آنالیز حقیقی

جلسه بیست و یک ۹۷/۹/۱۱

نظریهٔ انتگرال روی فضاهای متریک

فرض کنید $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای اندازه باشد.

تابع $f: X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ اندازه‌پذیر است هرگاه مجموعه‌های $\{x\in X : f(x)<a\}$ به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد، یعنی عضوی از $\mathcal{M}$ باشد.

$$(\{f<a\}\in\mathcal{M})$$

مشابه تعریف اندازه‌پذیری لبگ تعریف فوق معادل است با اینکه مجموعه‌ی $\{f>a\}$ عضو $\mathcal{M}$ (اندازه‌پذیر باشند) یا $\{f\le a\}$ یا $\{f\ge a\}$.

توابع ساده روی X عبارتند از توابعی به صورت

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$$

که $E_k\in\mathcal{M}$ ، $\mu(E_k)<\infty$ و $a_k\in\mathbb{R}$.

مشابه قبل با همان اثبات نظریهٔ تقریب توابع اندازه‌پذیر با توابع ساده برقرار است.

قضیه: اگر $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای اندازه باشد که μ یک اندازه σ-متناهی است. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد،

آنگاه دنباله توابع ساده $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارند که $\forall x\in X$ $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$ و $\varphi_k(x)\le\varphi_{k+1}(x)$.

درضمن اگر f یک تابع اندازه‌پذیر (نه لزوماً مثبت) باشد، آنگاه دنباله توابع ساده در شرط

$$|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)|$$

صدق می‌کند.

قضیه اگوروف: اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر روی زیرمجموعه $E \subset X$ باشد که $\mu(E) < \infty$ و $f_n \longrightarrow f$ ت.ه. در E.

آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه $E \supseteq A_\varepsilon$ وجود دارد که $\mu(E - A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ و $f_n \longrightarrow f$ به طور یکنواخت در A_ε.

جمع‌بندی: به کمک تعاریف و قضایای بالا دقیقاً مشابه حالت $X = \mathbb{R}^d$ و اندازه لبگ می‌توان انتگرال هر تابع اندازه‌پذیر را روی فضای σ-متناهی $(X, \mathcal{M}, \mu)$ تعریف کرد که با نماد

$$\int_X f \, d\mu$$

نشان می‌دهیم.

تابع f را انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه $\int_X |f| \, d\mu < \infty$.

قضایای همگرایی در انتگرال مشابه قبل برقرار است.

(۱) لم فاتو: اگر f_n یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد، آنگاه

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

(۲) همگرایی یکنوا: اگر f_n یک دنباله توابع اندازه‌پذیر نامنفی باشند که $f_n \nearrow f$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

(۳) همگرایی تسلطی: اگر f_n یک دنباله توابع اندازه‌پذیر باشند که $f_n \longrightarrow f$ ت. هـ. در X و $|f_n| \leq g$ که g انتگرال‌پذیر است.
آنگاه

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$$

و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

اندازه حاصلضرب و قضیه فوبینی :

$(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ و $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ دو فضای اندازه هستند و $X = X_1 \times X_2$. اندازه حاصلضرب روی فضای X که با $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ نشان می‌دهیم اندازه‌ای که قضیه فوبینی نسبت به آن اندازه برقرار باشد.

قضیه فوبینی : اگر $f(x_1, x_2)$ یک تابع انتگرال‌پذیر روی $(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$ باشد.

(۱) برای تقریباً هر $x_2 \in X_2$ ، برشهای $f^{x_2}(x_1) := f(x_1, x_2)$ تابع انتگرال‌پذیر روی (X_1, μ_1) است .

(۲) تابع $g(x_2) := \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) d\mu_1$ یک تابع انتگرال‌پذیر روی (X_2, μ_2) است .

(۳) $$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_2} \left[\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right] d\mu_2 .$$

اثبات قضیه فوبینی دقیقاً مشابه حالت $X_i = \mathbb{R}^{d_i}$ است به شرط آنکه اندازه $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ دارای این خاصیت باشد که قضیه فوبینی برای $f = \chi_E$ وقتی $E = X_1 \times X_2$ اندازه‌پذیر و اندازه‌متناهی است، درست باشد .

هدف: از σ-جبرهای $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$، یک σ-جبر $\mathcal{M}$ برای $X = X_1 \times X_2$ بسازیم به همراه اندازه $\mu = \mu_1 \times \mu_2$

که مجموعه‌های $E \in \mathcal{M}$ در قضیه فوبینی صدق کنند.

$$E_{x_1} = \{ x_2 \in X_2 \ : \ (x_1, x_2) \in E \}$$

$$E^{x_2} = \{ x_1 \in X_1 \ : \ (x_1, x_2) \in E \}$$

اگر $E = E_1 \times E_2$ که $E_i \in \mathcal{M}_i$ آنگاه

$$E^{x_2} = \begin{cases} E_1 & x_2 \in E_2 \\ \phi & x_2 \notin E_2 \end{cases}$$

درنتیجه اگر $f(x_1, x_2) = \chi_E$ آنگاه، $f^{x_2} = \begin{cases} \chi_{E_1} & x_2 \in E_2 \\ 0 & x_2 \notin E_2 \end{cases}$ و

$$\int_{X_2} g \, d\mu_2 = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2) \Longleftarrow \quad g(x_2) = \int_{X_1} f^{x_2} \, d\mu_1 = \begin{cases} \mu_1(E_1) & x_2 \in E_2 \\ 0 & x_2 \notin E_2 \end{cases}$$

برای اینکه فوبینی برقرار باشد باید اندازه حاصلضرب در رابطه $(\mu_1\times\mu_2)(E)=\mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$ صدق کند.

برای اینکه σ-جبر $\mathcal{M}$ و اندازه حاصلضرب را تعریف کنیم، یک مستطیل در $X_1\times X_2$ را مجموعه $E=E_1\times E_2$ تعریف کنید که $E_1\in\mathcal{M}_1$ و $E_2\in\mathcal{M}_2$.

جبر $\mathcal{A}$ را شامل زیرمجموعه‌های از $X=X_1\times X_2$ در نظر بگیرید که به صورت اجتماع متناهی مستطیل جدا از هم نوشته شوند.

(بررسی کنید چرا $\mathcal{A}$ یک جبر است. به عنوان مثال $\left((E_1\times E_2)^c=\underbrace{(E_1^c\times X_2)}_{\text{مستطیل}}\cup\underbrace{(E_1\times E_2^c)}_{\text{مستطیل}}\right.$)

اندازه پیشین μ_0 روی جبر $\mathcal{A}$ را بدین صورت تعریف کنیم: هر عضو $\mathcal{A}$ به صورت $E=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)$ است که مجموعه‌های $A_i\times B_i$ جدا از هم هستند. قرار دهید:

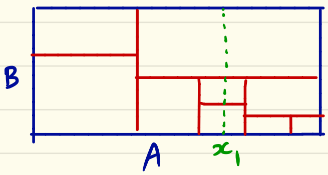
$$\mu_0(E)=\sum_{i=1}^{n}\mu_1(A_i)\mu_2(B_i)$$

برای اینکه نشان دهیم μ_0 یک اندازه پیشین است باید ثابت کنیم که اگر $\mathcal{A}\ni E=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\times B_i$ آنگاه

$$\mu_0(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_1(A_i)\mu_2(B_i)$$

چون $E \in \mathcal{A}$ پس E خودش اجتماع شمارای مستطیل است. پس اگر فرض کنیم $E = A \times B$ یک مستطیل باشد

و مطلب فوق را نشان دهیم، خاصیت اندازه پیشتر اثبات شده است. باید نشان دهیم:



$$\mu_1(A)\,\mu_2(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(A_i)\,\mu_2(B_i)$$

به ازای هر $x_1 \in A$ و هر $x_2 \in B$ نقطه (x_1, x_2) تنها به یکی از مستطیل‌های

$A_i \times B_i$ متعلق است و در نتیجه مجموعه $\{x_1\} \times B$ توسط شمارا مجموعه B_i جدا از هم پوشانده شده است. در نتیجه

$$\mu_2(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\chi_{A_j}(x_1)}\,\mu_2(B_j)$$

تضمین می‌کند که $A_j \times B_j$ خط $\{x_1\} \times B$ را قطع کند.

اگر از رابطه بالا نسبت به x_1 انتگرال بگیریم بنابر قضیه همگرایی یکنوا خواهیم داشت

$$\mu_1(A)\,\mu_2(B) = \int_A \mu_2(B)\, d\mu_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A \chi_{A_j}(x_1)\,\mu_2(B_j)\, d\mu_1(x_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(A_j)\,\mu_2(B_j)$$

مبنا بر مباحث جلسه قبل اندازه $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ از روی μ_0 ساخته می‌شود که روی σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{A}$ تعریف شده است. در حقیقت این σ-جبر توسط همه مستطیل‌ها در $X_1 \times X_2$ ساخته می‌شود و اندازه هر مستطیل برابر $\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$. در ضمن چون μ_1 و μ_2، σ-متناهی هستند، $\mu_1 \times \mu_2$ نیز σ-متناهی می‌شود و مبنا بر گزاره جلسه قبل توسیع μ_0 به $\mu_1 \times \mu_2$ یکتا است.

برای اثبات فوبینی کافیست گزاره زیر را اثبات کنیم:

گزاره: اگر E یک مجموعه اندازه‌پذیر در $(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$ باشد به ازای تقریبا هر $x_2 \in X_2$، مجموعه $E^{x_2} \in \mathcal{M}_1$ (در (X_1, μ_1) اندازه‌پذیر است) و $\mu_1(E^{x_2})$ یک تابع اندازه‌پذیر در (X_2, μ_2) است و

$$\int_{X_2} \mu_1(E^{x_2})\, dx_2 = (\mu_1 \times \mu_2)(E)$$

اثبات. قبلاً نشان دادیم که وقتی $E = E_1 \times E_2$ این گزاره درست است. در گام بعدی نشان می‌دهیم که اگر E اجتماع شمارا مستطیل جدا از هم باشد، گزاره بالا درست است. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$.

$$E^{x_2} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \times B_j)^{x_2} = \bigcup_{x_2 \in B_j} A_j$$

جدا از هم هستند زیرا $\{A_j \times B_j\}$ جدا از هم هستند.

E^{x_2} به صورت اجتماع حداکثر شمارا مجموعه از A_j است در نتیجه اندازه پذیر است و

$$\mu_1(E^{x_2}) = \sum_{x_2 \in B_j} \mu_1(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(A_j)\, \chi_{B_j}(x_2)$$

در نتیجه تابع $\mu_1(E^{x_2})$ در (X_2, μ_2) اندازه پذیر است (حد یک دنباله از توابع اندازه پذیر است)

$$\int_{X_2} \mu_1(E^{x_2})\, d\mu_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(A_j) \int_{X_2} \chi_{B_j}(x_2)\, d\mu_2 \longleftarrow$$ بنابر قضیه همگرایی یکنوا

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(A_j)\, \mu_2(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \times B_j) = \mu(E)$$

تا اینجای کار نشان دادیم که گزاره فوق برای $E \in \mathcal{A}_\sigma$ درست است.

گام دوم: اکنون فرض کنید $E \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ باشد یعنی $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ که $E_i \in \mathcal{A}_\sigma$. نشان می‌دهیم گزاره فوق برای E صادق است. می‌توان فرض کرد که $\{E_i\}$ دنباله نزولی هستند، یعنی $E_{i+1} \subseteq E_i$. از طرفی $E^{x_2} = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^{x_2}$

بنابر گام اول اثبات $E_i^{x_2} \in \mathcal{M}_1 \Rightarrow E^{x_2} \in \mathcal{M}_1$.

$$\mu_1(E^{x_2}) = \lim_{i\to\infty} \mu_1(E_i^{x_2})$$

بنابر گام اول $\mu_1(E_i^{x_2})$ اندازه‌پذیر است در نتیجه حد آن $\mu_1(E^{x_2})$ نیز اندازه‌پذیر است.

