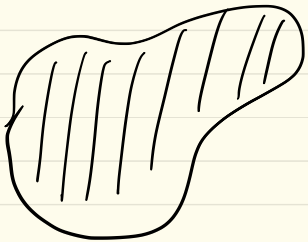
آنالیز حقیقی

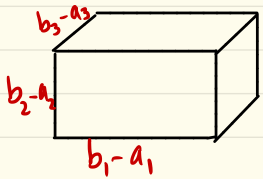
جلسه یک ۹۷/۶/۲۵

نظریه اندازه:



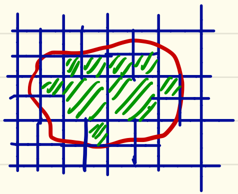
مکعب مستطیل

$$R=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$$
$$=\{(x_1,\dots,x_n) : a_i<x_i<b_i\}$$



$$\mathrm{vol}(R):=(b_3-a_3)\times(b_2-a_2)\times(b_1-a_1)$$

ایده پیدا کردن حجم یک شکل دلخواه در R^n: به وسیله مکعب‌های مختلف این ناحیه را فرش کنیم.



ایراد: نحوه فرش کردن یکتا نیست و لزوماً به یک عدد یکتا و خوش تعریف برای حجم نمی‌رسیم.

این ایده در بعد یک کار می‌کند :

<u>گزاره ۱</u> : هر مجموعه باز O در $\mathbb{R}$ را می‌توان به صورت منحصر به فرد به صورت اجتماع شمارا تا بازه باز مجزا از هم نوشت :

$$O = \bigcup_{i \in A} I_i \qquad I_i \cap I_j = \phi \quad \text{for} \quad i \neq j$$

اثبات : به ازای هر نقطه $x \in O$ بزرگترین بازه‌ای که شامل x است و در داخل O قرار می‌گیرد را I_x بنامید.

$$I_x \cap I_y \neq \phi \implies I_x = I_y$$

به وضوح $O = \bigcup I_x$ و تعداد این بازه شمارا است (چرا؟)

<u>نکته</u> : به کمک این گزاره می‌توانیم اندازه زیرمجموعه باز O در $\mathbb{R}$ را برابر $\sum_{i \in A} |I_i|$ تعریف کرد.

دو مکعب مستطیل را تقریباً از هم جدا در نظر می‌گیریم هرگاه نقاط درونی آنها اشتراک نداشته باشند.

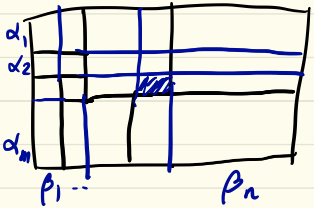
گزاره ۲: اگر یک مکعب مستطیل به صورت اجتماع متناهی مکعب مستطیل تقریباً از هم جدا نوشته شده باشد،

$$R = \bigcup_{k=1}^{N} R_k \qquad \operatorname{int}(R_i) \cap \operatorname{int}(R_j) = \emptyset$$

آنگاه

$$|R| = \sum_{k=1}^{N} |R_k|$$

ایده اثبات:



$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m)(\beta_1 + \cdots + \beta_m) = \sum \alpha_i \beta_j$$

گزاره ۳: اگر $R, R_1, \dots, R_N$ مکعب مستطیل‌هایی در $\mathbb{R}^n$ باشند که

$$R \subset \bigcup_{i=1}^{N} R_i$$

آنگاه

$$|R| \leq \sum_{i=1}^{N} |R_i|$$

گزاره ۴: هر زیرمجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت اجتماع شمارا تا مکعب تقریباً از هم جدا نوشت.

ایده اثبات: ابتدا مکعبهای به ضلع یک که داخل این مجموعه هستند را در نظر می‌گیریم. در گام بعدی مکعب‌های به ضلع $\frac{1}{2}$ را که به طور کامل در داخل این مجموعه باز قرار گرفته‌اند را انتخاب می‌کنیم و به همین ترتیب در هر گام ضلع مکعبها را نصف می‌کنیم ...

اندازه خارجی: برای زیرمجموعه دلخواه E در $\mathbb{R}^n$، تمام پوشش‌های مختلف E توسط مکعبها را در نظر می‌گیریم و

$$E \text{ اندازه خارجی} = m_*(E) := \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

که این اینفیمم روی همه حالتهای ممکن برای پوشش E توسط مکعبها است، $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$

تذکر: در تعریف اندازه خارجی فرض نمی‌کنیم که مکعب‌ها تو در تو یا از هم جدا باشند. (چرا؟)

- اگر به جای پوشش مکعب، اینفیمم را روی پوشش‌های مکعب مستطیل بگیریم، مقدار به دست آمده با $m_*(E)$ برابر است.
(تمرین ۱۵ کتاب)

- در تعریف می‌توان مکعب، پوشش‌ها را به وسیله گوی‌های باز در نظر گرفت. (اثبات: تعداد محاسبه اندازه گوی)

مثال: اندازه خارجی مکعب Q،

یک پوشش برای Q خود مکعب Q است.

$$m_*(Q) = \inf \sum |Q_i| \leq |Q|$$

برای اینکه نشان دهیم $|Q| \leq m_*(Q)$ فرض کنید $Q \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ به جای هر Q_i مکعب $\tilde{Q}_i$

در نظر بگیرید که $Q_i \subset int(\tilde{Q}_i)$ و $|\tilde{Q}_i| \leq (1+\varepsilon)|Q_i|$. در نتیجه $\bigcup int(\tilde{Q}_i)$ یک پوشش باز برای

مجموعه فشرده Q است و می‌توان تعداد متناهی تا از آن‌ها را به عنوان پوشش Q انتخاب کرد. بنابر گزاره ۳

$$|Q| \le \sum_{i \in \text{زیرپوشش متناهی}} |\tilde{Q}_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} (1+\varepsilon)|Q_i|$$

اگر روی همه پوشش‌های Q اینفیمم بگیریم داریم

$$|Q| \le (1+\varepsilon)\, m_*(Q)$$

و چون ε دلخواه است بنابراین

$$|Q| \le m_*(Q)$$

مثال: $|Q| = m_*(\text{int}(Q))$.

$$\text{int}(Q) \subseteq Q \implies m_*(\text{int}(Q)) \leq m_*(Q)$$

از طرف دیگر مکعب Q_0 را در $\text{int}(Q)$ در نظر بگیرید آنگاه

$$|Q_0| = m_*(Q_0) \leq m_*(\text{int}(Q))$$

و چون Q_0 دلخواه است می‌تواند حجم آن به اندازه کافی نزدیک $|Q|$ شود. در نتیجه

$$|Q| \leq m_*(\text{int}(Q))$$

مثال: $m_*(\{x\}) = 0$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$.

مثال: $m_*(R) = |R|$ که R یک مکعب مستطیل است.

با توجه به محاسبه اندازه خارجی مکعب Q در مثال قبل، داریم

$$|R| \le m_*(R)$$

اکنون مکعب مستطیل R_0 را در نظر بگیرید به طوری که $R \subseteq R_0$ و طول اضلاع R_0 عدد گویا باشد.

اکنون R_0 را می‌توان با تعداد متناهی مکعب $Q_1, \dots, Q_N$ تقریباً از هم جدا پوشاند. از طرفی $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$

$$m_*(R) \le \sum_{i=1}^{N} |Q_i| = |R_0|$$

چون R_0 دلخواه است و می‌توان حجم R_0 را به اندازه کافی نزدیک R انتخاب کرد نتیجه می‌شود:

$$m_*(R) \le |R|$$

مثال: $m_*(\mathbb{R}^n) = \infty$.

آنالیز حقیقی

جلسه دو ۹۷/۶/۲۷

اندازه خارجی :

$$m_*(E) := \inf_{E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i} \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i|$$

$$\forall \varepsilon \quad \exists \{Q_i\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{s.t.} \quad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| < m_*(E) + \varepsilon$$

خواص اندازه خارجی :

(۱) یکنوایی : $E_1 \subset E_2 \implies m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$

(۲) زیرجمعی : $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \implies m_*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_*(E_i)$

$$\exists \{Q_{ik}\}_{k=1}^{\infty}, \quad E_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{ik}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{ik}| < m_*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\Rightarrow E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i,k} Q_{ik} \Longrightarrow m_*(E) \leq \sum_{i,k} |Q_{ik}|$$

$$< \left(\sum_i m_*(E_i)\right) + \varepsilon$$

مثال : Q اعداد گویا $\Leftarrow m_*(Q)=0$

(۳) $m_*(E) = \inf_{E \subseteq O} m_*(O)$

O باز

یکنوا $\Longrightarrow m_*(E) \leq m_*(O)$

$$\Longrightarrow m_*(E) \leq \inf_{E \subseteq O} m_*(O)$$

کافیست نشان دهیم برای هر $\varepsilon > 0$ یک باز O وجود دارد که $E \subseteq O$

$$m_*(O) \leq m_*(E) + \varepsilon$$

بنابر تعریف اندازه خارجی پوشش $\{Q_i\}$ وجود دارد که $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| \leq m_*(E) + \varepsilon/2$$

اکنون مکعب باز $\tilde{Q}_i$ را در نظر بگیرید به طوریکه $Q_i \subseteq \tilde{Q}_i$ و $|\tilde{Q}_i| \leq |Q_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$

قرار دهید $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{Q}_i$.

$$m_*(O) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{Q}_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i|\right) + \varepsilon/2 \leq m_*(E) + \varepsilon$$

خاصیت زیرجمعی

(۴) اگر $E = E_1 \cup E_2$ و $dist(E_1, E_2) > 0$ آنگاه $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$

بنابر خاصیت زیرجمعی می‌دانیم که $m_*(E) \le m_*(E_1) + m_*(E_2)$.

