



۱. الف- تعریف اندازه خارجی و مجموعه اندازه‌پذیر به معنای کاراتئودری را بنویسید.
 ب- اگر μ_* یک اندازه خارجی روی مجموعه X باشد، نشان دهید همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر به معنای کاراتئودری تشکیل یک σ -جبر می‌دهند.
 پ- ثابت کنید همه مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر، به معنای کاراتئودری نیز اندازه‌پذیر هستند.

۲. اگر f تابع انتگرال‌پذیر روی \mathbb{R}^d باشد، ثابت کنید

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(x), \quad \text{for a.e. } x,$$

که حد بالا روی همه گویهای B که شامل نقطه x هستند محاسبه شده است.

۳. اگر X فضای اندازه متناهی باشد و $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ ، نشان دهید که $f \in \mathcal{L}^p(X)$ برای هر $1 \leq p < \infty$ و

$$\|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty \quad \text{as } p \rightarrow \infty.$$

۴. فرض کنید F یک مجموعه بسته در \mathbb{R}^n و $d(x) := \inf\{|x - y| : y \in F\}$ تابع فاصله تا F باشد. ثابت کنید

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{d(x+y)}{|y|} = 0, \quad \text{for a.e. } x \in F.$$

۵. صورت قضیه گراف بسته را بنویسید و به کمک آن نشان دهید عملگر خطی $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ که در شرط زیر صدق می‌کند، پیوسته است. (\mathcal{B} یک فضای باناخ است و \mathcal{B}^* دوگان آن)

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}.$$

موفق باشید.