با فرض اینکه $(\mu_1\times\mu_2)(E_1) < \infty$، تابع $\mu_1(E_1^{x_2})$ در (X_2,μ_2) انتگرال‌پذیر است و بنابر قضیه همگرایی یکنوا برای توابع نزولی نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}\int_{X_2} \mu_1(E^{x_2})\, d\mu_2(x_2) &= \lim_{i\to\infty} \int \mu_1(E_i^{x_2})\, d\mu_2(x_2) \\ &= \lim_{i\to\infty} (\mu_1\times\mu_2)(E_i) \quad \Leftarrow \text{گام اول اثبات} \\ &= (\mu_1\times\mu_2)(E)\end{aligned}$$

اگر $(\mu_1\times\mu_2)(E_1)=\infty$ ، بنابر خاصیت σ-متناهی μ_1 و μ_2 دنباله زیرمجموعه‌ای $F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq X_1$ و

$G_1\subseteq G_2\subseteq\cdots\subseteq X_2$ وجود دارند که $\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=X_1$ و $\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i=X_2$ و $\mu_1(F_i)<\infty$ ، $\mu_2(G_i)<\infty$

قرار دهید

$$\tilde{E}_j=E\cap(F_j\times G_j)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(E_i\cap(F_j\times G_j)\right)$$

و گزاره فوق برای $\tilde{E}_j$ برقرار خواهد بود. و چون $\tilde{E}_j$ یک دنباله صعودی و همگرا به E است نتیجه خواهد شد که گزاره برای E نیز برقرار است.

گام سوم: اگر E اندازه صفر باشد، گزاره برقرار است. بنابر گزاره طلب قبل مجموعه $E\subseteq F$ وجود دارد که $F\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ و $\mu(E)=\mu(F)=0$

$$E^{x_2}\subseteq F^{x_2}$$

بنابر گام دوم، $F^{x_2}\in\mathcal{M}_1$ ، به ازای ت.هـ x_2 و

$$0=(\mu_1\times\mu_2)(F)=\int_{X_2}\mu_1(F^{x_2})\,d\mu_2(x_2)$$

$$\Longrightarrow\quad \mu_1(F^{x_2})=0\qquad \text{ت.هـ.}\ x_2.$$

بنابر فرض تام بودن μ_1، E^{x_2} اندازه‌پذیر است و $\mu_1(E^{x_2})=0$ و به وضوح رابطه $(\mu_1\times\mu_2)(E)=\int_{X_2}\mu_1(E^{x_2})d\mu_2=0$

برقرار است.

گام چهارم: اگر E یک مجموعه اندازه‌پذیر دلخواه در فضای اندازه $(X_1\times X_2, \mu_1\times\mu_2)$ باشد، مجموعه $F\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ وجود دارد که $E\subseteq F$ و $\mu_1\times\mu_2(E)=\mu_1\times\mu_2(F)$. در این صورت $Z=F-E$ اندازه صفر است و بنابر گام سوم در شرایط گزاره صدق می‌کند

چون F نیز در این شرایط صدق می‌کند (گام دوم) در نتیجه $E^{x_2}=F^{x_2}-Z^{x_2}$ اندازه‌پذیر است

و تابع $\mu_1(E^{x_2})=\mu_1(F^{x_2})-\mu_1(Z^{x_2})$ اندازه‌پذیر است.

$$\int_{X_2}\mu_1(E^{x_2})\,d\mu_2=\int_{X_2}\mu_1(F^{x_2})-\mu_1(Z^{x_2})\,d\mu_2$$

$$=(\mu_1\times\mu_2)(F)-(\mu_1\times\mu_2)(Z)$$

$$=(\mu_1\times\mu_2)(E)$$

آنالیز حقیقی

جلسه بیست و دو ۹۷,۹,۱۳

انتگرال لبگ - استیلس

فرض کنید F یک تابع صعودی از راست پیوسته باشد، یعنی $F(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x)$

قضیه زیر نشان می‌دهد یک تناظر بین اندازه‌ی برل روی $\mathbb{R}$ و این توابع برقرار می‌کند.

قضیه: اگر F یک تابع صعودی پیوسته از راست باشد، آنگاه اندازه برل یکتای $\mu = dF$ وجود دارد که $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$ اگر $a<b$. برعکس اگر μ یک اندازه برل باشد که روی بازه‌ها متناهی باشد، آنگاه تابع

$$F(x) = \begin{cases} \mu(0,x] & x>0 \\ \\ -\mu(x,0] & x<0 \end{cases}$$

یک تابع صعودی و پیوسته از راست است.

اثبات - قسمت دوم به راحتی اثبات می‌شود. (تمرین)

برای اثبات قسمت اول جبر $\mathcal{A}$ را شامل اجتماع متناهی بازه‌های جدا از هم $(a_i, b_i]$ در نظر بگیرید.

(دقت کنید σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{A}$ شامل همه برل ها است.)

اندازه پیش μ_0 روی این جبر را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$E = \bigcup_{i=1}^{N} I_i \qquad I_i \cap I_j = \phi \quad , \quad I_i = (a_i, b_i]$$

$$\mu_0(E) := \sum_{i=1}^{N} F(b_i) - F(a_i)$$

باید نشان دهیم μ_0 خاصیت اندازه پیش را دارد. کافی است ثابت کنیم اگر $(a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$

که $(a_i, b_i]$ دو به دو جدا از هم هستند،

$$\mu_0(a,b] = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0 (a_i, b_i]$$

یا به طور معادل

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i)$$

با توجه به صعودی بودن تابع و اینکه $(a,b] \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i,b_i]$ نتیجه می‌شود که

$$F(b)-F(a) \ge \sum_{i=1}^{n} F(b_i)-F(a_i)$$

در نتیجه

$$F(b)-F(a) \ge \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i)-F(a_i)$$

برعکس برای هر نقطه b_i نقطه b_i' را در نظر بگیرید که $F(b_i') \le F(b_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}$. (با توجه به پیوستگی از راست چنین انتخابی ممکن است.) در نتیجه $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i,b_i')$ یک پوشش باز برای بازه فشرده $[a',b]$ است که $a<a'$.

می‌توان فرض کرد $[a',b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (a_i,b_i')$ در نتیجه

$$F(b)-F(a') \le \sum_{i=1}^{N} F(b_i')-F(a_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i)-F(a_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}$$

با توجه به انتخاب دلخواه a' و ε و پیوستگی از راست F خواهیم داشت:

$$F(b)-F(a) \le \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i)-F(a_i)$$

مثال-

$$H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

$$dH(a,b] = \begin{cases}1 & 0\in(a,b]\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dH = f(0)$$

مثال-

$$j_n(x)=\begin{cases}0 & x<x_n\\ 1 & x\geq x_n\end{cases} \quad \text{و} \quad J(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n j_n(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dJ = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f(x_n)$$

نکته- اگر تابع صعودی F به طور مطلق پیوسته باشد،

$$\int_a^b f\, dF = \int_a^b f(x) F'(x)\, dx$$

اندازه‌های علامت دار:

اگر (X,μ) فضای اندازه باشد و f تابعی اندازه پذیرِ نامنفی باشد، آنگاه

$$\nu(E) := \int_E f \, d\mu$$

یکِ اندازه جدید روی X ارائه می‌کند. اگر شرط نامنفی بودن f را حذف کنیم ممکن است $\nu(E)$ منفی شود.

تعریف: تابع ν روی σ-جبر $\mathcal{M}$ یکِ اندازه علامت دار است هرگاه:

(i) به‌ازای هر $E \in \mathcal{M}$، $-\infty < \nu(E) \leq +\infty$.

(ii) اگر $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ اعضایِ جدا از هم از $\mathcal{M}$ باشند، $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$

دقت کنید در شرط (ii) باید مقدار مجموع سمت راست نسبت به بازآرایش ثابت باشد. مثلاً اگر $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) < \infty$ باید $\sum_{i=1}^{\infty} |\nu(E_i)| < \infty$.

تذکر: هر موقع μ را اندازه نامیدیم منظور اندازه به معنای کلاسیک است.

تعریف - اگر ν یک اندازه علامت دار باشد، تغییرات کلی ν را با

$$|\nu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(E_i)|$$

که سوپریمم روی همه افرازهای $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ گرفته می‌شود که $E_i \in \mathcal{M}$ و جدا از هم هستند.

گزاره: $|\nu|$ یک اندازه است و $\nu \leq |\nu|$.

اثبات - اگر در تعریف تغییرات کلی ν افراز را خود مجموعه E بگیریم، خواهیم داشت $|\nu|(E) \geq |\nu(E)|$. در نتیجه قسمت دوم گزاره اثبات می‌شود. برای قسمت اول اگر $E_i \in \mathcal{M}$ جدا از هم باشند و $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ باید اثبات کنیم که

$$|\nu|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\nu|(E_i)$$

به ازای ε دلخواه و هر مجموعه E_i افراز $E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{i,j}$ وجود دارد که

$$|\nu|(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(F_{ij})|$$

درنتیجه چون E_i ها جدا از هم هستند $\{F_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ یک افراز برای E خواهد بود

$$\Rightarrow \quad |\nu|(E) \geq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\nu(F_{ij})| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\nu|(E_i) - \varepsilon$$

برعکس اگر $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ یک افراز برای E باشد، آنگاه $E_j = \bigcup_{i=1}^{\infty}(F_i \cap E_j)$ یک افراز برای E_j است.

$$|\nu|(E_j) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(F_i \cap E_j)|$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\nu|(E_j) \geq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\nu(F_i \cap E_j)| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \nu(F_i \cap E_j) \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(F_i)|$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\nu|(E_j) \geq |\nu(E)|$$

اگر روی همه افرازهای E سوپریمم بگیریم نتیجه خواهد شد

اندازه $|\nu|$ اجازه می دهد که اندازه علامت دار ν را به دو قسمت مثبت و منفی تجزیه کنیم. (البته این تجزیه یکتا نیست)

$$\nu^+ = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu) \quad , \quad \nu^- = \frac{1}{2}(|\nu| - \nu)$$

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \quad , \quad |\nu| = \nu^+ + \nu^-$$

آنالیز حقیقی

جلسه بیست و سه 97,9,18

تعریف - ① گوییم تکیه‌گاه (Support) اندازه علامت‌دار ν در مجموعه A قرار دارد هرگاه $\nu(E)=\nu(E\cap A)$

② دو اندازه علامت‌دار ν و μ نسبت به هم تکین (mutually Singular) گوییم هرگاه دو مجموعه اندازه‌پذیر جدا از هم A و B وجود داشته باشند که تکیه‌گاه ν در A و μ در B قرار داشته باشد:

$$\mu(E)=\mu(E\cap B)\ ,\qquad \nu(E)=\nu(E\cap A)\qquad \forall E\in\mathcal{M}$$

در این صورت می‌نویسیم $\nu\perp\mu$.

③ اگر ν اندازه علامت‌دار باشد و μ یک اندازه (مثبت) آنگاه ν را نسبت به μ پیوسته مطلق گوییم هرگاه

$$\mu(E)=0 \implies \nu(E)=0$$

در این صورت می‌نویسیم $\nu\ll\mu$.

مثال- اگر $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ یعنی $\int_X |f|\, d\mu < \infty$. قرار دهید:

$$\nu(E) := \int_E f\, d\mu$$

ν یک اندازه علامت دار است.

