جلسه سیزده ۹۷/۱/۲۴

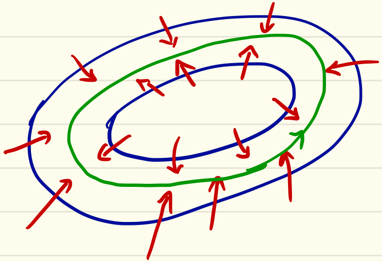
قضیه پوانکاره بندیکسون :

هر مدار جواب یک سیستم دینامیکی دوبعدی که کران دار باشد یا به یک نقطه تعادل نزدیک می‌شود و یا اینکه به یک جواب تناوبی همگرا است.

مجموعه ω-حدی یک مدار تناوبی شامل همه نقاطی است که $y(t_n)$ به آن همگرا است وقتی $t_n \to \infty$ و $y(t)$ جواب سیستم دینامیکی است. بنابر قضیه پوانکاره بندیکسون مجموعه ω-حدی شامل یک نقطه تکین است یا یک مدار تناوبی است.

نتیجه ① اگر D یک ناحیه کران‌دار در صفحه باشد که در زمان مثبت ناوردا است (یعنی مدارهای جواب داخل ناحیه D می‌شوند و هیچ مداری خارج نمی‌شود) به علاوه اگر D شامل تنها یک نقطه تعادل دافع باشد، آنگاه حتماً یک مدار تناوبی در آن وجود دارد.

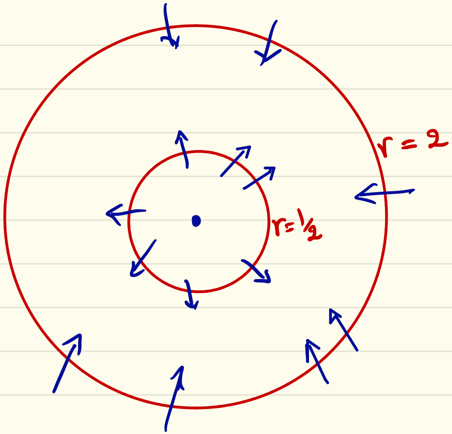




نتیجه ۲ـ ناحیه D حلقوی باشد که مرز آن دو خم بسته Γ_1 و Γ_2 است که Γ_1 داخل Γ_2 است. اگر شار سیستم در ناحیه D از مرزهای Γ_1 و Γ_2 خارج نشود. اگر D شامل نقطه تعادل نباشد آنگاه مدار تناوبی وجود دارد که دور Γ_1 می‌چرخد.

نتیجه ۳ـ اگر همه چیز را نسبت به زمان معکوس کنیم وجود جواب تناوبی در حالتهای بالا برقرار است.

مثلاً در نتیجه ① اگر D یک ناحیه کران دار باشد که در زمان منفی ناوردا است و شامل تنها یک نقطه تعادل جاذب باشد آنگاه شامل یک مدار تناوبی است.



مثال -

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y} = x + y(1-x^2-y^2) \end{cases}$$

$$r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2+y^2)(1-x^2-y^2)$$

$$\dot{r} = r(1-r^2)$$

مثال -

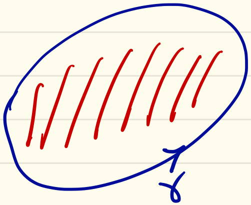
$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) + \mu r\cos\theta \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

اگر $r<\sqrt{1-\mu}$ آنگاه $\dot{r} > 0$ و برای $r>1$ ، $\dot{r}<0$

بنابراین در ناحیه $\sqrt{1-\mu} < r < 1$ یک جواب تناوبی وجود دارد.

محک بندیکسون : اگر
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$
یک دستگاه دوبعدی باشد که $\operatorname{div} = \partial_x f + \partial_y g$

در ناحیه همبند ساده D تغییر علامت ندهد، آنگاه D نمی‌تواند شامل مدار تناوبی باشد.



