به نام او

امتحان میان ترم درس آنالیز حقیقی وقت امتحان: ۳ ساعت ۹۷/۸/۲۳

---

۱. تعریف مجموعه های بُرِل را بنویسید و با یک مثال نشان دهید هر مجموعه اندازه‌پذیری لزوماً بُرِل نیست.

۲. الف_ اگر $E=\cup_{i=1}^{\infty}E_i$ نشان دهید $m_*(E)\leq\sum_{i=1}^{\infty}m_*(E_i)$.
ب_ با یک مثال نشان دهید که حتی اگر مجموعه‌های E_i جدا از هم باشند، در قسمت قبل لزوماً تساوی برقرار نیست.

۳. الف_ فرض کنید f تابعی اندازه‌پذیر و متناهی مقدار روی مجموعه اندازه متناهی E تعریف شده باشد. نشان دهید برای هر مقدار $\epsilon>0$ مجموعه فشرده $F_\epsilon\subset E$ وجود دارد که $f|_{F_\epsilon}$ پیوسته است و $m(E-F_\epsilon)\leq\epsilon$.
ب_ با یک مثال نشان دهید برای $\epsilon=0$ حتی اگر شرط فشردگی را حذف کنیم، حکم قسمت قبل برقرار نیست.

۴. الف_ اگر تابع f کران‌دار و با تکیه‌گاه اندازه متناهی باشد و $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از توابع ساده به طور یکنواخت کران‌دار که $\phi_n(x)\to f(x)$ تقریبا برای هر x و تکیه‌گاه همه آنها در داخل یک مجموعه با اندازه متناهی E قرار دارد، ثابت کنید که حد $\lim_{n\to\infty}\int\phi_n$ وجود دارد.
ب_ توضیح دهید چگونه به کمک قسمت الف می‌توان انتگرال توابع کران‌دار و با تکیه‌گاه اندازه متناهی را تعریف کرد.

۵. اگر تابع f انتگرال‌پذیر باشد و $E_t=\{x:|f(x)|>t\}$. ثابت کنید

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,dx=\int_0^{\infty}m(E_t)dt.$$

۶. نشان دهید برای تابع اندازه‌پذیر $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow[0,\infty]$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارند که

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\chi_{E_k}.$$

موفق باشید.