تکیه‌گاه ν در $A = \mathrm{Supp} f$ قرار می‌گیرد زیرا $\nu(E) = \int_E f\, d\mu = \int_{E\cap A} f\, d\mu$

به‌علاوه ν نسبت به μ پیوسته مطلق است زیرا اگر $\mu(E) = 0$ آنگاه $\int_E f\, d\mu = 0$ و در نتیجه

$$\nu(E) = 0$$

سؤال: آیا $|\nu|(E) = \int_E |f|\, d\mu$ ؟

تمرین- رابطه بالا را ثابت کنید.

قضیه (رادون - نیکودیم) (Radon-Nikodym)

μ یک اندازه (مثبت) σ-متناهی روی فضای اندازه $(X, \mathcal{M})$ است و ν یک اندازه علامت‌دار σ-متناهی روی $\mathcal{M}$ است.

آنگاه اندازه‌های علامت‌دار ν_a و ν_s روی $\mathcal{M}$ وجود دارند به طوری که $\nu_a \ll \mu$ و $\nu_s \perp \mu$ و

$$\nu = \nu_s + \nu_a$$

به علاوه تابع μ-انتگرال‌پذیر f وجود دارد که

$$\nu_a(E) = \int_E f \, d\mu .$$

در ضمن تجزیه فوق یکتا است.

تذکر - تابع f را مشتق ν_a نسبت به μ می‌نامیم و می‌نویسیم $d\nu_a = f \, d\mu$ یا $f = \frac{d\nu_a}{d\mu}$.

تعریف- اگر ν یک اندازه علامت‌دار باشد، مجموعه اندازه‌پذیر A را مثبت گوییم هرگاه اندازه هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر E از A مثبت باشد.

$$E \subseteq A, \quad \nu(E) \geq 0$$

به طور مشابه مجموعه منفی نیز تعریف می‌شود.

مثال- اگر $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ ، $A = \{f \geq 0\}$ مثبت است و $\{f \leq 0\}$ منفی است.

نکته- اگر $\{A_i\}$ مجموعه‌های مثبت باشند، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز مثبت است.

قضیه (تجزیه هان) اگر ν یک اندازه علامت‌دار باشد، آنگاه مجموعه‌های مثبت A و منفی B وجود دارند که $X = A \cup B$

و $\phi = A \cap B$.

اثبات- λ را اینفیمم اندازه همه مجموعه‌های منفی در X بگیرید. دنباله B_i از مجموعه‌های منفی وجود دارد که

$$\lambda = \lim_{i \to \infty} \nu(B_i)$$

قرار دهید $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ که یک مجموعه منفی است (زیرا اجتماع شمارا تا مجموعه منفی است) پس

$$\lambda \le \nu(B)$$

مجموعه $B - B_i \subseteq B$ و بنابر تعریف مجموعه منفی داریم $\nu(B - B_i) \le 0$

$$\Rightarrow \quad \nu(B) = \nu(B - B_i) + \nu(B_i) \le \nu(B_i) \longrightarrow \lambda$$

در نتیجه $\nu(B) = \lambda$. از طرفی چون ν مقدار $\infty-$ را اتخاذ نمی‌کند پس $\lambda > -\infty$.

تنها کافی است نشان دهیم $A = B^c$ مثبت است. اگر $E \subseteq A$ و $\nu(E) < 0$ آنگاه

(دقت کنید $E \cap B = \phi$)

$$\nu(E \cup B) = \nu(E) + \nu(B) < \lambda$$

که با تعریف λ و اینکه $\lambda > -\infty$ تناقض دارد.

نکته - $\nu^+(E) = \nu(E \cap A)$ و $\nu^-(E) = -\nu(E \cap B)$ که تجزیه $\nu = \nu^+ - \nu^-$ را می‌دهد به صورتی که $\nu^+ \perp \nu^-$. (تمرین: اثبات کنید $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$)

گزاره: μ یک اندازه (مثبت) σ-متناهی است و $\nu \ll \mu$. آنگاه $\nu(E)=\int_X f\,d\mu$ به ازای یک تابع μ-انتگرال‌پذیر.

اثبات - به دلیل σ-متناهی بودن می‌توان فرض کرد که $\mu(X)<\infty$. (چرا؟)

به ازای هر عدد گویای α اندازه علامت‌دار $\nu-\alpha\mu$ را در نظر بگیرید و تجزیه هان آن را (A_α, B_α) در نظر بگیرید.

داریم: $B_\alpha - B_\beta = B_\alpha \cap A_\beta$ و در نتیجه

① $B_\alpha - B_\beta$ نسبت به اندازه $\nu-\alpha\mu$ یک مجموعه منفی است.

② $B_\alpha - B_\beta$ نسبت به اندازه $\nu-\beta\mu$ یک مجموعه مثبت است.

تعریف کنید:
$$f(x)=\inf\{\alpha : x\in B_\alpha\}$$

که یک تابع اندازه‌پذیر است. (در واقع $f=\inf\limits_{\alpha\in\mathbb{Q}}(\alpha\chi_{B_\alpha})$) داریم روی A_α، $f\geq\alpha$ و

روی B_α، $f\leq\alpha$

اگر E یک مجموعه اندازه‌پذیر دلخواه باشد، ثابت می‌کنیم: $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$

قرار دهید: $E_k = E \cap \left(B_{\frac{k+1}{N}} - B_{\frac{k}{N}} \right)$ به ازای یک مقدار ثابت و دلخواه N.

$$E_\infty = E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k/N}$$

$$E = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \right) \cup E_\infty$$

$$\nu(E) = \nu(E_\infty) + \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k)$$

چون $E_k \subseteq B_{\frac{k+1}{N}} \cap A_{k/N} \Leftarrow \frac{k}{N} \leq f \leq \frac{k+1}{N} \Leftarrow$

(3) $$\frac{k}{N} \mu(E_k) \leq \int_{E_k} f \, d\mu \leq \frac{k+1}{N} \mu(E_k)$$

بنابر خواص ① و ②

$$\left(\nu - \frac{k+1}{N}\mu\right)(E_k) \leq 0 \leq \left(\nu - \frac{k}{N}\mu\right)(E_k)$$

$$\frac{k}{N}\mu(E_k) \leq \nu(E_k) \leq \frac{k+1}{N}\mu(E_k)$$

این روابط را در ③ جایگزین کنید:

④ $$\nu(E_k) - \frac{1}{N}\mu(E_k) \leq \int_{E_k} f\, d\mu \leq \nu(E_k) + \frac{1}{N}\mu(E_k)$$

از طرفی $0 \leq (\nu - \alpha\mu)(E_\infty)$ به ازای هر $\alpha \in \mathbb{Q}$. در نتیجه باید $\mu(E_\infty) = 0$

و چون $\nu \ll \mu$ باید $\nu(E_\infty) = 0$ و همچنین $\int_{E_\infty} f\, d\mu = 0$

رابطه ④ را روی همه اعداد k با مجموعه E_∞ جمع بزنید:

$$-\frac{1}{N}\mu(E) \leq \int_E f\, d\mu - \nu(E) \leq \frac{1}{N}\mu(E)$$

که وقتی $N \to \infty$ قضیه اثبات می‌شود.

گزاره: با شرایط قضیه رادون - نیکودیم، $\nu = \nu_s + \nu_a$ که $\nu_s \perp \mu$ و $\nu_a \ll \mu$ و این تجزیه یکتا است.

اثبات - $\lambda = \mu + |\nu|$ چون μ و ν، σ-متناهی هستند، λ نیز σ-متناهی است.

داریم: $\mu \ll \lambda$ و $\nu \ll \lambda$.

توابع λ-انتگرال‌پذیر f و g وجود دارند که

$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda , \qquad \nu(E) = \int_E g \, d\lambda$$

چون λ اندازه مثبت است پس $f \geq 0$. اگر $A = \{f > 0\}$ و $B = \{f = 0\}$

$$\nu_s(E) = \nu(E \cap B)$$

واضح است که $\nu_s \perp \mu$.

$$\nu_a(E) = \int_{E \cap A} g \, d\lambda = \nu(E \cap A)$$

به وضوح $\nu(E) = \nu(E\cap A) + \nu(E\cap B) = \nu_a(E) + \nu_s(E)$

تنها باید نشان دهیم که $\nu_a \ll \mu$. پس اگر $\mu(E)=0$ آنگاه

$$\int_E f \, d\lambda = 0$$

چون $f \geq 0$ باید $\lambda(E\cap A)=0$

$$\Rightarrow \nu_a(E) = \int_{E\cap A} g \, d\lambda = 0$$

آنالیز حقیقی

جلسه بیست و چهار ۹۷/۹/۲۰

فضاهای $\mathcal{L}^p$

اگر $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای اندازه σ-متناهی باشد فضای $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{M},\mu)$ یا به طور خلاصه $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ یا $\mathcal{L}^p(X)$

شامل همه توابع اندازه‌پذیری است که

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu < \infty \qquad \text{برای} \qquad 1\le p<\infty$$

$$\exists M>0 \ \text{s.th.} \ |f(x)|\le M \ \ \mu\text{-a.e. in } X \qquad \text{برای} \qquad p=\infty$$

در حقیقت مشابه فضای $\mathcal{L}^1$ اعضای $\mathcal{L}^p$ کلاس‌های هم‌ارزی هستند که اعضای هر کلاس تقریباً همه‌جا برابرند.

مثال- $X=\mathbb{Z}$ و $\mu(A)=\#A$ (تعداد اعضای A) (μ را اندازه شمارشی گوییم)

$$\mathcal{M}=2^{\mathbb{Z}}$$

توابع اندازه‌پذیر دنباله‌های $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ هستند. $\mathcal{L}^p(\mathbb{Z})$ را که معمولاً با ℓ^p نشان می‌دهیم شامل دنباله‌هایی است که $\sum_{-\infty}^{+\infty}|a_n|^p<\infty$.

تعریف ـ (فضای باناخ) فضای برداری نرم دار تام.

V فضای برداری باشد و $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ یک نرم است هرگاه

(1) $\|u\| = 0 \iff u = 0$

(2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\| \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \; u \in V$

(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

اگر هر دنباله کوشی در فضای V همگرا باشد، آنگاه V تام است.

قضیه: فضای $\mathcal{L}^p(X)$ فضای باناخ است. $1 \leq p \leq \infty$

نرم فضای $\mathcal{L}^p(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \inf \{ M : |f(x)| \leq M \quad \mu\text{-a.e. in } X \} & p = \infty \end{cases}$$

دقت کنید که $\|f\|_\infty$ در حالت $p=\infty$ یک کران بالای ت.ه. برای تابع f است که به آن essential-Supremum گوییم.

برای اینکه نشان دهیم تعریف فوق یک نرم روی $\mathcal{L}^p(X)$ است تنها کافیست نامساوی مثلث را بررسی کنیم. (اگر $0<p<1$ نامساوی مثلث برقرار نیست (تمرین))

حالت $p=1$. به وضوح نامساوی مثلث از انتگرال $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ نتیجه می‌شود.

حالت $p=\infty$. نیز به وضوح رابطه $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ برقرار است.

قضیه (نامساوی هولدر) اگر $1\leq p\leq\infty$ و $1\leq q\leq\infty$ که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و اگر $f\in\mathcal{L}^p$, $g\in\mathcal{L}^q$
آنگاه $fg\in\mathcal{L}^1$ و

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

اثبات- حالت $p=1$ منجر به $q=\infty$. چون $g \in \mathcal{L}^\infty$ پس $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ ت.ه.

$$\int_X |f(x)g(x)|\,d\mu \leq \|g\|_\infty \int_X |f(x)|\,d\mu = \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

حالت $p=\infty$ نیز مشابه بالا است.