برعکس: فرض کنید $\{Q_i\}$ یک پوشش برای E باشد که $\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| \le m_*(E) + \varepsilon$

درضمن می‌توان فرض کرد که قطر همه مکعبهای Q_i از $\delta = dist(E_1, E_2)$ کوچکتر است.

$I_1 =$ همه اندیسهایی که Q_i با E_1 تلاقی دارد.

$I_2 =$ همه اندیسهایی که Q_i با E_2 اشتراک دارد

به علت اینکه قطر مکعبها به اندازه کافی کوچک است هیچ اندیسی در هر دو مجموعه I_1 و I_2 ظاهر نمی‌شود. درنتیجه

$$\sum_{i\in I_1}|Q_i| + \sum_{i\in I_2}|Q_i| \le \sum_{i=1}^{\infty}|Q_i|$$

$$\le m_*(E)+\varepsilon$$

از طرفی

$$E_1 \cup E_2 = E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$$

$$\Rightarrow E_1 \subseteq \bigcup_{i\in I_1} Q_i \Rightarrow m_*(E_1) \le \sum_{i\in I_1}|Q_i|$$

بنابر تعریف اندازه خارجی

به طور مشابه

$$m_*(E_2) \le \sum_{i\in I_2}|Q_i|$$

و در نتیجه

$$m_*(E_1)+m_*(E_2) \le m_*(E)$$

(۵) اگر Q_i ها مکعب‌های تقریباً ازهم جدا باشند و $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ آن‌گاه

$$m_*(E)=\sum_{i=1}^{\infty}|Q_i|$$

بنابر خاصیت زیرجمعی بودن اندازه خارجی داریم: $m_*(E)\le\sum_{i=1}^{\infty}|Q_i|$

برعکس برای هر مکعب Q_i، $\tilde{Q}_i$ را درنظر بگیرید به طوری که $\tilde{Q}_i\subseteq Q_i$ و $|Q_i|\le|\tilde{Q}_i|+\frac{\varepsilon}{2^i}$

بنابر خاصیت (۴)

$$m_*\left(\bigcup_{i=1}^{N}\tilde{Q}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}|\tilde{Q}_i|$$

(نکته: خاصیت (۴) را می‌توان به تعداد متناهی مجموعه که دوبه‌دو ازهم فاصله مثبت دارند تعمیم داد (تمرین))

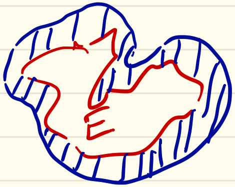
از طرفی $\bigcup_{i=1}^{N}\tilde{Q}_i\subseteq E$ و $m_*\left(\bigcup_{i=1}^{N}\tilde{Q}_i\right)\le m_*(E)$ $\Leftarrow$

$$\sum_{i=1}^{N}|Q_i|-\varepsilon\le\sum_{i=1}^{N}|\tilde{Q}_i|\le m_*(E)$$

تعریف: زیرمجموعه E از $\mathbb{R}^n$ را اندازه‌پذیر (اندازه‌پذیر به معنای لبگ) گوییم هرگاه

برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه باز O وجود داشته باشد که $E \subset O$ و

$$m_*(O - E) \leq \varepsilon$$



اگر E مجموعه اندازه‌پذیر باشد، اندازه (اندازه لبگ) آن را برابر

$$m(E) = m_*(E)$$

تعریف می‌کنیم.

نکته: واضح است که

$$m_*(O) \leq m_*(E) + m_*(O-E) \leq m_*(E) + \varepsilon$$

که O مجموعه بازی که در تعریفِ صفحه قبل آمده است.

دقت کنید به ازای هر مجموعه دلخواه E، باز O وجود دارد که نامساوی بالا برقرار باشد (خاصیت ۳ اندازه خارجی)

و نامساوی $m_*(O-E) \leq \varepsilon$ تنها برای مجموعه‌ای E برقرار است که آنها را اندازه‌پذیر می‌گوییم.

آنالیز حقیقی

جلسه ۳ ۹۷/۷/۱

خواص مجموعه‌های اندازه‌پذیر:

① هر مجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ اندازه‌پذیر است.

(از تعریف مجموعه‌های اندازه‌پذیر واضح است)

② اگر $m_*(E)=0$ برای یک زیرمجموعه $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ، آنگاه E اندازه‌پذیر است.

$$m_*(E) = \inf_{\substack{E\subseteq O \\ \text{باز } O}} m_*(O)$$ از تعریف اندازه خارجی

$$\Rightarrow \exists\, O \quad \text{s.th.} \quad m_*(O) \leq m_*(E)+\varepsilon = \varepsilon$$

$$O-E \subseteq O \Rightarrow m_*(O-E) \leq \varepsilon$$

۳) اجتماع شمارا تا مجموعه اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است. یعنی اگر E_1، E_2، ... اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ نیز اندازه‌پذیر است.

$\forall \varepsilon \quad \exists$ باز O_i s.th. $E_i \subseteq O_i \ , \quad m_*(O_i - E_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$

$$O=\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \implies O-E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (O_i - E_i)$$

$$\implies m_*(O-E) \leq \sum m_*(O_i - E_i) \leq \sum_i \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

۴) مجموعه‌ی بسته، اندازه‌پذیر هستند.

اگر E بسته باشد، باز O را باید پیدا کنیم که $m_*(O-E)\leq \varepsilon$ از طرفی بنابر تعریف اندازه خارجی باز O وجود دارد که $O \supseteq E$ و

$$m_*(O) \leq m_*(E)+\varepsilon$$

چون O باز است و E بسته در نتیجه $O-E$ باز است و مکعب‌های تقریباً از هم جدا Q_1، Q_2، ... وجود دارند که

$$O-E=\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$$

قرار دهید $K=\bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ که یک مجموعه فشرده است و $E\cap K=\emptyset$. در نتیجه $dist(E,K)>0$

(لم ـ اگر K فشرده و E بسته باشند که $E\cap K=\emptyset$. آنگاه $dist(E,K)>0$.)

بنابر خاصیت شماره ۴ اندازه خارجی $m_*(E\cup K)=m_*(E)+m_*(K)$

$$E\cup K\subset O \Longrightarrow m_*(E\cup K)\leq m_*(O)\leq m_*(E)+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad m_*(K) \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad m_*\left(\bigcup_{i=1}^{N} Q_i\right) \leq \varepsilon$$

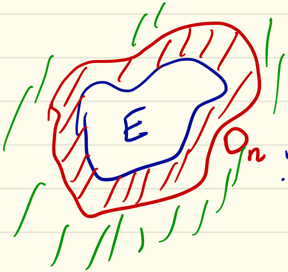
$$\parallel$$

بنابر خاصیت ⑤ اندازه خارجی $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_*(Q_i) \leq \varepsilon$

چون N دلخواه انتخاب شده است در نتیجه

$$\underbrace{m_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right)}_{O-E} = \sum_{i=1}^{\infty} m_*(Q_i) \leq \varepsilon$$

⑤ مکمل هر مجموعه اندازه پذیری، اندازه پذیر است. یعنی اگر E اندازه پذیر باشد $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ اندازه پذیر است.



اندازه پذیر است $E \Longrightarrow \exists\, O_n$ باز $\text{s.th. } E \subset O_n,\ m_*(O_n - E) < \frac{1}{n}$

O_n^c بسته است و در نتیجه اندازه پذیر است. بنابر ③ مجموعه $S = \bigcup_{n=1} O_n^c$ اندازه پذیر است.

از طرفی $O_n^c \subseteq E^c \Longrightarrow S \subseteq E^c$

$$E^c - S \subseteq E^c - O_n^c = O_n - E$$

$$\Rightarrow \quad m_*(E^c - S) \leq m_*(O_n - E) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad m_*(E^c - S) = 0$$

$\Rightarrow$ $E^c - S$ اندازه‌پذیر است.

$E^c = \underbrace{S}_{\text{اندازه‌پذیر}} \cup \underbrace{(E^c - S)}_{\text{اندازه‌پذیر}}$ $\Rightarrow$ E^c اندازه‌پذیر است.

۶) اگر E اندازه‌پذیر باشد، مجموعه بسته F وجود دارد که $F \subseteq E$ و $m_*(E-F)<\varepsilon$.

E اندازه‌پذیر است $\Leftarrow$ E^c اندازه‌پذیر است $\Leftarrow$ باز O وجود دارد که $E^c \subseteq O$ و

$$m_*(O-E^c)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow F=O^c \ , \ E-F=O-E^c$$

$$m_*(E-F)<\varepsilon$$

۷) اگر $\{E_i\}$ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $E=\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ اندازه‌پذیر است.

E_i^c اندازه‌پذیر است و بنابر خاصیت ۳ $\quad E^c=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c$ اندازه‌پذیر است.

۸) اگر $E_1, E_2, \ldots$ مجموعه اندازه‌پذیر دوبدو جدا از هم باشند، آنگاه اگر $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ داریم

$$m(E)=\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

ابتدا فرض کنیم E_i ها کران‌دار هستند و به ازای هر E_i مجموعه بسته F_i را انتخاب می‌کنیم که

$$F_i \subset E_i, \qquad m(E_i - F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\Rightarrow m(E_i) \le m(E_i - F_i) + m(F_i) \Rightarrow m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i} \le m(F_i)$$

چون E_i ها کران‌دار هستند درنتیجه F_i ها فشرده هستند و از طرفی $F_i \cap F_j \subseteq E_i \cap E_j = \emptyset$ درنتیجه فاصله دوبدو F_i ها مثبت است. بنابراین

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{N} F_i\right) = \sum_{i=1}^{N} m(F_i)$$

$$E \supseteq \bigcup_{i=1}^{N} F_i \Rightarrow m(E) \ge \sum_{i=1}^{N} m(F_i) \ge \sum_{i=1}^{N} m(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\Rightarrow \quad m(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) - \varepsilon$$

چون ε دلخواه است نتیجه می‌شود

$$m(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

نامساوی برعکس بالا واضح است به علت خاصیت زیرجمعی که در جلسه پیش اثبات شد.