استدلال : اگر γ یک مدار تناوبی باشد و میدان برداری داخل ناحیه γ تعریف شده باشد

آنگاه بنابر قضیه گرین
$$\iint_{\text{داخل ناحیه } \gamma} (\partial_x f + \partial_y g)\, dx\, dy = 0$$

محک دولاک : اگر تابع مشتق‌پذیر $B(x,y)$ وجود داشته باشد که $\frac{\partial}{\partial x}(Bf) + \frac{\partial}{\partial y}(Bg)$ در ناحیه همبند ساده D

تغییر علامت ندهد، آنگاه D نمی‌تواند شامل مدار تناوبی باشد.

ایده اثبات - خم‌های جواب
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$
و
$$\begin{cases} \dot{x} = B(x,y)\, f(x,y) \\ \dot{y} = B(x,y)\, g(x,y) \end{cases}$$
منطبق بر هم هستند.

مثال - مدل رقابتی

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1 x (k_1 - x - \beta_{12} y) \\ \dot{y} = r_2 y (k_2 - y - \beta_{21} x) \end{cases}$$

در ناحیه $x, y > 0$ شامل مدار تناوبی نیست.

علامت $div = r_1(k_1 - x - \beta_{12} y) - r_1 x + r_2(k_2 - y - \beta_{21} x) - r_2 y$ تغییر می‌کند.

ولی با قرار دادن $B(x,y) = \frac{1}{xy}$ می‌توان از محک دولاک استفاده کرد.

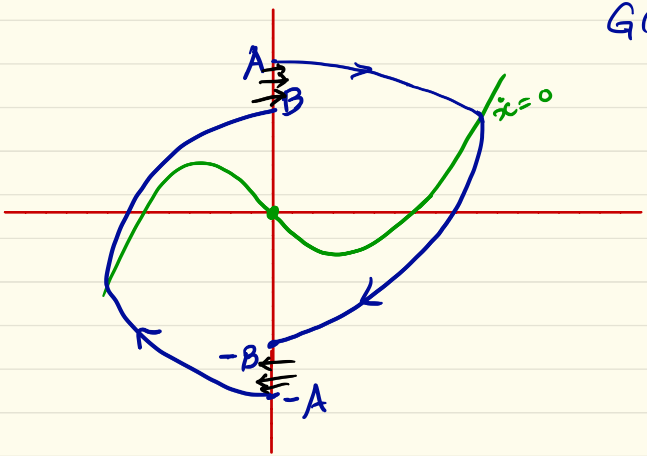
$$div = -\frac{r_1}{y} - \frac{r_2}{x} < 0$$

دستگاه لینارد:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - G(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

اگر G شبیه چندجمله‌ای درجه ۳ باشد آنگاه سیستم فوق جواب تناوبی دارد.

مثلاً برای
$$G(x) = \frac{x^3}{3} - x$$



تنها نقطه بحرانی $(0,0)$ است.

خطی سازی میدان در $(0,0)$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} +1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین مبدأ یک نقطه تعادل دافع است.

چون $G(x)$ یک تابع فرد است اگر $(x(t), y(t))$ جواب معادله باشد $(-x(t), -y(t))$ در معادله صدق می‌کند.

اگر از نقطه A جواب معادله را در نظر بگیریم که به نقطه $-B$ روی محور y برسد آنگاه جوابی که از $-A$ شروع به حرکت می‌کند به نقطه B می‌رسد.

اگر $B<A$ باشد آنگاه

ناحیه محصور بین این دو خم یک ناحیه ناوردا است که شامل تنها یک نقطه تعادل دافع است. بنابر نتایج قضیه پوانکاره-بندیکسون شامل یک مدار تناوبی است.

تنها باید نشان دهیم که نقطه A وجود دارد که وقتی مدار آن را در نظر بگیریم $B<A$.