برای $1<p<\infty$. نامساوی $a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta) b$ را در نظر بگیرید که $0 \leq a,b$ و $0\leq\theta\leq 1$.

$$a = \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p, \quad b = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q, \quad \theta = \frac{1}{p}, \quad 1-\theta = \frac{1}{q}.$$

$$a^\theta b^{(1-\theta)} = \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \int_X |f(x)g(x)|\,d\mu \leq \frac{1}{p} \int \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}\,d\mu + \frac{1}{q} \int \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\,d\mu$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

قضیه (نامساوی مینکوفسکی). اگر $1\le p\le \infty$ و $f,g\in \mathcal{L}^p$ آنگاه $f+g\in\mathcal{L}^p$ و

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p$$

اثبات- از نامساوی $(a+b)^p \le 2^p(a^p+b^p)$ برای $1\le p$ نتیجه می‌شود که $f+g\in\mathcal{L}^p$.

$$|f(x)+g(x)|^p \le |f(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p-1}$$

چون $f+g\in\mathcal{L}^p$ پس $|f+g|^{p-1}\in\mathcal{L}^q$ که $q=\frac{p}{p-1}$. درنتیجه $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و بنابر نامساوی هولدر

$$\int_X |f+g|^p\,d\mu \le \|f\|_p\cdot\left[\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right]^{1/q}+\|g\|_p\cdot\left[\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right]^{1/q}$$

$$\Rightarrow \left[\int_X |f+g|^p\,d\mu\right]^{\overbrace{1-\frac{1}{q}}^{=\frac{1}{p}}} \le \|f\|_p+\|g\|_p$$

قضیه: فضای برداری نرم‌دار $\mathcal{L}^p$ تام است. به عبارتی $\mathcal{L}^p$ یک فضای باناخ است.

اثبات قضیه فوق مشابه حالت $p=1$ برای $X=\mathbb{R}^d$ است که قبلاً اثبات شد. در حقیقت نتیجه زیر نیز از فرآیند اثبات به دست می‌آید.

قضیه: اگر $\{f_n\}$ یک دنباله کوشی در $\mathcal{L}^p$ باشد، آنگاه زیردنباله‌ای از آن وجود دارد که

$$f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x) \quad \mu\text{-a.e. in } X$$

گزاره: اگر $\mu(X)<\infty$ و $p_0 \leq p_1$ آنگاه $\mathcal{L}^{p_1}(X) \subseteq \mathcal{L}^{p_0}(X)$ و

$$\frac{1}{\mu(X)^{\frac{1}{p_0}}} \|f\|_{p_0} \leq \frac{1}{\mu(X)^{\frac{1}{p_1}}} \|f\|_{p_1}$$

اثبات- اگر $F=|f|^{p_0}$ ، $G=1$

$p=\frac{p_1}{p_0}$ ، $q=\frac{p_1}{p_1-p_0}$

بنا بر نامساوی هولدر

$$\int_X |f(x)|^{p_0}\, d\mu \leq \left(\int F^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X 1^q\, d\mu\right)^{1/q}$$

گزاره- اگر $\mu(X)<\infty$ و $p \nearrow p_1$ و $f\in\mathcal{L}^{p_1}(X)$ ، آنگاه

$$\|f\|_p \longrightarrow \|f\|_{p_1}$$

تذکر: در گزاره بالا چون $f\in\mathcal{L}^{p_1}$ و $p\le p_1$ پس $f\in\mathcal{L}^{p}$ و $\|f\|_p$ معنا دارد.

اثبات- اگر $p_1<\infty$ و دنباله q_n به p_1 همگرا باشد که $q_n<p_1$. توابع $g_n(x)=|f(x)|^{q_n}$ به طور نقطه‌ای به $|f(x)|^{p_1}$ همگرا هستند. بنابر قضیه تسلطی لبگ

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n(x)\,d\mu=\int_X |f(x)|^{p}\,d\mu$$

درحقیقت $g_n\le g$ که

$$g(x)=\begin{cases}|f(x)|^{p} & |f(x)|\ge 1\\ 1 & |f(x)|<1\end{cases}$$

به علاوه

$$\int_X g(x)\,d\mu=\int_{|f|<1}1\,d\mu+\int_{|f|\ge1}|f(x)|^{p}\,d\mu\le\mu(X)+\|f\|_p^p<\infty$$

تا اینجای کار اثبات کردیم :

$$\|f\|_{q_n}^{q_n} \longrightarrow \|f\|_{p_1}^{p_1}$$

(تمرین : اگر $x_n \longrightarrow x$ و $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ آنگاه $x_n^{\alpha_n} \longrightarrow x^{\alpha}$.)

در نتیجه

$$\|f\|_{q_n} \longrightarrow \|f\|_{p_1} .$$

حالت $p_1 = \infty$. از گزاره قبل می‌دانیم که $\|f\|_{q_n} \leq \mu(X)^{\frac{1}{q_n}} \|f\|_\infty$ بنابراین $\limsup \|f\|_{q_n} \leq \|f\|_\infty$

از طرفی برای هر $\varepsilon > 0$ ،

$$\delta = \mu(\{x : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}) > 0$$

$$\Rightarrow \int_X |f|^{q_n} \geq \int_{|f| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon} |f(x)|^{q_n} d\mu \geq \delta (\|f\|_\infty - \varepsilon)^{q_n}$$

$$\Rightarrow \liminf \|f\|_{q_n} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon .$$

تعریف: اگر B یک فضای باناخ باشد. یک تابعک خطی روی B تابعی به صورت $l: B \to \mathbb{R}$ است که

$$l(\alpha f + \beta g) = \alpha\, l(f) + \beta\, l(g) \quad , \; f, g \in B \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

وقتی B نرم‌دار است صحبت از پیوستگی تابعک خطی l معنادار است. l در نقطه $f \in B$ پیوسته است هرگاه

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \|f - g\|_B < \delta \Longrightarrow |l(f) - l(g)| < \varepsilon$$

خاصیت خطی بودن l نتیجه می‌دهد که پیوستگی l در یک نقطه معادل پیوستگی در همه نقاط است.

تابعک خطی l در نقطه $f = 0$ پیوسته است هرگاه

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta > 0 \quad \|g\|_B < \delta \Rightarrow |l(g)| < \varepsilon$$

اگر $h \in B$ یک بردار دلخواه باشد، $\lambda \in \mathbb{R}$ انتخاب کنید به گونه‌ای که $\|\lambda h\|_B < \delta$ مثلاً $\lambda = \dfrac{\delta}{2\|h\|_B}$

پس باید

$$|\ell(\lambda h)| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad |\ell(h)| < \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{2\varepsilon}{\delta} \cdot \|h\|_B$$

تعریف. تابعک خطی ℓ را کران‌دار گوییم هرگاه ثابت $C>0$ وجود داشته باشد که

$$|\ell(f)| \le C\|f\| \qquad \forall f \in B$$

قضیه: تابعک خطی روی فضای نرم‌دار B پیوسته است اگر و تنها اگر کران‌دار باشد.

نکته- هر چند همه تابعک‌های خطی روی فضای برداری با بعد متناهی پیوسته هستند ولی این مطلب وقتی بعد فضا نامتناهی می‌شود لزوماً درست نیست

تعریف- اگر B فضای برداری نرم‌دار باشد، B^* را فضای دوگان B می‌نامیم که شامل همه تابعک‌های خطی پیوسته است.

B^* یک فضای برداری نرم‌دار است.

$$\|l\|_{B^*} := \sup_{f \neq 0} \frac{|l(f)|}{\|f\|_B} = \sup_{\|f\|_B = 1} |l(f)|$$

تمرین- نشان دهید $\|l\|_{B^*}$ یک نرم است.

قضیه: فضای برداری B^* باناخ است حتی اگر B باناخ نباشد.

آنالیز حقیقی

جلسه بیست و پنج ۹۷/۹/۲۵

فضای دوگان $\mathcal{L}^p(X)$.

اگر $1 \leq p \leq \infty$ و q زوج p یعنی $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، آنگاه متناظر هر تابع $g \in \mathcal{L}^q$

یک تابعک خطی پیوسته روی $\mathcal{L}^p$ وجود دارد.

$$T_g : \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T_g(f) = \int_X f g \, d\mu$$

از نامساوی هولدر داریم:

$$|T_g(f)| = \left| \int_X f g \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

در نتیجه T_g پیوسته است و

$$\|T_g\|_{(\mathcal{L}^p)^*} = \sup_{f \neq 0} \frac{T_g(f)}{\|f\|_p} \leq \|g\|_q$$

لم زیر نشان می‌دهد که نرم دوگان عملگر T_g دقیقاً برابر نرم g است.

لم: اگر $g \in \mathcal{L}^q$ آنگاه

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \int_X fg \, d\mu \right|$$

اثبات - تنها کافیست تابع $f \in \mathcal{L}^p$ را پیدا کنیم که $\|f\|_p \leq 1$ و $\left| \int_X fg \, d\mu \right| = \|g\|_q$. (البته به شرط $q < \infty$)

- اگر $q=1$ و $p=\infty$، قرار دهید $f(x) = \mathrm{Sign}(g(x)) = \begin{cases} +1 & g(x) > 0 \\ 0 & g(x) = 0 \\ -1 & g(x) < 0 \end{cases}$ به وضوح $f \in \mathcal{L}^\infty$ و

$$\int_X fg \, d\mu = \int_X |g| \, d\mu = \|g\|_1$$

- اگر $1 < p, q < \infty$. قرار دهید $f(x) = \mathrm{Sign}(g(x)) \cdot |g(x)|^{q-1} / \|g\|_q^{q-1}$

$$\int_X fg \, d\mu = \left[\int_X |g|^q \, d\mu \right] / \|g\|_q^{q-1} = \|g\|_q .$$

از طرفی $\|f\|_p = 1$.

- اگر $q=\infty$ و $p=1$. به ازای هر n، قرار دهید : $E_n = \{x : |g(x)| \geq \|g\|_\infty - \frac{1}{n}\}$

$$f_n(x) = \operatorname{Sign}(g(x))\, \chi_{E_n}(x) \Big/ \mu(E_n)$$

$$\int_X |f_n(x)|\, d\mu = \int_{E_n} \frac{1}{\mu(E_n)}\, d\mu = 1$$

$$\int_X f_n g\, d\mu = \int_{E_n} |g(x)| \Big/ \mu(E_n)\, d\mu \geq \|g\|_\infty - \frac{1}{n}$$

بنابراین سوپریمم $\int_X fg$ برابر نرم $\|g\|_\infty$ خواهد بود.

قضیه: فضای دوگان $(\mathcal{L}^p)^*$ ایزومتر است با $\mathcal{L}^q$. یعنی یکریختی $T: \mathcal{L}^q \longrightarrow (\mathcal{L}^p)^*$ وجود دارد که $\|Tg\|_{(\mathcal{L}^p)^*} = \|g\|_{\mathcal{L}^q}$. $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \,،\, 1\leq p<\infty\right)$

اثبات ـ با توجه به مباحث قبل تنها باید نشان دهیم که T پوشا است. یعنی اگر $\ell \in (\mathcal{L}^p)^*$ آنگاه تابع $g \in \mathcal{L}^q$ وجود دارد که $Tg = \ell$.

ابتدا فرض کنید که $\mu(X)<\infty$. اندازه علامت دار ν را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\nu(E) = \ell(\chi_E)$$

ادعا: ν یک اندازه علامت دار است.

اگر $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ که $\{E_i\}$ دو به دو مجزا هستند، درنتیجه $\chi_E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(x)$ به ازای هر $x \in X$.