اگر E_i ها لزوماً کران‌دار نباشند، هر E_i را به صورت اجتماع شمارا مجموعه کران‌دار دوبه‌دو جدا از هم می‌نویسیم:

$$k \geq 2 \qquad G_{i,k} := E_i \cap \left[B(k,0) \setminus B(k-1,0)\right] \longrightarrow \text{اندازه‌پذیر است (چرا؟)}$$

گوی به شعاع k و مرکز مبدأ

$$G_{i,1} := E_i \cap B(1,0)$$

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{i,k} \xrightarrow{\text{قسمت اول اثبات}} m(E_i) = \sum_{k=1}^{\infty} m(G_{i,k})$$

ازطرفی
$$E = \bigcup_{i,k=1}^{\infty} G_{i,k}$$

که $G_{i,k}$ ها دوبدو جدا از هم و کران دار هستند

$$\Rightarrow m(E) = \sum_{i,k=1}^{\infty} m(G_{i,k}) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} m(G_{i,k})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

(۹) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$ و $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ دراین صورت می‌نویسیم $E_i \nearrow E$

اگر E_i ها اندازه‌پذیر باشند، آنگاه

$$m(E) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$$

$G_1 = E_1$, $G_i = E_i \setminus E_{i-1}$ $i \geq 2$, $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$

G_i ها ازهم جدا هستند و بنابر (۸)

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i)$$

از طرفی $E_N = \bigcup_{i=1}^{N} G_i \Leftarrow m(E_N) = \sum_{i=1}^{N} m(G_i)$

(۱۵) $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ و $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ که در این صورت می‌نویسیم $E_i \searrow E$ آنگاه

اگر $m(E_k) < \infty$ به ازای یک مقدار k، داریم

$$m(E) = \lim_{i \to \infty} m(E_i)$$

(اثبات: تمرین)

مثال نقض برای شرط $m(E_k) < \infty$:

$$E_i = (i, \infty) \Leftarrow E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \emptyset$$

(۱۱) اگر $m(E)<\infty$ ، مجموعه فشرده K وجود دارد که $K\subset E$ و $m(E-K)<\varepsilon$.

بنابر (۶) مجموعه بسته F وجود دارد که $F\subset E$ و $m(E-F)<\varepsilon$

فشرده است $\leftarrow$ $K_n = F\cap B_n$

گوی بسته به شعاع n

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} E-K_n \searrow E-F \\ m(E-K_1)\le m(E)<\infty \end{array}\right\} \xRightarrow{(۱۰)} \lim_{n\to\infty} m(E-K_n) = m(E-F)<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \exists\, n \text{ s.th. } m(E-K_n)<\varepsilon$$

۱۲) اگر $m(E)<\infty$ ، آنگاه مکعب‌های بسته Q_i وجود دارند که $K=\bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ و

$$m(E\Delta K)<\varepsilon$$

$$\overset{\parallel}{(E-K)\cup(K-E)}$$

$$\exists Q_i\ ,\quad E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\ ,\quad \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i)\le m(E)+\varepsilon/2$$

N را به گونه‌ای انتخاب کنید که $\sum_{i=N+1}^{\infty} m(Q_i)\le\frac{\varepsilon}{2}$ ، قرار دهید $K=\bigcup_{i=1}^{N} Q_i$

$$E-K\subseteq\bigcup_{i=N+1}^{\infty} Q_i \Rightarrow m(E-K)\le\sum_{i=N+1}^{\infty} m(Q_i)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$K-E\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right)-E \Rightarrow m(K-E)\le m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right)-m(E)<\varepsilon/2$$

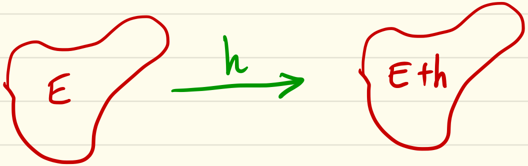
آنالیز حقیقی

جلسه چهار ۹۷/۷/۳

خواص ناوردایی اندازه لبگ :

عملگر $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را حافظ اندازه گوییم هرگاه $m(E) = m(T(E))$

مثال: $T(x) = x + h$ که $h \in \mathbb{R}^n$ یک بردار ثابت دلخواه است. درواقع T عملگر انتقال است.



$$m(E) = m_*(E) = \inf_{E \subseteq \bigcup Q_i} \sum |Q_i|$$

$$\Rightarrow \quad E+h \subseteq \bigcup Q_i' \qquad Q_i' = Q_i + h$$

واضح است که $|Q_i'| = |Q_i|$

درنتیجه $m_*(E+h) \le m_*(E)$.

مثال: $T(x) = -x$ حافظ اندازه است. (چون حجم مکعب را تغییر نمی‌دهد)

مثال ـ تبدیلِ $T(x) = \lambda x$ حجم هر مکعب را $|\lambda|^n$ برابر می‌کند. درنتیجه

$$m(T(E)) = |\lambda|^n m(E)$$

مثال ـ $T(x) = Ax$ که A یک ماتریس $n \times n$ است.

$$E \subseteq \bigcup_i Q_i \Rightarrow T(E) \subseteq \bigcup_i T(Q_i)$$

$T(Q_i)$ یک متوازی السطوح است که حجم آن برابر است با

$$|T(Q_i)| = |\det A| \cdot |Q_i|$$

تمرین ـ اگر $u_1, \dots, u_n$، n بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند و

$$K = \{ t_1 u_1 + \dots + t_n u_n : t_1 + \dots + t_n = 1, \ t_i \geq 0 \}$$

$$m(K) = \mathrm{Vol}(K) = |\det(u_1, \dots, u_n)|$$

$$\Rightarrow \quad m(T(E)) \leq \sum_i m(T(Q_i)) = |\det A| \sum_i |Q_i|$$

$$\Rightarrow \quad m(T(E)) \leq |\det A| \; m(E) \qquad (*)$$

اگر A وارون باشد، $T^{-1}(T(E)) = E$ و بنابر مطلب فوق

$$m(\underbrace{T^{-1}(T(E))}_{= E}) \leq |\det A^{-1}| \; m(T(E))$$

و اگر A وارون پذیر نباشد، $\det A = 0$ و از رابطه $(*)$ نتیجه می‌شود که $m(T(E)) = 0$.

یک مجموعه اندازه ناپذیر :

رابطه هم ارزی زیر را در بازه $[0,1]$ در نظر بگیرید :

$$x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$$

اعداد گویا

این رابطه هم ارزی مجموعه $[0,1]$ را به کلاس‌های هم ارزی $\{\mathcal{E}_\alpha\}$ تقسیم می‌کند

$$[0,1] = \bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha$$

از هر کلاس هم ارزی $\mathcal{E}_\alpha$ یک نماینده x_α انتخاب می‌کنیم و

$$N = \{x_\alpha\}_\alpha$$

مجموعه N یک مجموعه اندازه ناپذیر است.

فرض کنیم N اندازه‌پذیر است و $r \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]$ ، آنگاه $N+r$ هم یک مجموعه اندازه‌پذیر است و

$$m(N+r) = m(N)$$

داریم:

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} N+r$$

زیرا: هر $x\in[0,1]$ عضو یکی از کلاس‌های هم‌ارزی مثل $\mathcal{E}_\alpha$ است. در نتیجه $x-x_\alpha$ یک عدد گویا در بازه $[-1,1]$ است و چون $x_\alpha\in N$ است در نتیجه x به یکی از مجموعه‌های $N+r$ متعلق است.

از طرف دیگر هم این مجموعه‌های $N+r$ دو به دو جدا از هم هستند.

$$y\in N+r\cap N+s \Rightarrow y = x_\alpha + r = x_\beta + s \Rightarrow x_\alpha - x_\beta = s-r\in\mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x_\alpha \sim x_\beta$$

و باید در یک کلاس هم‌ارزی باشند. یعنی $x_\alpha = x_\beta \Rightarrow r=s$.

$$m\Big(\bigcup_{r} (N+r)\Big) = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} m(N+r)$$ درنتیجه

$$= \sum_{r} m(N)$$

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{r} (N+r) \subseteq [-1,2]$$ از طرفی

($N\subseteq[0,1]$ و $-1\le r\le 1$)

$$\Rightarrow \quad 1 \le \sum_{r} m(N) \le 3$$

σ-جبر:

فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد، $\mathcal{M}$ کلکسیونی از زیرمجموعه‌های X را یک σ-جبر گوییم هرگاه

(i) $\phi, X \in \mathcal{M}$

(ii) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{M}$

(iii) $A_i \in \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ نسبت به اجتماع شمارا تا مجموعه بسته است)

(iv) $A_i \in \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

درحقیقت هر σ-جبر بیانگر همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر هستند.

<u>مثال</u>: همه زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر به معنای لبگ (که در جلسه قبل تعریف کردیم) یک σ-جبر تشکیل می‌دهند.

(خاصیت‌های ۳ و ۵ مجموعه‌های اندازه‌پذیر از جلسه قبل نشان می‌دهند که خواص فوق برقرار است)

مثال: $\mathcal{M}=2^X$ شامل همه زیرمجموعه‌های X یک سیگما جبر است.