در حالت کلی اگر G در شرایط زیر صدق کند نتیجه مشابه برقرار است:

(۱) G تابع فرد باشد. (برای تقارن جواب لازم است)

(۲) $\lim_{x\to\infty} G(x)=\infty$ و ثابت β وجود داشته باشد که $G'(x)>0$ برای $x>\beta$.

(این شرط تضمین می‌کند که ناحیه ناوردا وجود دارد)

(۳) $G'(0)<0$ (برای اینکه مبدأ نقطه دافع باشد)

مدل Fitzhugh-Nagumo .

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c\left[y + x - \dfrac{x^3}{3} - z(t)\right] \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x - a + by}{c} \end{cases}$$

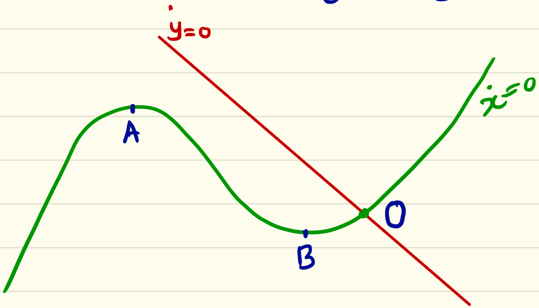
$b < c^2$

$0 < b < 1$

$1 - \frac{2b}{3} < a < 1$

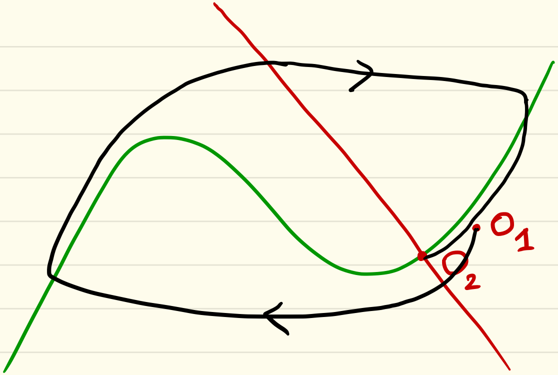
حالت $z=0$ ، Nullcline های این سیستم عبارتند از

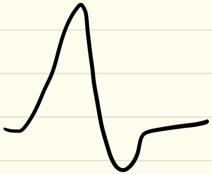
$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{3} - x \\[1ex] x + by = a \end{cases}$$



براحتی می‌توان دید که اگر نقطه تعادل بین دو نقطه A و B قرار گیرد دافع است وگرنه یک نقطه تعادل جاذب داریم.

اگر جریان ورودی یک مقدار مثبت ثابت باشد ($z(t) = i_0$) ، Nullcline $\dot{x} = 0$ به $y = \frac{x^3}{3} - x + i_0$ تغییر می‌کند. مانند این است که نمودار سبزرنگ به سمت بالا حرکت می‌کند و نقطه تعادل O به سمت چپ حرکت می‌کند.





برای جریان ورودی کوچک

سیستم از حالت تعادل O_1 خارج شده

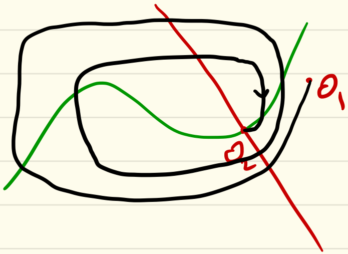
و جذب O_2 می‌شود

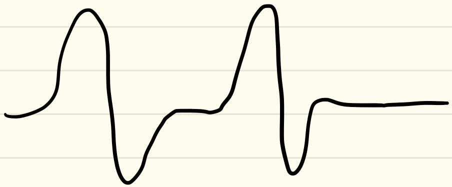
مدار گذار از O_1 تنها یک دور چرخیده

جذب O_2 می‌شود و در حالت استراحت قرار گیرد.