به دلیل خاصیت خطی بودن ℓ داریم:

$$\ell\left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ell(\chi_{E_i}) \tag{1}$$

از طرفی قرار دهید $E_n^* = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i$. آنگاه $E = E_n^* \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$. بنابر خاصیت اندازه μ ،

$$\mu(E) = \mu(E_n^*) + \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

و چون $\mu(E) \le \mu(X) < \infty$ بنابراین باید $\mu(E_n^*) \to 0$. یعنی $\chi_{E_n^*} \to 0$ در فضای $\mathcal{L}^p$

(زیرا $\|\chi_{E_n^*}\|_p = (\mu(E_n^*))^{\frac{1}{p}}$) در نتیجه $\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} \xrightarrow{\mathcal{L}^p} \chi_E$ (2)

اکنون در رابطه (1) اجازه دهید $n \to \infty$. بنابر پیوستگی l خواهیم داشت

$$l(\chi_E) = \sum_{i=1}^{\infty} l(\chi_{E_i})$$

$$\Rightarrow \quad \nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$

(نکته: رابطه (2) وقتی $p = \infty$ درست نیست. چرا؟)

اکنون نشان می‌دهیم که $\nu \ll \mu$. یعنی اگر $\mu(E)=0$ ، آنگاه

$$\nu(E) = \ell(\chi_E) = 0$$

زیرا $\chi_E = 0$ ت-μ.ه. در X. بنابراین χ_E در فضای $\mathcal{L}^p$ همان تابع ثابت صفر است.

از قضیه رادون-نیکودیم نتیجه می‌شود که تابع اندازه‌پذیر g وجود دارد که

$$\nu(E) = \int_E g\, d\mu \implies \ell(\chi_E) = \int_E g\, d\mu = \int_X g \chi_E\, d\mu$$

بنابر خاصیت خطی بودن ℓ به ازای هر تابع ساده $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$ داریم:

$$\ell(f) = \int_X g f\, d\mu \qquad (۳)$$

بنابر لم ۱ توابع ساده در فضای $\mathcal{L}^p$ چگال هستند و در نتیجه رابطه (۳) برای هر $f \in \mathcal{L}^p$ برقرار است.

لم ۲ نشان می‌دهد که $g \in \mathcal{L}^q$ و در نتیجه $\ell = T_g$ و $\|g\|_q = \|\ell\|_{(\mathcal{L}^p)^*}$

لم ۱- توابع ساده در فضای $\mathcal{L}^p$ چگال هستند.

لم ۲- اگر g یک تابع انتگرال‌پذیر باشد که $\sup\limits_{\|f\|_p\le 1}\left|\int_X fg\,d\mu\right| = M<\infty$. آنگاه $g\in\mathcal{L}^q$ و $\|g\|_q = M$.

ادامه اثبات قضیه (حالت $\mu(X)=\infty$)

فرض کنید دنباله صعودی مجموعه‌های اندازه متناهی E_n وجود دارند که $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. بنابر اثبات فوق آنگاه $g_n\in\mathcal{L}^q(E_n)$ وجود دارد که

$$(۴)\qquad \ell(f\chi_{E_n}) = \int_{E_n} f g_n\,d\mu = \int_X f\chi_{E_n} g_n\,d\mu$$

حال g_n را خارج E_n با صفر توسیع دهید. درنتیجه می‌توان g_n را عضوی از $\mathcal{L}^q(X)$ می‌توان درنظر گرفت.

از رابطه (۴) نتیجه می‌شود که $g_{n+1}\big|_{E_n} = g_n$ و درنتیجه حد $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ به ازای هر x وجود دارد

از طرفی $\|\ell\|_{(\mathcal{L}^p)^*} \leq \|\ell|_{\mathcal{L}^p(E_n)}\|_{(\mathcal{L}^p)^*} = \|g_n\|_{\mathcal{L}^q}$ بنابر لم Fatou داریم:

$$\int_X |g(x)|^q \, d\mu \leq \liminf \int_X |g_n(x)|^q \, d\mu \leq \left(\|\ell\|_{(\mathcal{L}^p)^*}\right)^q < \infty$$

$$\Longrightarrow g \in \mathcal{L}^q(X)$$

و اگر $f \in \mathcal{L}^p(X)$ دلخواه باشد

$$\ell(f) = \int_X f g \, d\mu$$

زیرا $f \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f\chi_{E_n}$. (چرا؟)

تذکر- هرچند قضیه قبل اثبات دیگری بر اساس خواص فضاهای بازتابی دارد ولی این قضیه معادل قضیه رادون - نیکودیم است.

در ادامه اثباتی برای قضیه رادون-نیکودیم به کمک رابطه $(\mathcal{L}^p)^* \cong \mathcal{L}^q$ خواهد آمد.

اثبات لم ۲:

حالت $1<p$. چون g انتگرال‌پذیر است دنباله توابع ساده g_n وجود دارد که $|g_n(x)|\leq|g(x)|$ و $g_n(x)\longrightarrow g(x)$ برای هر x.

اگر $f_n(x)=\text{Sign}(g(x))\,|g_n(x)|^{q-1}\big/\|g_n\|_q^{q-1}$، آنگاه $\|f_n\|_p=1$.

$$\int f_n g=\int |g(x)|\cdot|g_n(x)|^{q-1}\,d\mu\Big/\|g_n\|_q^{q-1}<M$$

$$\text{Fatou لم}\Rightarrow\quad \int|g|^q\,d\mu\leq \liminf M\,\|g_n\|_q^{q-1}=\liminf M\Big[\int_X|g_n|^q\,d\mu\Big]^{\frac{q-1}{q}}$$

$$\leq M\Big[\int_X|g|^q\,d\mu\Big]^{\frac{q-1}{q}}\qquad (\text{چون } |g_n|\leq|g|)$$

$$\Rightarrow \|g\|_q\leq M\Rightarrow g\in\mathcal{L}^q$$

حالت $p=1$ و $q=\infty$. قرار دهید $\}$ $E_\varepsilon=\{x : |g(x)|\geq M+\varepsilon$ ،

اگر $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ که $\mu(X_n)<\infty$. اگر $\mu(E_\varepsilon)>0$ آنگاه $0<\mu(X_n\cap E_\varepsilon)$

قرار دهید $f=\dfrac{\operatorname{sgn}(g(x))\chi_{(X_n\cap E_\varepsilon)}}{\mu(X_n\cap E_\varepsilon)}$ آنگاه $\|f\|_1=1$ و

$$M\geq\left|\int_X gf\right|=\int_{X_n\cap E_\varepsilon}\frac{|g(x)|}{\mu(X_n\cap E_\varepsilon)}\,d\mu\geq M+\varepsilon \quad \times$$

$$\Rightarrow \quad \mu(E_\varepsilon)=0$$

تذکر: همان طور که در قضیه قبل دیدیم $(\mathcal{L}^p)^*\cong\mathcal{L}^q$ برای $1\leq p<\infty$ درست است. برای $p=\infty$ تنها می‌دانیم که فضای $\mathcal{L}^q$ یکریخت (ایزومتر) با یک زیرفضای $(\mathcal{L}^\infty)^*$ است. در حقیقت نشاندن $T:\mathcal{L}^1\longrightarrow(\mathcal{L}^\infty)^*$ پوشا نیست. در جلسه بعد مثالی از $(\mathcal{L}^\infty)^*$ خواهیم دید که هیچ تابعی در $\mathcal{L}^1$ آن را نمی‌سازد.

اثبات جدیدِ قضیهِ رادون ـ نیکودیم :

فرض کنید μ و ν هردو اندازه مثبت و متناهی باشند. قرار دهید $\rho=\mu+\nu$ و تابعک خطی

$$\ell(\psi)=\int_X \psi\, d\nu$$

روی $\mathcal{L}^2(X,\rho)$ پیوسته است زیرا

$$|\ell(\psi)|\le\int_X|\psi|\,d\nu\le\int_X|\psi|\,d\rho\le\rho(X)^{\frac{1}{2}}\,\|\psi\|_{\mathcal{L}^2(X,\rho)}$$

هولدر

بنابراین تابع $g\in\mathcal{L}^2(X,\rho)$ وجود دارد که

$$\ell(\psi)=\int_X g(x)\psi(x)\,d\rho$$

$$\Rightarrow\quad \int_X\psi\,d\nu=\int_X g\psi\,d\rho \qquad \forall\ \psi\in\mathcal{L}^2(X,\rho) \qquad (*)$$

اگر $E = \{ g > 1+\varepsilon \}$ و $0 < \rho(E)$ آنگاه قرار دهید $\psi = \chi_E$

$$\rho(E) \geq \nu(E) = \int_X \chi_E \, d\nu = \int_E g \, d\rho > \rho(E)(1+\varepsilon) \quad \cancel{X}$$

درنتیجه $g(x) \leq 1$ ت.ه. (نسبت به اندازه ρ) و به طور مشابه $0 \leq g(x)$.

$A = \{ x : 0 \leq g(x) < 1 \}$, $B = \{ x : g(x) = 1 \}$,

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap A) \quad , \quad \nu_s(E) = \nu(B \cap E)$$

ابتدا نشان می‌دهیم $\nu_s \perp \mu$.

در $(*)$ قرار دهید $\psi = \chi_B$.

$$\nu(B) = \int_B g \, d\rho = \rho(B) \Rightarrow \mu(B) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(E) = \mu(A \cap E) .$$

حال نشان می‌دهیم $\nu_a \ll \mu$.

$$(*) \Rightarrow \int_X \psi \, d\nu = \int_X g\psi \, d\nu + \int_X g\psi \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X (1-g)\psi \, d\nu = \int_X g\psi \, d\mu$$

قرار دهید $\psi = (1+g+g^2+\cdots+g^n)\chi_{E\cap A}$

$$\Rightarrow \int_{E\cap A} (1-g^{n+1}) \, d\nu = \int_{E\cap A} g(1+g+\cdots+g^n) \, d\mu$$

روی A، داریم $1-g^{n+1}(x) \to 1$ و بنابر قضیه تسلطی لبگ طرف سمت چپ رابطه بالا برابر

$$\nu(E\cap A) = \nu_a(E)$$

است. تابع زیرانتگرال در سمت راست روی A به $f = \dfrac{g}{1-g}$ همگرا است.

بنابر لم Fatou

$$\int_{E\cap A} f\,d\mu \leq \liminf \int_{E\cap A} g(1+g+\cdots+g^n)\,d\mu$$

$$= \liminf \int_{E\cap A} (1-g^{n+1})\,d\nu = \nu(E\cap A) \leq \nu(X) < \infty$$

در نتیجه $f\in L^1(X,\mu)$. حال با توجه به نامساوی $g(1+g+\cdots+g^n) \leq \frac{g}{1-g} = f$ و قضیه همگرایی

تسلطی نتیجه می‌شود که

$$\nu_a(E) = \nu(E\cap A) = \int_{E\cap A} f\,d\mu$$

چون $\mu(B)=0$ بنابراین

$$\nu_a(E) = \int_E f\,d\mu$$

حالت $\mu(X)=\infty$ مشابه اثبات قبل است. همچنین اگر ν علامت دار باشد به کمک تجزیه $\nu=\nu_+-\nu_-$ اثبات کامل

می‌شود.