تعریف اندازه: تابع $\mu:\mathcal{M}\longrightarrow[0,\infty]$ یک اندازه روی X است که اگر $E_1, E_2, \dots$ عناصر دو به دو مجزا از $\mathcal{M}$ باشند، آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$$

سه‌تایی $(X,\mathcal{M},\mu)$ را یک فضای اندازه گوییم.

مثال: $x\in X$ دلخواه باشد

$$\mu(E)=\begin{cases}\alpha & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

که α یک عدد مثبت دلخواه است.

مثال- دنباله $\{x_n\}$ را در X انتخاب کنید و متناظر آنها اعداد مثبت $\{\alpha_n\}$.

$$\mu(E):=\sum_{x_n\in E}\alpha_n$$

تمرین- بررسی کنید که μ در خاصیت جمع‌پذیری تعریف اندازه صدق می‌کند.

مثال: $X := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0,1\}\}$ همه رخدادهای ممکن برای شیر یا خط آمدن یک سکه پس از n بار
ترتیب را نشان می‌دهد. احتمال رخداد هر دنباله دلخواه $\frac{1}{2^n}$ است و می‌توانیم اندازه

$$\mu(\{(x_1, \dots, x_n)\}) = \frac{1}{2^n}$$

در حقیقت
$$\mu(E) = \frac{\overset{\text{تعداد اعضا}}{\#E}}{2^n}$$

تمرین. فرض کنید احتمال شیر آمدن p و احتمال خط $1-p$ باشد. یک اندازه جدید به کمک آن روی X بسازید.

تعریف اندازه خارجی: $\mu_* : 2^X \longrightarrow [0, \infty]$ را اندازه خارجی روی X می‌نامیم هرگاه

(i) $\mu_*(\emptyset) = 0$

(ii) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mu_*(E_1) \le \mu_*(E_2)$

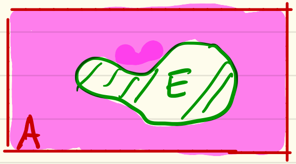
(iii) $\mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(E_i)$

مثال- اندازه خارجی لبگ m_* که در جلسه اول معرفی شد خواص فوق را دارد.

تعریف مجموعه اندازه پذیر از دیدگاه کاراتئودری:

$E \subseteq X$ را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر زیرمجموعه دلخواه $A \subseteq X$ داشته باشیم

$$\mu_*(A) = \mu_*(E\cap A) + \mu_*(E^c \cap A)$$



$\mu_*(E\cap A)$ یک تقریب از بالا برای $E\cap A$ است و

$\mu_*(A) - \mu_*(E^c\cap A)$ یک تقریب از پایین برای $E\cap A$ است

مثال- مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر به معنای کاراتئودری اندازه پذیر هستند. (تمرین)

قضیه: اگر μ_* یک اندازه خارجی روی مجموعه X باشد، و $\mathcal{M}$ همه زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر X به معنای کاراتئودری، آنگاه $\mathcal{M}$ یک σ-جبر است.

نکته: اگر G یک خانواده از زیرمجموعه‌های X باشد، اشتراک تمام σ-جبرهای ممکن روی X که شامل G هستند، یک σ-جبر است، که آن را کوچکترین σ-جبر تولید شده توسط G می‌نامیم.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و G همه زیرمجموعه‌های باز X باشد، σ-جبر تولید شده توسط آن را بُرل می‌نامیم. و اندازه تعریف شده روی این σ-جبر را بُرل می‌نامند.

در جلسه پیش دیدیم که همه مجموعه‌های باز به معنای لبگ اندازه‌پذیر هستند. بنابراین همه مجموعه‌های بُرل به معنای لبگ اندازه‌پذیر هستند.

سوال: آیا همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ، بُرل هستند؟ خیر

گزاره: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه اندازه‌پذیر لبگ است

(الف) اگر و تنها اگر اختلاف آن با مجموعه G_δ اندازه صفر باشد که G_δ اشتراک شمارا تا باز است.

(ب) اگر و تنها اگر اختلاف آن با مجموعه F_σ اندازه صفر باشد که F_σ اجتماع شمارا تا مجموعه بسته است.

اثبات - اگر E اندازه‌پذیر باشد، زیرمجموعه باز O_n وجود دارد که $E \subset O_n$ و

$$m(O_n - E) < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad G_\delta := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \supseteq E$$

$$G_\delta - E \subseteq O_n - E \Rightarrow m(G_\delta - E) < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad m(G_\delta - E) = 0$$

آنالیز حقیقی

جلسه پنجم ۹۷/۷/۸

تمرین سری اول : فصل اول ۳، ۴، ۵، ۱۴، ۱۶، ۲۰، ۲۵، ۲۷، ۲۸، ۲۹ — مهلت تحویل ۱۷ مهر

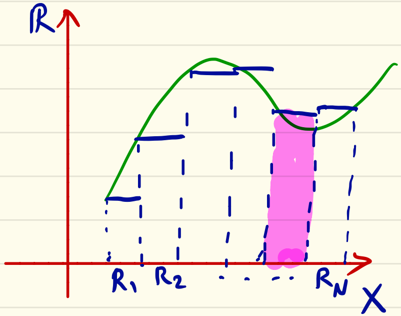
سری دوم : فصل اول ۱۰، ۱۷، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶ — مهلت تحویل ۲۹ مهر

problem 5

میان‌ترم ۲۳ آبان ۹ تا ۱۲ (چهارشنبه)

توابع اندازه پذیر :

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$



انتگرال ریمان : $X \subseteq \mathbb{R}^d$

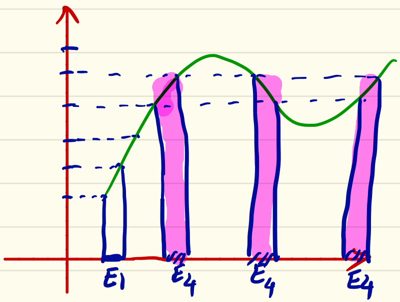
ناحیه X را با مکعب مستطیل‌های $R_1 , \dots , R_N$ تقریب می‌زنیم

$$\int f \approx \sum_i a_i |R_i|$$

در حقیقت تابع f را با تابع $\sum a_i \chi_{R_i}$ تقریب زده‌ایم.

$$\left(\chi_R(x) = \begin{cases} 1 & x \in R \\ 0 & x \notin R \end{cases} \right)$$

توابع به صورت فوق را تابع پله‌ای می‌نامیم



انتگرال لبگ : برد تابع f را به بازه‌های کوچک افراز کنیم :

$$f : X \longrightarrow \cup I_i$$

$$E_i = f^{-1}(I_i)$$

و انتگرال لبگ تابع f را با مجموع $\sum \alpha_i \, m(E_i)$ تقریب می‌زنیم که $\alpha_i \in I_i$.

درحقیقت برای محاسبه انتگرال لبگ تابع f را با توابع

$$\sum \alpha_i \chi_{E_i}$$

تقریب می‌زنیم که هرکدام از E_iها اندازه پذیر یا اندازه متناهی هستند. توابع به صورت فوق را توابع ساده می‌نامیم.

سؤال: چه توابعی را می‌توان به کمک توابع ساده تقریب زد!

تعریف: اگر $X \subseteq \mathbb{R}^d$ زیرمجموعه اندازه پذیر باشد و $f: X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$، آنگاه f را اندازه پذیر گوییم

به ازای هر $a \in \mathbb{R}$،

$$f^{-1}[-\infty, a) = \{x \in X : f(x) < a\}$$

یک مجموعه اندازه پذیر باشد.

نکته: این تعریف معادل این است که $f^{-1}[-\infty, a]$ اندازه پذیر است.

$$\{x: f(x) \le a\} = \bigcap_n \{x: f(x) < a + \frac{1}{n}\}$$

$$\{x: f(x) < a\} = \bigcup_n \{x: f(x) \le a - \frac{1}{n}\}$$

نکته: همچنین این تعریف معادل این است که $f^{-1}[a, +\infty]$ یا $f^{-1}(a, +\infty]$ اندازه پذیر باشند.

زیرا: ($\{f < a\} = \{f \ge a\}^c$)

نکته: اگر f اندازه پذیر باشد، $f^{-1}[a,b]$ یا $f^{-1}[a,b)$ ، ... اندازه پذیر هستند. به عنوان مثال

$$f^{-1}(a,b) = f^{-1}[-\infty, b) \cap f^{-1}(a, +\infty]$$

برعکس تنها در صورتی برقرار است که f متناهی مقدار باشد یعنی مقادیر $\pm\infty$ را اختیار نکند.

خواص توابع اندازه پذیر :

۱) اگر f تابع اندازه پذیر باشد، برای هر مجموعه باز O ، $f^{-1}(O)$ اندازه پذیر است و همچنین برای هر مجموعه بسته F ، $f^{-1}(F)$ اندازه پذیر است .

$O = \bigcup_i I_i$ هر مجموعه باز در $\mathbb{R}$ را به صورت اجتماع شمارا تا بازه باز می توان نوشت .

$$f^{-1}(O) = \bigcup_i f^{-1}(I_i)$$

هر کدام از مجموعه های $\{ f^{-1}(I_i) \}$ اندازه پذیر است .

در صورتی که f متناهی مقدار باشد، عکس گزاره های فوق درست هستند .

۲) اگر f اندازه پذیر باشد به ازای هر $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ، $f^{-1}(a)$ اندازه پذیر است .

③ اگر f تابع پیوسته روی $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

به‌ازای هر باز O در $\mathbb{R}$، $f^{-1}(O)$ یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^d$ است (به علت پیوستگی f) از طرفی زیرمجموعه‌های باز اندازه‌پذیر هستند.

④ اگر تابع f متناهی‌مقدار و اندازه‌پذیر باشد و $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته، آنگاه $\Phi \circ f$ اندازه‌پذیر است.