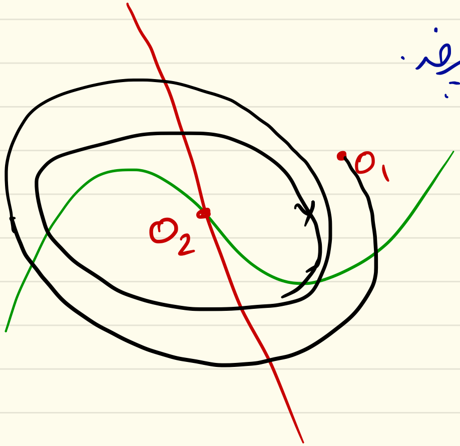
اگر جریان ورودی کمی قوی‌تر باشد که O_2 فاصله بیشتری از O_1 بگیرد مدار شروع شده از O_1 باید چند دور بزند تا

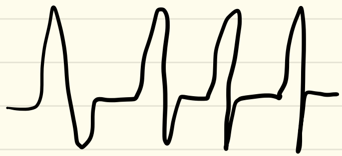
جذب O_1 شود.





اگر جریان ورودی به قدری بزرگ باشه که نقطه تعادل بین دو کوهان منحنی درجه ۳ قرار بگیرد
مشابه حالت سیستم لینارد یک مدار تناوبی جاذب داریم و یک نقطه تعادل دافع
در نتیجه مدار شروع شده از O_1 جذب مدار تناوبی می‌شود و دور آن می‌چرخد.





ریاضیات زیست

جلسه چهارده ۹۷/۱/۲۶

انشعاب هوپف

$$\dot{x} = F(x, \mu)$$

μ یک پارامتر است که با تغییر آن رفتار دینامیکی معادله بالا تغییر می کند.

فرض کنیم به ازای هر μ یک نقطه تعادل $x^*(\mu)$ برای سیستم بالا باشد که

مقادیر ویژه خطی شده در این نقطه تعادل $a(\mu) \pm i b(\mu)$ باشد.

اگر μ_c وجود داشته باشد که به ازای $\mu < \mu_c$ داشته باشیم $a(\mu) < 0$ که به معنای آن است که

$x^*(\mu)$ یک نقطه تعادل جاذب است. به علاوه $a(\mu_c) = 0$ و برای $\mu > \mu_c$، داشته باشیم $a(\mu) > 0$

که $x^*(\mu)$ دافع شود و اگر مدار تناوبی $\gamma_\mu(t)$ وجود داشته باشد که تنها جواب در همسایگی $x^*(\mu)$

به آن جذب شوند که شعاع این مدارهای تناوبی از مرتبه $|\mu - \mu_c|^{1/2}$ باشد. به این پدیده انشعاب هوپف

می گوییم. در واقع این نوع انشعاب را Supercritical گوییم.

مثال- $\dot{r} = r(\mu - r^2)$ ، $\dot{\theta} = \omega + br^2$

برای $\mu < 0$ مبدأ نقطه جاذب است و برای $\mu > 0$ دافع است و یک مدار تناوبی جاذب به شعاع $\sqrt{\mu}$ وجود دارد.

انشعاب هوپف Subcritical.

برای $\mu < \mu_c$ نقطه $X_*(\mu)$ جاذب است و یک مدار تناوبی دافع حول آن وجود دارد.

و برای $\mu > \mu_c$ مدار تناوبی از بین می‌رود و نقطه بحرانی دافع می‌شود.

مثال- $\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5$ ، $\dot{\theta} = \omega + br^2$

برای $\mu < 0$ مبدأ جاذب است و یک مدار تناوبی دافع داریم.

و برای $\mu > 0$ یک مدار تناوبی جاذب خواهیم داشت و مبدأ دافع است.

مثال -

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + x y^2 \\ \dot{y} = x + \mu y + y^3 \end{cases}$$

$$X^*(\mu) = (0,0)$$

$$DF(X^*) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $\lambda = \mu \pm i$

$\mu < 0$ مبدأ جاذب است.

$\mu > 0$ مبدأ دافع است.