آنالیز حقیقی

جلسه بیست و شش ۹۷,۹,۲۷

قضیه هان - باناخ

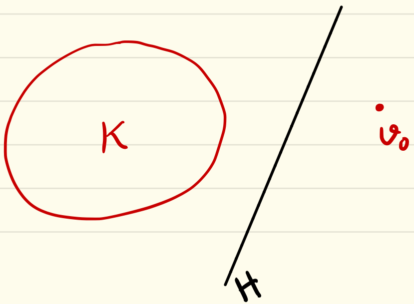
تعریف - یک ابرصفحه برابر مجموعه پوچی یک تابعک خطی تعریف می‌شود. یعنی اگر l تابعک خطی باشد، $\{x\in X : l(x)=0\}$ یک ابرصفحه است. مجموعه بردارهای $\{x : l(x)=a\}$ یک ابرصفحه آفین نامیده می‌شود.

ابرصفحه $\{x\in X : l(x)=0\}$ در فضای برداری نرم‌دار X بسته است هرگاه l تابعک خطی پیوسته باشد.

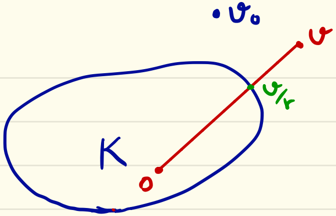
تعریف - مجموعه K را در فضای برداری X محدب گوییم هرگاه به ازای هر $u, v \in K$ و $0\leq\lambda\leq 1$

$$\lambda u+(1-\lambda)v \in K$$

سوال: اگر K یک مجموعه محدب باشد و $v_0 \notin K$، آیا می‌توان ابرصفحه‌ای را پیدا کرد که K را از v_0 جدا کند؟



اگر $H=\{x : l(x)=a\}$ و $l(v_0)<a$ و $l|_K \geq a$ آنگاه H نقطه v_0 را از K جدا می‌کند.



اگر $0 \in K$

$$p(v) = \inf \left\{ r > 0 : \frac{v}{r} \in K \right\}$$

خواهیم داشت $\quad p(v) < 1 \iff v \in K$

(به شرط آنکه K باز باشد)

در نتیجه $p(v_0) \geq 1$.

تابعک خطی ℓ را بدین صورت می‌سازیم که $\ell(v_0) = 1$ و $\ell(v) \leq p(v)$ به ازای هر $v \in X$.

دقت کنید p دارای خواص زیر است : (خواص شبه‌نرم)

(1) $\quad p(\lambda v) = \lambda\, p(v) \qquad \lambda \geq 0 \,,\; v \in X$

(2) $\quad p(u+v) \leq p(u) + p(v)$

این خواص تضمین می‌کند که در فضای هم‌متناهی که $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه‌ای برای X است در ضمن $e_1 = v_0$.

$l(e_1) = 1$ قرار می‌دهیم و به زیرفضای $\langle e_1 \rangle$ توسیع می‌دهیم. به وضوح $l(v) \le p(v)$ در این زیرفضا

برقرار است. برای توسیع l به زیرفضای $\langle e_1, e_2 \rangle$ باید

$$l(\lambda_1 e_1 \pm e_2) \le p(\lambda_1 e_1 \pm e_2)$$

برقرار باشد. اگر $l(e_2) = t_2$ باید

$$-p(\lambda_1 e_1 - e_2) + \lambda_1 \le t_2 \le p(\lambda_1 e_1 + e_2) - \lambda_1$$

به ازای هر $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ برقرار باشد. در نتیجه کافی است

$$\sup_{\lambda_1 \in \mathbb{R}} \{-p(\lambda_1 e_1 - e_2) + \lambda_1\} \le \inf_{\lambda_1 \in \mathbb{R}} \{p(\lambda_1 e_1 + e_2) - \lambda_1\}$$

یا به طور معادل

$$-p(\lambda_1 e_1 - e_2) + \lambda_1 \le p(\mu_1 e_1 + e_2) - \mu_1$$

$$\lambda_1+\mu_1 \le p((\lambda_1+\mu_1)e_1) \le p(\lambda_1 e_1 - e_2) + p(\mu_1 e_1 + e_2)$$

اگر $0 \le \lambda_1+\mu_1$ تساوی است و

اگر $\lambda_1+\mu_1 < 0$ با توجه به اینکه $0 \le p$ برقرار است.

به طور مشابه و به صورت استقرایی l را به کل فضای بعد متناهی X توسعه می‌دهیم.

برای بعد نامتناهی وجود چنین تابعک خطی از قضیه زیر به دست می‌آید:

قضیه هان-باناخ: فرض کنید V_0 یک زیرفضای برداری V باشد و تابعک زیرخطی p با خواص زیر روی V داده شده باشد:

$$p(\lambda v) = \lambda p(v) \qquad \forall \lambda \ge 0,\ v \in V \qquad (1)$$

$$p(u+v) \le p(u) + p(v) \qquad (2)$$

اگر l_0 یک تابعک خطی روی V_0 باشد که $l_0(v) \le p(v)$ به ازای هر $v \in V$

آنگاه می‌توان l_0 را به تابعک خطی l روی V توسعه داد به طوری که $l(v) \le p(v)$.

کاربردهای هان ـ باناخ:

۱) اگر V فضای برداری نرم دار باشد و l_0 تابعک خطی پیوسته روی V_0 باشد، آنگاه l_0 یک توسیع پیوسته به کل فضای V دارد.

درضمن $\|l_0\|_{V_0'} = \|l\|_{V'}$.

چون l_0 پیوسته است پس ثابت $C>0$ وجود دارد که

$$l_0(v) \leq C\|v\| \qquad \forall v \in V_0$$

اگر $p(v) = C\|v\|$ به کمک قضیه هان ـ باناخ توسیع l روی V وجود دارد که

$$l(v) \leq p(v) = C\|v\|$$

درنتیجه l پیوسته است.

۲) اگر W زیرفضای V باشد و $u \in V$ به طوری که $0 < dist(u,W)$ ، آنگاه $f \in V'$ وجود دارد که

$$f|_W = 0 \quad , \quad \|f\|_{V'} = 1 \quad , \quad f(u) = \|u\|$$

قرار دهید $W_1 = W \oplus \langle u \rangle$ و $f|_W = 0$ و $f(u) = \|u\|$ یک تابعک خطی پیوسته روی W_1 تعریف کند.

بوضوح $\|f\|_{W_1'} = 1$. به کمک گزاره ① f به یک تابعک خطی پیوسته روی V توسیع پیدا می‌کند.

③ $\|u\|_X = \sup\limits_{0 \neq f \in X'} \dfrac{f(u)}{\|f\|_{X'}}$ به ازای هر $u \in X$.

$$f(u) \leq \|f\|_{X'} \cdot \|u\|_X \Longrightarrow \sup \frac{f(u)}{\|f\|_{X'}} \leq \|u\|_X$$

از طرفی بنابر ② وقتی $W = \langle 0 \rangle$ ، تابعک خطی $f \in X'$ وجود دارد که $f(u) = \|u\|_X$ و $\|f\|_{X'} = 1$. پس

$$\|u\|_X \leq \sup \frac{f(u)}{\|f\|_{X'}}$$

④ $(\mathcal{L}^\infty)'$ بزرگتر از $\mathcal{L}^1$ است. به ازای هر $f\in\mathcal{L}^1$ تابعک خطی پیوسته $T_f\in(\mathcal{L}^\infty)'$ با ضابطه زیر وجود دارد:

$$T_f(g)=\int fg\,dx$$

$$|T_f(g)|\le \|f\|_1\cdot\|g\|_\infty$$

به علاوه در جلسه گذشته دیدیم که $\|T_f\|_{(\mathcal{L}^\infty)'}=\|f\|_{\mathcal{L}^1}$. بنابراین $T:\mathcal{L}^1\longrightarrow(\mathcal{L}^\infty)'$ یک ایزومتری است. به کمک هان - باناخ نشان می‌دهیم که این ایزومتری پوشا نیست.

$C(\Omega)$ را فضای توابع پیوسته روی $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ بگیرید. به وضوح $C(\Omega)$ زیرفضای $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ است. تابعک خطی پیوسته δ را روی $C(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم که $x_0\in\Omega$ یک نقطه دلخواه ثابت است.

$$\delta(g)=g(x_0)$$

$$|\delta(g)|=|g(x_0)|\le\|g\|_\infty$$

به کمک هان باناخ (گزاره ①) δ را می‌توان به $\mathcal{L}^\infty$ توسعه داد. در واقع $\delta\in(\mathcal{L}^\infty)'$ که $\|\delta\|_{(\mathcal{L}^\infty)'}=1$ و

$$\delta(g) = g(x_0) \qquad \forall\, g \in C(\Omega) \,.$$

نشان می‌دهیم $\delta \notin \operatorname{Im} T$. در غیر این صورت تابع $f \in L^1$ باید وجود داشته باشد که

$$\int_X f(x) g(x)\, dx = g(x_0) \qquad \forall\, g \in C(\Omega)$$

ادعا: دنباله $g_n \in C$ وجود دارد که $g_n(x_0) = 0$ و $g_n \xrightarrow{a.e.} f$

$$\int_X f^2 d\mu \le \liminf \int_X f g_n = 0 \implies f = 0 \implies \delta = 0 \;\; \times$$

اثبات ادعا: چون $C(\Omega)$ در $L^1(\Omega)$ چگال است، دنباله $\tilde{g}_n \in C(\Omega)$ وجود دارد که $\tilde{g}_n \xrightarrow{L^1} f$ تابع برش $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$ را

در نظر بگیرید که $\eta|_{B_r(x_0)} \equiv 0$ و $\eta|_{\Omega \setminus B_{2r}(x_0)} \equiv 1$ و $0 \le \eta(x) \le 1$. قرار دهید $\eta_n(x) = \eta(nx)$

آنگاه $\eta_n \tilde{g}_n \xrightarrow{L^1} f$ زیرا

$$\int_\Omega |\eta_n(x)\tilde{g}_n(x)-\tilde{g}_n(x)|dx = \int_{B_{\frac{2r}{n}}(x_0)} |(\eta_n(x)-1)\tilde{g}_n(x)|dx \leq \int_{B_{\frac{2r}{n}}(x_0)} |\tilde{g}_n(x)|dx \leq \int_{B_{\frac{2r}{m}}(x_0)} |\tilde{g}_n(x)|dx$$

اگر $m \leq n$.

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \|\eta_n \tilde{g}_n - \tilde{g}_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(B_{\frac{2r}{m}}(x_0))} \quad \forall m$$

$$\Rightarrow \|\eta_n \tilde{g}_n - \tilde{g}_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0$$

$$\Rightarrow g_n = \eta_n \tilde{g}_n \longrightarrow f \quad \text{in } L^1$$

بنابراین $\{g_n\}$ زیردنباله‌ای دارد که $g_n \xrightarrow{a.e.} f$ به علاوه $g_n(x_0)=\eta_n(x_0)\tilde{g}_n(x_0)=0$

آنالیز حقیقی

جلسه بیست و هفت ۹۷/۱۰/۲

قضیه کتگوری بئر:

اگر $X\neq\emptyset$ یک فضای متریک تام باشد و $X=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$ که A_j ها بسته هستند. آنگاه درون یکی از A_j ها ناتهی است.

به طور معادل:

اگر B_j ها دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز و چگال در X باشند، آنگاه $\bigcap_{j=1}^{\infty}B_j\neq\emptyset$.

نکته- در شکل معادل فوق $\bigcap_{j=1}^{\infty}B_j$ یک زیرمجموعه چگال در X است.