چون $\Phi \circ f$ متناهی‌مقدار است، تعریف اندازه‌پذیری آن معادل این است که $(\Phi \circ f)^{-1}(O)$ به‌ازای هر باز O، اندازه‌پذیر باشد.

$$(\Phi \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}\left(\Phi^{-1}(O)\right)$$

Φ پیوسته است و در نتیجه $\Phi^{-1}(O)$ یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}$ است. چون f اندازه‌پذیر، آنگاه تصویر وارون هر بازی اندازه‌پذیر خواهد بود.

نکته: اگر f اندازه‌پذیر باشد و Φ پیوسته، لزوماً $f \circ \Phi$ اندازه‌پذیر نیست. (مثال: تمرین)

۵) اگر f اندازه‌پذیر باشد، $|f|$ اندازه‌پذیر است. همچنین f^k به ازای $k \in \mathbb{N}$ نیز اندازه‌پذیر است.

به علاوه $|f|^\alpha$ به ازای $0 \le \alpha \in \mathbb{R}$ نیز اندازه‌پذیر است.

(از ۴ نتیجه می‌شوند)

۶) اگر f و g دو تابع اندازه‌پذیر و متناهی‌مقدار باشند، آنگاه $f+g$، fg، $\max(f,g)$، $\min(f,g)$ اندازه‌پذیر هستند.

$$\{f+g>a\} = \underbrace{\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}}_{\text{اجتماع شمارا اندازه‌پذیر}} \Big(\underbrace{\{f>a-r\}}_{\text{اندازه‌پذیر}} \cap \underbrace{\{g>r\}}_{\text{اندازه‌پذیر}} \Big)$$

$$fg = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4} \quad , \quad \max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$$

۷) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد، آنگاه

$$\liminf_{n\to\infty} f_n \quad , \quad \limsup_{n\to\infty} f_n \quad , \quad \inf_n f_n \quad , \quad \sup_n f_n$$

توابع اندازه‌پذیر هستند.

$$f(x) = \sup_n f_n(x) \qquad \{f > a\} = \underbrace{\bigcup_n}_{\text{اشتراک شمارا تا اندازه‌پذیر}} \underbrace{\{f_n > a\}}_{\text{اندازه‌پذیر}}$$

$$f = \inf f_n \qquad \{f > a\} = \bigcap_n \{f_n > a\}$$

$$f = \limsup f_n \qquad f = \inf_k \Big(\underbrace{\sup_{n \geq k} f_n}_{\text{یک دنباله نزولی با اندیس } k} \Big)$$

بنابر قسمت اول $g_k = \sup_{n\geq k} f_n$ توابع اندازه‌پذیر هستند، و بنابر قسمت دوم $f = \inf g_k$ اندازه‌پذیر است.

$$\liminf f_n = \sup_k \left(\inf_{n \geq k} f_n \right)$$

مشابه $\limsup$ اثبات می‌شود.

(۸) اگر دنباله توابع اندازه پذیر $\{f_n\}$ در همه نقاط همگرا باشند، $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ ، آنگاه تابع f اندازه پذیر است.

وقتی حد وجود دارد پس $\lim f_n = \limsup f_n$ و بنابر خاصیت (۷) حد آن یک تابع اندازه پذیر است.

تعریف: اگر دنباله توابع $\{f_n\}$ دارای این خاصیت باشد که مجموعه

$$\{x : \lim f_n(x) \text{ وجود ندارد} \}$$

اندازه صفر باشد، آنگاه می‌گوییم $\lim f_n$ تقریباً همه جا وجود دارد و

$f = \lim f_n$ a.e. (almost everywhere)

همچنین می‌نویسیم $f = g$ $a.e.$ (تقریباً همه‌جا) هرگاه مجموعه

$$\{x : f(x) \neq g(x)\}$$

اندازه صفر باشد.

(۹) اگر f اندازه‌پذیر باشد و $f = g$ ت.ه. آنگاه g اندازه‌پذیر است.

زیرا $\{f<a\} \triangle \{g<a\}$ یک مجموعه اندازه صفر است.

اندازه‌پذیر

و $\{f<a\}$ اندازه‌پذیر است. درنتیجه $\{g<a\}$ اندازه‌پذیر است.

(۱۰) خواص (۷) و (۸) به معنای تقریباً همه‌جا برقرار است. به عنوان مثال اگر $f = \lim f_n$ ت.ه. آنگاه f اندازه‌پذیر است.

آنالیز حقیقی

جلسه شش ۹۷/۷/۱۰

تقریب توابع اندازه‌پذیر با توابع ساده یا توابع پله‌ای

قضیه: اگر f یک اندازه‌پذیر نامنفی روی $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه دنباله‌ای صعودی از توابع ساده نامنفی $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد که در همه نقاط به تابع f همگراست. یعنی

$$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \varphi_3(x) \le \cdots$$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \qquad \text{به ازای همه مقادیر } x$$

اثبات - در گام اول تابع f را با توابع کران‌دار تقریب می‌زنیم. Q_N را مکعب به ضلع N بگیرید که مرکز آن نیز در مبدأ قرار دارد.

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \le N \,,\quad x \in Q_N \\ N & f(x) > N \,,\quad x \in Q_N \\ 0 & x \notin Q_N \end{cases}$$

واضح است که $\{f_N\}$ دنباله صعودی است و به f همگراست.

در گام بعدی تابع f_N را به وسیله توابع ساده تقریب می‌زنیم. $f_N : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,N]$ بازه $[0,N]$ را به MN قسمت تقسیم بندی و قرار دهید:

$$E_{l,M} := \left\{ x \in Q_N : \frac{l}{M} < f_N(x) \leq \frac{l+1}{M} \right\} \qquad 0 \leq l \leq MN-1$$

این مجموعه اندازه‌پذیر است. $\longleftarrow$

و تابع ساده $F_{N,M}(x) = \sum_l \frac{l}{M} \chi_{E_{l,M}}(x)$ را تعریف کنید.

$$\left| F_N(x) - F_{N,M}(x) \right| \leq \frac{1}{M} \qquad \forall x$$

اکنون قرار دهید $\varphi_k = F_{2^k, 2^k}$ $\quad (M=N=2^k)$ درنتیجه

$$\left| F_N(x) - \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{2^k}$$

و وقتی $k, N \to \infty$ خواهیم داشت $F_N(x) \longrightarrow F(x)$ که نتیجه می‌دهد $\varphi_k(x) \longrightarrow F(x)$ به ازای هر x.

به راحتی می‌توان دید که φ_k یک دنباله صعودی است. (چرا؟)

نکته- اگر تابع f مقادیر منفی اختیار کند ولی از پایین کران‌دار باشد، باز می‌توان دنباله صعودی از توابع ساده $\{\varphi_k\}$ پیدا کرد که به f همگرا است.
ولی اگر f در بعضی نقاط مقدار $-\infty$ را بگیرد، به وضوح نتیجه فوق درست نیست (چرا؟)

قضیه: اگر f یک تابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه دنباله‌ای از توابع ساده $\{\varphi_k\}$ وجود دارد که برای هر x

$$|\varphi_1(x)| \le |\varphi_2(x)| \le |\varphi_3(x)| \le \cdots \quad \text{و} \quad \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$$

اثبات- $f=f^+-f^-$ که $f^+=\max(f,0)$ و $f^-=\max(-f,0)$

بنابر خاصیت 6 توابع اندازه‌پذیر (جلسه قبل) f^+ و f^- توابع اندازه‌پذیر هستند. در ضمن توابع نامنفی هستند که
در شرایط قضیه قبل صدق می‌کنند. $\{\varphi_k^+\}$ و $\{\varphi_k^-\}$ دنباله‌های صعودی از توابع ساده هستند که

$$\varphi_k^+(x)\longrightarrow f^+(x), \quad \varphi_k^-(x)\longrightarrow f^-(x) \qquad \forall x$$

قرار دهید

$$\varphi_k(x) = \varphi_k^+(x) - \varphi_k^-(x)$$

واضح است که

$$\varphi_k(x) \longrightarrow f(x)$$

درضمن $|\varphi_k(x)| = \varphi_k^+(x) + \varphi_k^-(x)$. (دقت کنید که در یک نقطه $\varphi_k^+(x)$ و $\varphi_k^-(x)$ همزمان ناصفر نیستند،

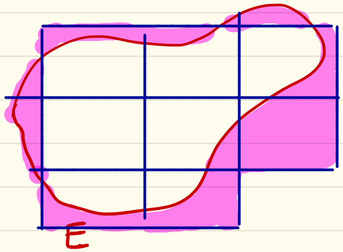
این مطلب از صعودی‌بودن φ_k^+ و φ_k^- نتیجه می‌شود) در نتیجه دنباله $\{|\varphi_k|\}$ یک دنباله صعودی است.

قضیه (تقریب با توابع پله‌ای) اگر تابع f روی R^d اندازه‌پذیر باشد، آنگاه دنباله‌ای از توابع پله‌ای $\{\psi_k\}$ وجود دارد که به طور نقطه‌ای تقریباً همه‌جا به f همگرا است.

اثبات - ابتدا قضیه را برای $f = \chi_E$ که E یک مجموعه اندازه‌پذیر با اندازه متناهی است. بنابر گزاره ۱۲ جلسه سوم به‌ازای

هر $\varepsilon>0$، تعداد متناهی مکعب $Q_1, \ldots, Q_N$ وجود دارند که

$$m\left(E \,\Delta\, \bigcup_{i=1}^{N} Q_i\right) \leq \varepsilon$$



هرکدام از Q_i ها را کوچک کنید تا مکعب مستطیل $\tilde{Q}_i$ به دست بیاید

به طوریکه $\tilde{Q}_i$ ها دو به دو اشتراک (درون) نداشته باشند. به علاوه

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{N} Q_i - \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{Q}_i\right) \le \varepsilon$$

و $\tilde{Q}_i$ را جایگزین Q_i کنید. به وضوح $m\left(E \,\Delta \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{Q}_i\right) \le 2\varepsilon$.