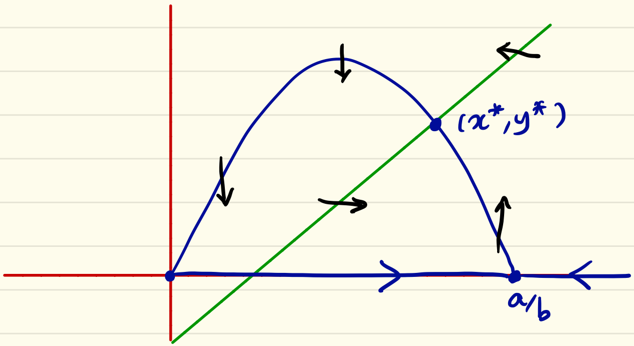
$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = \mu r^2 + r^2 y^2$$

$$\dot{r} = r(\mu + y^2)$$

Subcritical Hopf.

مثال - مدل شکار و شکارچی

$$\begin{cases} \dot{x} = x(ax - bx^2) - cxy \\ \dot{y} = y(-1 + x - y) \end{cases}$$



نقطه تعادل :

$$\begin{cases} x_* - y_* = 1 \\ ax_* - bx_*^2 = cy_* \end{cases}$$

خطی سازی در نقطه (x_*, y_*) :

$$J = \begin{bmatrix} x_*(a - 2bx_*) & -cx_* \\ y_* & -y_* \end{bmatrix}$$

$$\det J = -x_* y_* (a - 2bx_*) + c\, x_* y_* = bx_*^2 y_* + cy_* > 0$$

$$\mathrm{tr} = x_*(a - 2bx_*) - y_* = (c-1)y_* - bx_*^2 = \left[\frac{c-1}{c}(a - bx_*) - bx_*\right] x_*$$

$$= \left[a(c-1) - b(2c-1)x_*\right] \frac{x_*}{c}$$

$$tr<0 \iff a(c-1) < b(2c-1)x_*$$

اگر $\frac{1}{2}<c<1$ همیشه نقطه تعادل جاذب است.

در حالت $a<c$ و $1<c$ و b نزدیک صفر نقطه تعادل دافع است. (تمرین)

اگر $a=1$ و $b=0.9$ انشعاب هوپف Supercritical اتفاق می‌افتد.

مثال -

$$\begin{cases} 2X + Y \longrightarrow 2X \\ A \longrightarrow Y \\ X \rightleftharpoons B \end{cases}$$

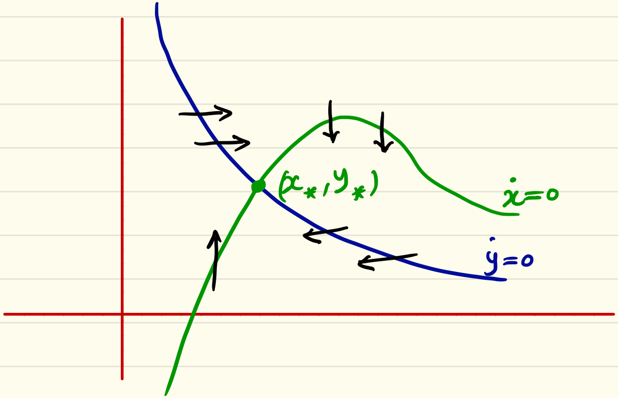
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x^2y - x^2y - x + b = x^2y - x + b \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^2y + a \end{cases}$$

نقطه تعادل $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(a+b, \dfrac{a}{(a+b)^2}\right)$

$$D = \begin{bmatrix} 2\bar{x}\bar{y} - 1 & \bar{x}^2 \\ -2\bar{x}\bar{y} & -\bar{x}^2 \end{bmatrix}$$

$$\det = (a+b)^2 \quad , \quad tr = \frac{a-b}{a+b} - (a+b)^2$$

اگر $b \ll a$ برای $a \approx 1$ انشعاب خواهیم داشت.



$a>1$ جاذب و برای $a<1$ دافع است.

سؤال: چرا برای $a>1$ جواب تناوبی داریم؟