اثبات- با فرض خلف فرض کنید درون A_j ها تهی است. $x_1\in A_1^c$ دلخواه در نظر بگیرید و گوی $A_1^c\supseteq B_{r_1}(x_1)$ در نظر بگیرید.
(A_1^c باز است و این گوی وجود دارد) چون درون A_2 تهی است پس $B_{r_1}(x_1)$ به طور کامل در A_2 قرار ندارد.
پس $x_2\in B_{r_1}(x_1)\setminus A_2$ وجود دارد گوی $B_{r_2}(x_2)$ وجود دارد که $\overline{B_{r_2}(x_2)}\subseteq A_2^c\cap B_{r_1}(x_1)$
به علاوه $r_2<r_1/2$. به همین ترتیب دنباله $\{x_n\}$ وجود دارند به همراه اعداد حقیقی $\{r_n\}$ که

$$\overline{B_{r_n}(x_n)} \subseteq A_n^c \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \quad , \quad r_n < \frac{r_{n-1}}{2}$$

ادعا: $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در X است.

$$(*) \qquad \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \subseteq B_{r_n}(x_n)$$

$$\Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < r_n \qquad m \geq n$$

اگر $x_n \longrightarrow x^*$ در نتیجه بنابر رابطه (*) باید

$$x^* \in \overline{B_{r_n}(x_n)} \subseteq A_n^c$$

$$\Rightarrow \quad x^* \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \emptyset$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \right)$$

اثبات نکته: $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$ چگال است. فرض کنید $\overline{B}$ گوی بسته دلخواه در X باشد. هر B_j در X باز و چگال است
بنابراین $\overline{B} \cap B_j$ در $\overline{B}$ باز و چگال است. $\overline{B}$ را به عنوان فضای متریک تام در نظر بگیرید و بنابر قضیه کتگوری بئر،
$\overline{B} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{B} \cap B_j \neq \emptyset$.

تعریف - اگر $A \subseteq X$ دارای این خاصیت باشد که درون $\overline{A}$ تهی است آن را مجموعه هیچ جا چگال (nowhere dense) گوییم.
در واقع قضیه کتگوری بئر بیان می‌کند که فضای متریک تام را به صورت اجتماع شمارا مجموعه هیچ جا چگال نمی‌توان نوشت.
اگر مجموعه $E \subseteq X$ را به صورت اجتماع شمارا تا مجموعه هیچ جا چگال بنویسیم آن را کتگوری اول می‌نامیم.
مجموعه $E \subseteq X$ را generic گوییم هرگاه مکمل آن (E^c) کتگوری اول باشد. (این خاصیت قوی‌تر از چگال بودن آن است)

قضیه: مجموعه توابع پیوسته در $C[0,1]$ که هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیستند، generic هستند.

ایده اثبات - E_N را مجموعه همه توابع پیوسته بگیرید که به ازای هر کدام نقطه $x^* \in [0,1]$ وجود دارد که

$$|f(x)-f(x^*)| \leqslant N\,|x-x^*| \qquad \forall x \in [0,1]$$

در واقع اعضای $\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} E_N\right)^c$ توابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر هستند. برای اثبات قضیه کافیست نشان دهیم:

(1) E_N ها بسته هستند.

(2) درون E_N تهی است.

تمرین - اثبات در خاصیت فوق.

اصل کران داری یکنواخت:

اگر B یک فضای برداری باناخ باشد و $\mathcal{L}$ خانواده‌ای از تابعک‌های خطی پیوسته که

به ازای هر $u \in B$

$$\sup_{l \in \mathcal{L}} |l(u)| < \infty$$

آنگاه

$$\sup_{l \in \mathcal{L}} \|l\|_{B'} < \infty .$$

نکته ـ اگر $\sup_{l \in \mathcal{L}} \|l\|_{B'} = M$ آنگاه به ازای هر u داریم $|l(u)| \le M \|u\|_B$. به وضوح عکس قضیه فوق درست است.

اثبات ـ $E_M = \{ u \in B : \sup_{l \in \mathcal{L}} |l(u)| \le M \}$ در نتیجه $B = \bigcup_{M=1}^{\infty} E_M$

مجموعه E_M بسته است زیرا $E_M = \bigcap_{l \in \mathcal{L}} E_{M,l}$ که $E_{M,l} = \{ u \in B : |l(u)| \le M \}$ در B بسته است.

بنا بر قضیه کتگوری بئر درون یکی از E_M ها ناتهی است. فرض کنید $B_r(x_0) \subseteq E_M$.

$$\Rightarrow \forall \|x\| \le 1 \qquad x_0 + rx \in E_M$$

$$|\ell(x_0 + rx)| \le M \qquad \forall \ell \in \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \quad |\ell(x)| \le \frac{M + |\ell(x_0)|}{r}$$

بنا بر فرض قضیه $\sup_{\ell \in \mathcal{L}} |\ell(x_0)| < \infty$ در نتیجه $|\ell(x)| \le C$ به ازای هر $\ell \in \mathcal{L}$ و هر $\|x\| \le 1$

یعنی $\|\ell\|_{B'} = \sup_{\|x\| \le 1} |\ell(x)| \le C$

تذکر- در فرض اصل کران داری یکنواخت می‌توان به جای هر $x \in B$ فرض کرد که x از یک مجموعه ای می‌آید که کتگوری اول نیست. یعنی فرض

$$\sup_{l \in L} |l(x)| < \infty$$

به ازای $x \in A$ درست باشد که A کتگوری اول نیست.

(دقت کنید در اثبات اصل کران داری یکنواخت $\bigcup_{M=1}^{\infty} E_M$ حداقل شامل A خواهند شد.)

کاربردِ اصل کران داری یکنواخت: توابع پیوسته $C[-\pi,\pi]$ که سری فوریه آن در یک مجموعه چگال در $[-\pi,\pi]$ واگراست generic هستند.

اگر $f \in C[-\pi,\pi]$ متناظر آن سری فوریه $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ نسبت داده می‌شود

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

می‌دانیم سری فوریه در $L^2(-\pi,\pi)$ به تابع f همگراست. یعنی

$$S_N(x) = \sum_{|n|\leq N} a_n e^{inx} \xrightarrow{L^2} f$$

اگر تابع تناوبی f در همه نقاط مشتق‌پذیر باشد آنگاه سری فوریه به طور نقطه‌ای در هر نقطه x همگرا به $f(x)$ است یعنی

$$S_N(x) = \sum_{|n|\leq N} a_n e^{inx} \longrightarrow f(x) \qquad \forall\, x \in [-\pi,\pi]$$

ابتدا نشان می‌دهیم به ازای هر نقطه $x_0\in[-\pi,\pi]$ تابع پیوسته f وجود دارد که $\{S_N(x_0)\}_{N=1}^{\infty}$ واگرا است.

کافیست این مطلب را برای $x_0=0$ نشان دهیم.

$$S_N(x)=\sum_{|n|\le N}a_n e^{inx}=\sum_{|n|\le N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iny}\,dy\right)e^{inx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,D_N(x-y)\,dy$$

که

$$D_N(x)=\sum_{|n|\le N}e^{inx}=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

تابعک خطی پیوسته l_N روی $C[-\pi,\pi]$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$l_N(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,D_N(-y)\,dy=S_N(0)$$

اگر به ازای هر تابع پیوسته f، $\{S_N(0)\}$ همگرا باشد، آنگاه

$$(1) \qquad \sup_{1\leq N<\infty} |\ell_N(f)| < \infty$$

و بنابر اصل کران داری یکنواخت باید $\sup_N \|\ell_N\| < \infty$. بنابراین کافیست گزاره‌های زیر را اثبات کنیم :

(۱) ℓ_N تابعک خطی پیوسته روی $C[-\pi,\pi]$ است .

(۲) $$\|\ell_N\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|\, dy$$

(۳) $\|\ell_N\| \longrightarrow \infty$ وقتی $N\to\infty$.

برای اثبات (۱) و (۲) دقت کنید که D_N یک تابع پیوسته در $[-\pi,\pi]$ است و درنتیجه متعلق به $L^1[-\pi,\pi]$ است .

برای (3) دقت کنید که

$$4\pi \|\ell_N\| = \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin (N+1/2)x}{\sin x/2} \right| dx$$

$$\geq \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin (N+1/2)x}{x/2} \right| dx = \int_0^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin y|}{y/2}\, dy$$

$$\geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin y|}{y/2}\, dy \geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin y|\, dy$$

$$= c \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \longrightarrow \infty$$

نکته - برای اینکه اصل کران‌داری یکنواخت به تناقض منجر نشود، رابطه (1) نهایتاً برای یک مجموعه از کتگوری نوع اول می‌تواند محقق شود. یعنی خانواده همه توابع پیوسته‌ای که سری فوریه در $x_0=0$ واگرا است یک مجموعه generic است.

قضیه: اگر $\{x_1, x_2, \dots\}$ یک دنباله چگال در $[-\pi,\pi]$ باشد، خانواده توابع پیوسته در $C[-\pi,\pi]$ که سری فوریه آنها در نقاط $\{x_1, x_2, \dots\}$ واگراست، generic هست.

اثبات- بنابر نکته صفحه قبل به ازای هر x_i خانواده توابع پیوسته که سری فوریه آنها در نقطه x_i واگراست generic است و اشتراک این خانواده‌ها یک مجموعه generic خواهد بود (چرا؟) که در همه نقاط $\{x_1, x_2, \dots\}$ سری فوریه آنها واگراست.

آنالیز حقیقی

جلسه بیست و هشت ۹۷/۱۰/۴

قضیه نگاشت باز

X و Y دو فضای باناخ و $T: X \longrightarrow Y$ عملگر خطی

T پیوسته است اگر و تنها اگر ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد که $\|Tx\|_Y \leq c\,\|x\|_X$

به ازای هر $x \in X$.

از طرفی T پیوسته است هرگاه به ازای هر باز U در Y، $T^{-1}(U)$ در X باشد و به طور معادل

$T^{-1}(B_Y(0,1))$ در X باز باشد.

اگر T یک نگاشت یک به یک و پوشا باشد، $T^{-1}: Y \to X$ یک عملگر خطی است. درصورتی T^{-1} پیوسته است

که به ازای هر U در X، $T(U) = (T^{-1})^{-1}(U)$ در Y باز باشد. چنین نگاشتی را نگاشت باز

می‌نامیم.

قضیه (نگاشت باز) اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و $T: X \to Y$ عملگر خطی پیوسته. اگر T پوشا باشد، آنگاه یک نگاشت باز است.

نتیجه: اگر X و Y باناخ باشند و $T: X \to Y$ خطی، پیوسته، یک به یک و پوشا، آنگاه $T^{-1}: Y \to X$ پیوسته است و در واقع ثابت‌های $c_1, c_2 > 0$ وجود دارند که

$$c_2 \|Tx\|_Y \le \|x\|_X \le c_1 \|Tx\|_Y$$

پیوستگی T پیوستگی T^{-1}

اثبات- اگر U باز دلخواه در X باشد و $x_0 \in U$ گوی $B_X(x_0, \varepsilon)$ وجود دارد که $B_X(x_0, \varepsilon) \subseteq U$.

برای اینکه $T(U)$ در Y باز باشد باید نشان دهیم گوی $B_Y(y_0, r)$ (گوی به شعاع r به مرکز y_0 در Y)

وجود دارد و $y_0 = Tx_0$ و $B_Y(y_0, r) \subseteq T(B_X(x_0, \varepsilon))$ (1)

در واقع کافیست نشان دهیم به ازای هر ε و x_0 مقدار r وجود دارد که (۱) برقرار باشد.