تابع پله‌ای $\sum_{i=1}^{N} \chi_{\tilde{Q}_i}$ تقریبی برای χ_E است. در حقیقت به ازای هر k، با قرار دادن

$\varepsilon = 2^{-k}$ تابع پله‌ای ψ_k را به روش فوق می‌سازیم.

$$E_k = \{x : f(x) \neq \psi_k(x)\} = E \,\Delta \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{Q}_i$$

بنابراین $m(E_k) \le 2^{1-k}$. روی مجموعه $F_N = \bigcap_{k=N}^{\infty} E_k^c$ دنباله $\{\psi_k\}$ از جمله N ام به بعد

برابر $f(x)$ است. درنتیجه روی $\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$ دنباله $\{\psi_k\}$ به f همگرا است. باید نشان دهیم $\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N\right)^c$

اندازه صفر است تا همگرایی $\psi_k \to f$ به صورت ت.ه. برقرار باشد.

$$\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N\right)^c = \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N^c = \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=N}^{\infty} E_k^c\right)^c$$

$$= \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k$$

از طرفی $F_N^c = \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k$ دنباله ای از مجموعه های اندازه پذیر نزولی است بنابراین

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) = \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) \leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} m(E_k)$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} 2^{1-k} = 0$$

تمرین - اثبات فوق را برای حالتی که f یک اندازه پذیر دلخواه است تعمیم دهید.

سه اصل لیتلوود.

(i) هر مجموعه اندازه‌پذیر تقریباً اجتماع تعداد متناهی بازه (مکعب مستطیل) است.

(ii) هر تابعی تقریباً پیوسته است. (منظور این است که با حذف یک مجموعه با اندازه دلخواه کوچک تابع f روی بقیه نقاط پیوسته است)

(iii) هر دنباله همگرای از توابع تقریباً همگرای یکنواخت است.

تعریف ـ دنباله توابع $\{f_n\}$ را همگرای یکنواخت به f گوییم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $N(\varepsilon)$ ای وجود داشته باشد که

$$\forall x \quad n \geq N(\varepsilon): \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

در حالی که در همگرایی نقطه‌ای به ازای هر x و $\varepsilon > 0$ مقدار $N = N(\varepsilon, x)$ وجود داشته باشد که

$$n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

همگرایی تقریباً همه جا (همگرایی در اندازه) به ازای هر x خارج یک مجموعه اندازه صفر همگرایی نقطه‌ای برقرار باشد.

قضیه (اگوروف): فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشند که روی مجموعه اندازه‌پذیر E با $m(E)<\infty$ تقریباً همه جا به تابع f همگرا است. به ازای هر $\varepsilon>0$ دلخواه، مجموعه بسته $A_\varepsilon \subseteq E$ وجود دارد که $m(E-A_\varepsilon)\leq \varepsilon$ و $f_n \longrightarrow f$ به طور یکنواخت روی A_ε.

مثال- $f_n(t)=t^n$ روی $E=[0,1]$ تقریباً همه جا به تابع $f(t)\equiv 0$ همگرا است. این دنباله روی مجموعه $[0,1-\varepsilon]$ همگرای یکنواخت به f است هر چند روی $[0,1)$ این مطلب درست نیست.

قضیه (لوسین) فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر و متناهی مقدار روی مجموعه اندازه‌پذیر E با $m(E)<\infty$ باشد. آنگاه برای هر $\varepsilon>0$، مجموعه بسته F_ε وجود دارد که

$$F_\varepsilon \subseteq E \quad , \quad m(E-F_\varepsilon)\leq \varepsilon$$

و $f\big|_{F_\varepsilon}$ یک تابع پیوسته است.

آنالیز حقیقی

جلسه هفت ۹۷/۷/۱۵

قضیه (اگوروف): فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشند که روی مجموعه اندازه‌پذیر E با $m(E)<\infty$ تقریباً همه جا به تابع f همگرا است. به ازای هر $\varepsilon>0$ دلخواه، مجموعه بسته $A_\varepsilon\subseteq E$ وجود دارد که $m(E-A_\varepsilon)\leq\varepsilon$ و $f_n\longrightarrow f$ به طور یکنواخت روی A_ε.

اثبات: $E_K^n=\{x\in E:\ |f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n}\ ,\ \forall j>K\}$

برای سادگی با حذف یک مجموعه اندازه صفر از E می‌توان فرض کرد که همگرایی نقطه‌ای $f_j(x)\to f(x)$ در همه نقاط $x\in E$ برقرار است.

بنابر تعریف همگرایی نقطه‌ای به ازای $\varepsilon=1/n$، مقدار $K=K(\varepsilon,x)$ وجود دارد که برای $j>K$

$$|f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n}\quad\Rightarrow\quad x\in E_K^n$$

به ازای هر مقدار ثابت n

$$\Rightarrow\quad E=\bigcup_K E_K^n$$

از طرفی $E_K^n\subseteq E_{K+1}^n$ در نتیجه $m(E)=\lim_{K\to\infty} m(E_K^n)$.

بنابراین به ازای هر n ، عدد K_n وجود دارد که $m(E - E^n_{K_n}) < \frac{1}{2^n}$

حال فرض کنید $\sum_{n\geq N} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ ، و قرار دهید

$$\tilde{A} = \bigcap_{n\geq N} E^n_{K_n}$$

خواهیم داشت :

$$m(E-\tilde{A}) = m\Big(\bigcup_{n\geq N} (E - E^n_{K_n})\Big) \leq \sum_{n\geq N} \frac{1}{2^n} < \varepsilon/2$$

روی $\tilde{A}$ دنباله $\{f_j\}$ همگرای یکنواخت است به f. زیرا باید گزاره زیر را نشان دهیم:

$$\forall e>0 \;\; \exists M=M(e) \;,\; j>M \;,\; |f_j(x) - f(x)| < e \quad \forall x\in\tilde{A}$$

وقتی $x\in\tilde{A}$ ، آنگاه $x\in E^n_{K_n}$ برای $n\geq N$ ، اگر $\frac{1}{n}<e$ باشد آنگاه

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < e$$

برای $j>K_n$. می‌توانیم $M=K_n$ انتخاب کنیم.

برای کامل کردن اثبات مجموعه $\tilde{A}$ را با بسته $A_\varepsilon \subseteq \tilde{A}$ تقریب می‌زنیم به گونه‌ای که $m(\tilde{A} - A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$.

به وضوح خاصیت همگرایی یکنواخت روی A_ε برقرار است و $m(E - A_\varepsilon) < \varepsilon$.

قضیه (لوسین) فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر و متناهی مقدار روی مجموعه اندازه‌پذیر E با $m(E)<\infty$ باشد. آنگاه

برای هر $\varepsilon>0$، مجموعه بسته F_ε وجود دارد که

$$F_\varepsilon \subseteq E \quad , \quad m(E - F_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

و $f|_{F_\varepsilon}$ یک تابع پیوسته است.

اثبات- می‌دانیم دنباله‌ای از توابع پله‌ای f_n وجود دارند که ت.ه. به تابع f همگرا هستند. مجموعه E_n وجود دارد که

$m(E_n) < \frac{1}{2^n}$ که تابع پله‌ای f_n روی $E - E_n$ پیوسته است. اگر $\sum_{n \geq N} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$، آنگاه دنباله f_n برای $n \geq N$

روی $\tilde{F} = E - \bigcup_{n \geq N} E_n$ پیوسته هستند. درضمن $m(E - \tilde{F}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

بنابر قضیه اگوروف، زیرمجموعه بسته $F_\varepsilon \subset \tilde{F}$ وجود دارد که $m(\tilde{F} - F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ و دنباله $\{f_n\}$ روی F_ε همگرای یکنواخت به تابع f است. چون توابع f_n روی F_ε پیوسته هستند، درنتیجه f نیز پیوسته است.

نظریه انتگرال

انتگرال لبگ یک تابع اندازه‌پذیر، با ترتیب آن به وسیله توابع ساده تعریف می‌شود.

گام اول: انتگرال توابع ساده

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x)$$

که $\{E_k\}$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر با اندازه متناهی هستند.

اگر E_k ها دوبدو از هم جدا باشند و مقادیر a_k متمایز باشند، آنگاه نمایش فوق را فرم کانونی تابع ساده گوییم.

هر تابع ساده $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$ یک فرم کانونی منحصربه‌فرد دارد. به وضوح می‌توان با در نظر گرفتن اشتراک‌های مختلف مجموعه‌های $E_1, \dots, E_N$، هر تابع χ_{E_k} را به صورت اشتراکات دوبدو، سه به سه و ... مجموعه‌ها نوشت. در واقع می‌توان فرض کرد که مجموعه‌های E_i دوبدو مجزا هستند. اکنون قرار دهید:

$$F_i = \{x : \varphi(x) = c_i\} = \bigcup_{\{k : a_k = c_i\}} E_k$$

$c_i \in \{a_1, \dots, a_N\}$. به وضوح $\varphi = \sum_i c_i \chi_{F_i}$ و مجموعه‌های F_i لزوماً دوبدو مجزا هستند. یکتایی فرم کانونی هم به راحتی اثبات می‌شود. (تمرین)

تعریف انتگرال: برای هر تابع ساده φ نمایش کانونی آن را به صورت $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$ در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم:

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \, m(E_k)$$

که با نماد $\int \varphi(x)dx$ یا $\int \varphi \, dm$ نشان می‌دهیم.