به دلیل خطی بودن T، کافیست این مطلب برای $\varepsilon = 1$ و $x_0 = 0$ ثابت شود.

$$T(B_X(x_0,\varepsilon)) = Tx_0 + \varepsilon T(B_X(0,1))$$

اثبات را در دو گام ارائه می‌کنیم:

گام اول: مقدار $0<r$ وجود دارد که $B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$

گام دوم: $B_Y(0,r/2) \subseteq T(B_X(0,1))$

اثبات گام اول: چون T پوشا است:

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_X(0,n))}$$

بنابر قضیه کتگوری بئر درون یکی از مجموعه‌های فوق ناتهی است و چون $T(B_X(0,n)) = nT(B_X(0,1))$

پس درون $\overline{T(B_X(0,1))}$ ناتهی است. در نتیجه $y_0 \in Y$ و $0 < r$ وجود دارد که

$$B_Y(y_0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$$

$$y \in B_Y(0,r) \implies y_0+y \,,\, y_0-y \in B_Y(y_0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$$

چون T خطی است و $\overline{T(B_X(0,1))}$ نسبت به مبدأ متقارن است (یعنی اگر $z\in\overline{T(B_X(0,1))}$ آنگاه $-z$ نیز در آن قرار دارد) پس

$$y+y_0 \,,\, y-y_0 \in \overline{T(B_X(0,1))}$$

به علاوه چون $B_X(0,1)$ در X محدب است، $\overline{T(B_X(0,1))}$ در Y محدب است و درنتیجه

$$y = \frac{(y+y_0)+(y-y_0)}{2} \in \overline{T(B_X(0,1))}$$

$$\implies B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$$

اثبات گام دوم :

$$y \in B_Y(0, r/2) \Rightarrow 2y \in B(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$$

$$\exists\, x_1 \in B_X(0,1) \quad , \quad \| 2y - Tx_1 \|_Y < r/2 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \| y - \tfrac{1}{2} Tx_1 \|_Y < r/4$$

$$(2) \Rightarrow \quad 4y - 2Tx_1 \in B(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$$

$$\Rightarrow \exists x_2 \in B_X(0,1) \;, \quad \| 4y - 2Tx_1 - Tx_2 \|_Y < r/2$$

$$\Rightarrow \quad \| y - \tfrac{1}{2} Tx_1 - \tfrac{1}{4} Tx_2 \|_Y < r/8$$

به طور مشابه دنباله $\{x_n\}$ در $B_X(0,1)$ وجود دارد که

$$\| y - T(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \cdots + \tfrac{1}{2^n}x_n) \|_Y < \frac{r}{2^{n+1}} \qquad (3)$$

قرار دهید: $\quad z_n = \frac{1}{2}x_1 + \cdots + \frac{1}{2^n}x_n$

$$\|z_n\|_X \leq \frac{1}{2}\|x_1\|_X + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \leq \frac{\|x_1\|_X + 1}{2}$$

از طرفی $\{z_n\}$ کوشی است و اگر $z_n \to z^*$ باید $\|z^*\| \leq \frac{\|x_1\|_X + 1}{2} < 1$ و $z^* \in B_X(0,1)$

و اگر از رابطه (3) حد بگیریم با توجه به پیوستگی T خواهیم داشت

$$\|y - Tz^*\|_Y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y \in T(B_X(0,1))$$

مثال- $X = C[0,1]$ با نرم سوپریمم یک فضای باناخ است. $Y = C[0,1]$ با نرم $\|\cdot\|_1$.

(یعنی $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$) نقاط خطی

یک به یک و پوشا است. $\begin{cases} T : X \longrightarrow Y \\ T(f) = f \end{cases}$

T پیوسته است ولی T^{-1} پیوسته نیست. (تمرین)

کاربرد قضیه نگاشت باز:

اگر $f \in L^1[-\pi,\pi]$ آنگاه، سری فوریه آن به صورت $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ که $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

به علاوه

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|\, dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$$

در ضمن بنابر لم ریمان-لبگ داریم

$$\lim_{|n|\to\infty} |a_n| = 0 \qquad (4)$$

سؤال: آیا هر دنباله با خاصیت (4) می‌تواند ضرایب فوریه یک تابع L^1 باشد؟

Y را فضای برداری همه دنباله‌های $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ همگرا به صفر بگیرید و $\|\{a_n\}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Y با این نرم یک فضای باناخ است. تبدیل فوریه تابع $f \in L^1$ را به دنباله‌ای در Y تصویر می‌کند:

$$T: L^1 \longrightarrow Y$$

$$T(f) = \{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

نگاشت T پیوسته است زیرا

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$$

$$\Rightarrow \|\underbrace{\{a_n\}}_{Tf}\|_\infty \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$$

از طرفی T یک به یک است زیرا اگر $Tf=0$ آنگاه $a_n=0$ و $f=0$ در L^1. (به اثبات جداگانه‌ای احتیاج است)

اگر قرار باشد همه اعضای Y ضرایب فوریه یک تابع L^1 باشند، پس T پوشا است و بنابر قضیه نگاشت باز T^{-1} پیوسته است.

یعنی ثابت $c>0$ وجود دارد که

$$\|f\|_1 \le c\,\|\{a_n\}\|_\infty$$

اگر $D_N(x)=\sum_{|n|\le N} e^{inx}$ آنگاه $\|TD_N\|_Y = 1$ ولی در جلسه قبل دیدیم که

$$\infty \longleftarrow \|D_N\|_{L^1} \ge c\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n+1}.$$

در نتیجه T نمی‌تواند پوشا باشد.

قضیه گراف بسته:

اگر $T: X \longrightarrow Y$ گراف T به صورت $G_T = \{ (x,y) \in X \times Y \;:\; y = Tx \}$

تعریف می‌شود. هرگاه T خطی باشد، G_T زیرفضای $X \times Y$ است.

اگر X و Y نرم‌دار باشند، نرم فضای حاصلضرب را به صورت $\|(x,y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$

درنظر می‌گیریم. اگر T یک نگاشت پیوسته باشد، G_T در $X \times Y$ با نرم بالا بسته است.

زیرا اگر $(x_i, y_i) \in G_T$ و $(x_i, y_i) \longrightarrow (x_*, y_*)$ در $X \times Y$ پس

$x_i \longrightarrow x_*$ در X و $y_i \longrightarrow y_*$ در Y. به علت پیوستگی T،

$Tx_i \longrightarrow Tx_*$ در Y. چون $y_i = Tx_i$ پس $Tx_* = y_*$ یعنی $(x_*, y_*) \in G_T$

قضیه (گراف بسته): اگر X و Y باناخ باشند و $T: X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی که گراف آن در $X \times Y$ بسته است.

آنگاه T پیوسته است.

نکته: پیوستگی T یعنی اگر $x_i \xrightarrow{X} x_*$ آنگاه $Tx_i \xrightarrow{Y} Tx_*$.

بسته بودن گراف T یعنی اگر $(x_i, Tx_i) \longrightarrow (x_*, y_*)$ آنگاه $y_* = Tx_*$.

برای بررسی بسته بودن گراف T با شرطهای $x_i \xrightarrow{X} x_*$ و $Tx_i \xrightarrow{Y} y_*$ باید نشان دهیم $Tx_* = y_*$.

درصورتی‌که در تعریف مستقیم پیوستگی T فرض همگرایی $\{Tx_i\}$ درنظر گرفته نمی‌شود.

اثبات - G_T زیرفضای بسته $X \times Y$ است. درنتیجه G_T را به عنوان یک فضای برداری باناخ می‌توان درنظر گرفت.

نگاشت تصویر
$$\begin{cases} P_X : G_T \longrightarrow X \\ P_X(x, Tx) = x \end{cases}$$
یک عملگر خطی پیوسته و یک به یک و پوشا است.

دلیل پیوستگی:
$$\|P_X(x, Tx)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X\times Y}$$

بنابر قضیه نگاشت باز $P_X^{-1} : X \longrightarrow G_T$ پیوسته است. $P_X^{-1}(x) = (x, Tx)$.

از لوفی نگاشت تصویر $\begin{cases} P_Y : X\times Y \longrightarrow Y \\ P_Y(x,y)=y \end{cases}$ نیز پیوسته است. از رابطه $T = P_Y \circ P_X^{-1}$

پیوستگی T نتیجه می‌شود.

کاربرد قضیه گراف بسته:

قضیه: $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای اندازه متناهی است یعنی $\mu(X)<\infty$. به علاوه فرض کنید

(1) E یک زیرفضای بسته $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ برای یک $1\leq p<\infty$.

(2) $E \subseteq \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

آنگاه بعد زیرفضای E متناهی است.

اثبات - $I: E \longrightarrow L^\infty(X,\mu)$ با ضابطه $I(f)=f$. (E با نرم $\|\cdot\|_p$ در نظر گرفته شده است)

بنابر قضیه گراف بسته I، پیوسته است . زیرا اگر $f_n \xrightarrow{L^p} f$ و $f_n \xrightarrow{L^\infty} g$ آنگاه $f\in E$

(زیرا E در L^p بسته است) و

$$\int_X |f-g|^p\, d\mu = \lim \int_X |f_n-g|^p \le \mu(X)\, \|f_n-g\|_\infty^p \to 0$$

بنابراین $f=g$ ت . هـ . و در نتیجه گراف I بسته است.

چون I پیوسته است ثابت $C>0$ وجود دارد که $\color{red}{(5)}$ $\|f\|_\infty \le C\,\|f\|_p$ برای هر $f\in E$.

ادعا: ثابت A وجود دارد که $\|f\|_\infty \le A\,\|f\|_2$.

اثبات ادعا: اگر $1\le p\le 2$ بنابر نامساوی هولدر

$$\int |f|^p \le \left(\int |f|^2\right)^{p/2} \left(\int 1\right)^{\frac{2-p}{2}}$$

$$(5) \Rightarrow \quad \|f\|_\infty^p \le C^p \|f\|_p^p \le B\, \|f\|_2^p$$

اگر $2<p<\infty$ ، آنگاه

$$(5) \Rightarrow \|f\|_\infty^p \le C^p \|f\|_p^p = C^p \int_X |f|^p \le C^p \|f\|_\infty^{p-2} \int_X |f|^2$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty^2 \le C^p\, \|f\|_2^2$$

برگردیم به اثبات قضیه. مجموعه $\mathbb{B} = \{z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\le 1\}$ را در نظر بگیرید و

توابع $f_1, f_2, \dots, f_n$ در E را انتخاب کنید که در L^2 متعامد یکه باشند. (چون $E\subseteq L^\infty$ پس $E\subseteq L^2$)

و تعریف کنید

$$g_z(x) := \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x)$$

$$\|g_z\|_2 = \sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \le 1$$

بنابر ادعا برای هر $z\in\mathbb{B}$،

$$\|g_z\|_\infty \le A$$

در نتیجه $|g_z(x)|\le A$ به ازای ت.ه x در X. بنابراین با حذف یک مجموعه اندازه صفر در X

می‌توان فرض کرد که $X\supseteq X'$ وجود دارد به طوری که $\mu(X-X')=0$ و

$|g_z(x)|\le A$ به ازای هر $x\in X'$ و z در یک زیرمجموعه چگال در $\mathbb{B}$ است.

اگر از رابطه بالا نسبت به z حد بگیریم نامساوی فوق به ازای هر $z\in\mathbb{B}$ برقرار است.

ادعا: $\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \leq A^2$ به ازای هر $x \in X'$. (6)

اگر برای $x \in X'$ دلخواه $0 \neq \sigma = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \right)^{1/2}$ قرار دهید $z_i = \frac{\overline{f_i(x)}}{\sigma}$ در این صورت

$$g_z(x) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \leq A$$

حال اگر از رابطه (6) انتگرال بگیریم با توجه به اینکه $\{f_i\}$ ها در فضای $\mathcal{L}^2$ متعامد یکه هستند، نتیجه می‌شود

$$n \leq A^2 \mu(X)$$

یعنی تعداد اعضای متعامد یکه در E یک کران بالا دارند. در نتیجه بعد E حداکثر $A^2\mu(X)$ است.