این تعریف، خوش تعریف است. چون هر تابع ساده نمایش یکتای کانونی دارد و انتگرال از روی این نمایش تعریف می‌شود.

<u>گزاره</u>: اگر $\varphi = \sum a_k \chi_{E_k}$ یک تابع ساده (نه لزوماً در نمایش کانونی) باشد، آنگاه

$$\int \varphi = \sum a_k \, m(E_k)$$

اثبات. اگر $\varphi = \sum c_i \chi_{F_i}$ نمایش کانونی φ باشد، باید نشان دهیم تساوی زیر برقرار است.

$$\sum_i c_i \, m(F_i) = \sum_k a_k \, m(E_k)$$

از طرفی میدانیم $\sum c_i \chi_{F_i} = \sum a_k \chi_{E_k}$. اگر فرض کنیم که $\{E_k\}$ دوبدو از هم جدا باشند و ضرایب a_k می‌توانند تکراری باشند

برای اندیس c_i تمام a_kهایی که تساوی $c_i = a_k$ برقرار است را انتخاب کنید. در حقیقت داریم:

$$F_i = \bigcup_{a_k = c_i} E_k$$

(دقت کنید بنابر خاصیت نمایش کانونی تابع φ فقط روی F_i برابر c_i است و خارج آن مقادیر دیگری می‌گیرد.)

چون $\{E_k\}$ را دوبدو جدا از هم فرض کردیم، در نتیجه $m(F_i) = m\left(\bigcup_{a_k=c_i} E_k\right) = \sum_{a_k=c_i} m(E_k)$

$$\sum_i c_i\, m(F_i) = \sum_i c_i \left(\sum_{a_k=c_i} m(E_k) \right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_{a_k=c_i} c_i\, m(E_k) \right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_{a_k=c_i} a_k\, m(E_k) \right)$$

$$= \sum_k a_k\, m(E_k)$$

اکنون اگر $\varphi = \sum a_k \chi_{E_k}$ باشد که مجموعه‌های E_k لزوماً از هم جدا نباشند، شبیه الگوریتمی که برای نمایش فرم کانونی تابع ساده بیان شد، مجموعه‌های دوبدو جدا از هم $E_{k,j}$ وجود دارند که

$$E_k = \bigcup_j E_{k,j}$$

$$\Rightarrow \quad m(E_k) = \sum_j m(E_{k,j}) \qquad (*)$$

از طرفی
$$\varphi(x) = \sum_k a_k \chi_{E_k} = \sum_k \sum_j a_k \chi_{E_{k,j}}$$

در نمایش آخری مجموعه‌های $E_{k,j}$ دو به دو جدا از هم هستند و ضرایب تکرار می‌شوند. بنابر گام او

$$\int \varphi = \sum_{k,j} a_k \, m(E_{k,j})$$

$$= \sum_k a_k \sum_j m(E_{k,j}) \underset{(*)}{=} \sum a_k \, m(E_k)$$

تذکر: نتیجه گزاره فوق را می‌توان به عنوان تعریف انتگرال توابع ساده در نظر گرفت و برای محاسبه انتگرال توابع ساده لازم نیست که فرم کانونی آن را به دست آوریم.

خواص انتگرالی:

(۱) خطی بودن: اگر φ و ψ توابع ساده باشند، $a,b \in \mathbb{R}$ دلخواه:

$$\int (a\varphi + b\psi) = a\int\varphi + b\int\psi$$

اثبات - $\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$, $\psi = \sum_{j=1}^{M} b_j \chi_{F_j}$ $\Leftarrow$

$$\int\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i\, m(E_i)$$

$$\int\psi = \sum_{j=1}^{N} b_j\, m(F_j)$$

$$a\varphi + b\psi = \sum_{i=1}^{N} (a a_i)\chi_{E_i} + \sum_{j=1}^{M} (b b_j)\chi_{F_j}$$

$$\Rightarrow \int a\varphi + b\psi = \sum_{i=1}^{N} (a a_i)\, m(E_i) + \sum_{j=1}^{M} (b b_j)\, m(F_j) = a\int\varphi + b\int\psi$$

تعریف: برای مجموعه اندازه‌پذیر E در $\mathbb{R}^d$ و تابع ساده $\varphi(x)=\sum a_k \chi_{E_k}$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\int_E \varphi = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\chi_E(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_k a_k \chi_{E\cap E_k} = \sum a_k\, m(E\cap E_k)$$

(۲) جمع‌پذیری: اگر E و F دو زیرمجموعه اندازه‌پذیر جدا از هم باشند، آنگاه

$$\int_{E\cup F} \varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi$$

$$\left(\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F\right)$$

(۳) یکنوایی: اگر $\varphi \leq \psi$ توابع ساده باشند، آنگاه

$$\int \varphi \leq \int \psi$$

اثبات. اگر $\psi \geq 0$ تابع ساده مثبت باشد و $\psi=\sum c_i \chi_{F_i}$ نمایش کانونی آن باشد، آنگاه $0\leq c_i$. به وضوح

$$\int \psi = \sum c_i\, m(F_i) \geq 0$$

(۴) نامساوی مثلث: اگر φ یک تابع ساده باشد، $|\varphi|$ نیز تابع ساده است و

$$\left|\int \varphi\right| \leq \int |\varphi|$$

$\varphi = \sum a_k \chi_{E_k}$ نمایش کانونی باشد. $\Rightarrow |\varphi| = \sum |a_k| \chi_{E_k}$ (نمایش $|\varphi|$ لزوماً کانونی نیست)

$$\left|\int \varphi\right| = \left|\sum a_k\, m(E_k)\right| \leq \sum |a_k \cdot m(E_k)|$$

$$= \sum |a_k|\, m(E_k) = \int |\varphi|$$

آنالیز حقیقی

جلسه هشت ۹۷,۷,۱۷

انتگرال توابع کراندار با تکیه‌گاه اندازه متناهی

اگر f اندازه‌پذیر باشد مجموعه $\operatorname{Supp} f = \{ x : f(x) \neq 0 \}$ را تکیه‌گاه (Support) تابع f

تعریف می‌کنیم. به وضوح $\operatorname{Supp} f$ یک مجموعه اندازه‌پذیر است.

منظور از یک تابع با تکیه‌گاه اندازه متناهی، این است که اندازه $\operatorname{Supp} f$ متناهی باشد یا به عبارتی f خارج یک مجموعه با اندازه متناهی برابر صفر باشد.

قرار است انتگرال تابع f با این ویژگی که $m(\operatorname{Supp} f) < \infty$ و عدد ثابت M وجود دارد که $|f(x)| \leq M$ به ازای هر x، را تعریف کنیم.

ایده: تابع f را با توابع ساده φ_n تقریب بزنیم به طوری که $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ و $|\varphi_1(x)| \leq |\varphi_2(x)| \leq \cdots$.

و تعریف کنیم

$$\int f := \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$$

برای این تعریف لازم است که دو ویژگی زیر اثبات شود :

① حد $\int \varphi_n$ وجود دارد

② اگر دو دنباله از توابع ساده φ_n و ψ_n داشته باشیم که $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$ ، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n = \lim_{n\to\infty}\int\psi_n$$

نکته : می‌توان انتگرال تابع f را به روش زیر تعریف کرد :

$$\int f := \sup_{\substack{\varphi\le f \\ \varphi\ \text{تابع ساده}}} \int\varphi$$

ما در ادامه با تعریف اول کار خواهیم کرد.

لم: فرض کنید f یک تابع کران‌دار روی مجموعه با اندازه متناهی E تعریف شده است و $\{\varphi_n\}$ یک دنباله از توابع ساده که

$|\varphi_n(x)| \le M$ به ازای هر $x \in E$ و $\varphi_n(x) \longrightarrow f(x)$ ت. هـ. در E.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \varphi_n$ وجود دارد.

(ii) اگر $f=0$ تابع ثابت صفر باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \varphi_n = 0$.

اثبات. $I_n = \int_E \varphi_n$ نشان می‌دهیم دنباله I_n کوشی است.

$$|I_n - I_m| = \left|\int_E \varphi_n - \int_E \varphi_m\right| \le \int_E |\varphi_n - \varphi_m|$$

اگر دنباله توابع φ_n همگرای یکنواخت باشند به راحتی مقدار بالا را برای اندیس‌های بزرگ m, n می‌توان کوچک کرد.

بنابر قضیه اگوروف زیرمجموعه $A \subseteq E$ وجود دارد که $m(E-A) < \varepsilon$ و دنباله $\{\varphi_n\}$ روی A همگرای یکنواخت است.

$$\Rightarrow |I_n - I_m| \le \int_A |\varphi_n-\varphi_m| + \int_{E-A} |\varphi_n-\varphi_m|$$

بنابر تعریف همگرای یکنواخت به ازای $\varepsilon>0$ دلخواه مقدار N وجود دارد که اگر $m,n>N$ آنگاه

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\varepsilon \qquad \forall x\in A$$

در نتیجه

(خاصیت یکنوای انتگرال)
$$\int_A |\varphi_n-\varphi_m| < \int_A \varepsilon = \varepsilon\, m(A)$$

از طرفی $|\varphi_n|\le M$ بنابراین

$$\int_{E-A}|\varphi_n-\varphi_m| \le \int_{E-A} 2M = 2M\, m(E-A) < 2M\varepsilon$$

در نتیجه برای $m,n>N$ داریم:

$$|I_n-I_m| \le \varepsilon\left[m(A)+2M\right] \le \varepsilon\left[m(E)+2M\right]$$

اثبات قسمت (ii) شبیه به قبل است با این تفاوت که بنا بر تعریف اگورف دنباله φ_n به طور یکنواخت روی A به صفر همگرا است.

نتیجه: اگر φ_n و ψ_n دو دنباله از توابع ساده باشند که به طور نقطه‌ای به تابع f همگرا بوده به علاوه $|\varphi_n| \le M$ و $|\psi_n| \le M$ به ازای هر n. آنگاه

$$\lim \int \varphi_n = \lim \int \psi_n$$

زیرا $\varphi_n - \psi_n \longrightarrow 0$ ت.ه. به علاوه $|\varphi_n - \psi_n| \le 2M$ همه جا و بنا بر قسمت (ii) لم قبل

$$\int \varphi_n - \psi_n \longrightarrow 0.$$

خواص انتگرال: اگر f و g دو تابع کران‌دار با تکیه‌گاه اندازه متناهی باشند، آنگاه

(۱) خطی بودن: $\int af+bg = a\int f + b\int g$

(۲) جمع‌پذیری: $\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F g$ که $E\cap F = \emptyset$.

(۳) یکنوایی: $f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$

۴) نامساوی مثلث $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

تذکر: اگر E یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر دلخواه باشد و f تابع کران‌دار با تکیه‌گاه اندازه متناهی، آنگاه $f\chi_E$ همین دو ویژگی را دارد.

در واقع $\operatorname{Supp}(f\chi_E) = (\operatorname{Supp} f) \cap E$

و تعریف می‌کنیم: $\int_E f := \int f\chi_E$

انتگرال ریمان و انتگرال لبگ:

نشان خواهیم که هر تابع انتگرال‌پذیر به معنای ریمان یک تابع اندازه‌پذیر است و انتگرال لبگ آن برابر انتگرال ریمان است.

تابع f روی بازه $[a,b]$ به معنای ریمان انتگرال‌پذیر است هرگاه کران‌دار باشد و اینفیمم مجموع ریمان‌های بالایی با سوپریمم مجموع ریمان‌های پایینی برابر باشد. از طرفی می‌دانیم تابع f ریمان انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر نقاط ناپیوستگی آن اندازه صفر باشد.

این مطلب ثابت می‌کند که تابع f اندازه‌پذیر است (چرا؟)

گزاره: اگر f یک تابع کران‌دار با تکیه‌گاه اندازه‌متناهی و نامنفی باشد ($f \geq 0$). به علاوه اگر $\int f = 0$ آنگاه $f \equiv 0 \;\; a.e.$ ت.ه تابع ثابت صفر است.

اثبات ـ

$$E_n = \{x : \; f(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

به ازای هر x داریم:

$$\frac{1}{n}\chi_{E_n}(x) \leq f(x)$$

در نتیجه

$$\frac{1}{n} m(E_n) = \int \frac{1}{n}\chi_{E_n} \leq \int f = 0$$

$$\Longrightarrow \quad m(E_n) = 0$$

$$\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(\{f > 0\}) = 0$$

قضیه: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ به معنای ریمان انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$\int_{[a,b]}^{R} f = \int_{[a,b]}^{L} f$$

که سمت راست انتگرال لبگ تابع f و سمت چپ تساوی انتگرال ریمان آن است.

اثبات ـ چون f به معنای ریمان انتگرال‌پذیر است دنباله توابع پله‌ای $\{\varphi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ وجود دارند که $|\varphi_n| \leq M$ و $|\psi_n| \leq M$

به‌علاوه $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq f(x) \leq \dots \leq \psi_2(x) \leq \psi_1(x)$

و

$$\lim_{n\to\infty} \int^{R} \varphi_n(x)\,dx = \int^{R} f = \lim_{n\to\infty} \int^{R} \psi_n(x)\,dx$$

(وجود توابع پله‌ای φ_n که $\varphi_n \leq f$ و $\int^{R} \varphi_n$ به $\int^{R} f$ همگرا است از تعریف انتگرال ریمان نتیجه می‌شود و صعودی بودن دنباله φ_n با تظریف افرازهای مرتبط با φ_n بدست خواهد آمد)

بنابر تعریفِ انتگرال لبگ توابع ساده به وضوح تساوی $\int^{R}\varphi_n=\int^{L}\varphi_n$ و همچنین $\int^{R}\psi_n=\int^{L}\psi_n$ نتیجه می‌شود.

اگر به‌ازای تمامِ xها $\varphi_n(x)\to f(x)$ تقریباً همه‌جا، آنگاه بنابر تعریفِ انتگرال لبگ توابع کران‌دار قضیه اثبات می‌گردد. ولی چنین مطلبی از انتخاب $\{\varphi_n\}$ واضح نیست. (همچنین برای ψ_n).

چون دنباله توابع $\{\varphi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ یکنوا و کران‌دار هستند، حدِ این توابع وجود دارند:

$$\tilde{\psi}(x):=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)\quad,\quad\tilde{\varphi}(x):=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$$

درضمن داریم $\tilde{\varphi}(x)\le f(x)\le\tilde{\psi}(x)$. از طرفی $\tilde{\varphi}$ و $\tilde{\psi}$ توابع کران‌داری هستند که حدِ یک دنباله از توابع پله‌ای (ساده) هستند در نتیجه

$$\int^{L}\tilde{\varphi}=\lim_{n\to\infty}\int^{L}\varphi_n=\lim_{n\to\infty}\int^{R}\varphi_n=\int^{R}f$$

به همین ترتیب

$$\int^{L}\tilde{\psi}=\int^{R}f$$

چون $\tilde{\Psi} \leq \tilde{\varphi}$ و $\int^L \tilde{\Psi} = \int^L \tilde{\varphi}$ بنابر گزاره قبلی نتیجه می‌شود که $\tilde{\Psi} = \tilde{\varphi}$ ت.هـ.

بنابراین $f = \tilde{\Psi} = \tilde{\varphi}$ ت.هـ. و

$$\int^L f = \int^L \tilde{\varphi} = \int^R f$$

جابجایی حد و انتگرال:

سؤال: اگر دنباله از توابع f_n که به f همگرا هستند، تساوی زیر برقرار است.

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = \int f$$

از قبل می‌دانیم که اگر دنباله f_n همگرای یکنواخت به f باشند در انتگرال ریمان این جابجایی مجاز است. (در نتیجه مشابه این مطلب برای انتگرال لبگ نیز برقرار است.)

قضیه همگرایی کران دار: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع کران دار با ثابت M که تکیه‌گاه آنها در مجموعه اندازه متناهی E قرار دارد.

به علاوه $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ ت.ه. در E. آنگاه

$$\int |f_n - f| \longrightarrow 0$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

اثبات ـ مشابه اثبات لم برای وقتی که f_n توابع ساده هستند. به کمک قضیه اگوروف همگرایی دنباله ای را روی مجموعه A یکنواخت

می‌کنیم به طوری که $m(E-A) \leq \varepsilon$.

آنالیز حقیقی

جلسه نه ۹۷/۷/۲۲

انتگرال توابع نامنفی

تابع $f \geq 0$ که لزوماً کران‌دار نیست و $\text{Supp} f$ هم می‌تواند اندازه بی‌نهایت داشته باشد. حتی تابع f می‌تواند در بعضی نقاط مقدار $+\infty$ اخذ کند. انتگرال تابع f را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\int f := \sup_{g \in \mathcal{F}} \int g$$

$\mathcal{F} = \{ g : 0 \leq g \leq f$ ، g و کران‌دار است و $\text{Supp}\, g$ اندازه متناهی است $\}$

تابع f را انتگرال‌پذیر (به معنای لبگ) گوییم هرگاه $\int f < \infty$.

اگر E یک مجموعه اندازه‌پذیر دلخواه باشد

$$\int_E f := \int (f \chi_E)$$

خواص انتگرال: $f, g \geq 0$

① خطی بودن $\int (af+bg) = a\int f + b\int g$ که $a, b \geq 0$

اثبات ـ رابطه $\int af = a\int f$ از تعریف واضح است. کافی است فقط نشان دهیم $\int f+g = \int f + \int g$

$$\int f = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \quad , \quad \int g = \sup_{\psi \leq g} \int \psi$$

توابع φ و ψ کراندار با تکیه‌گاه اندازه متناهی هستند درنتیجه $\varphi+\psi$ نیز همین دو ویژگی را دارد.

$$\Rightarrow \quad \int (\varphi+\psi) \leq \int (f+g)$$

$$\Rightarrow \quad \int \varphi + \int \psi \leq \int (f+g)$$

$\sup$ نسبت به φ و ψ $\quad \Rightarrow \quad \int f + \int g \leq \int (f+g)$

برعکس فرض کنید $\eta \le f+g$ تابع کران دار نامنفی با تکیه‌گاه اندازه متناهی باشد. دو تابع کران دار η_1 و η_2 با تکیه‌گاه اندازه متناهی پیدا می‌کنیم که

$\eta = \eta_1 + \eta_2$ و $\eta_1 \le f$ ، $\eta_2 \le g$ در این صورت بنا بر تعریف انتگرال توابع f و g خواهیم داشت:

$$\int \eta = \int \eta_1 + \int \eta_2 \le \int f + \int g$$

اگر روی همه توابع η ، سوپریمم بگیریم نتیجه خواهد شد:

$$\int (f+g) \le \int f + \int g$$

اکنون برای تجزیه فوق قرار دهید $\eta_1 := \min(\eta, f)$ ، چون η کران دار و تکیه‌گاه اندازه متناهی دارد به وضوح $0 \le \eta_1 \le \eta$ نیز این دو خاصیت را دارد.

اگر قرار دهیم $\eta_2 = \eta - \eta_1$ ، این تابع نیز این دو خاصیت را دارد. تنها باید نشان دهیم

$$0 \le \eta_2 \le g$$

(اگر $\eta_1(x) = \eta(x) \le f(x)$ آنگاه $\eta_2(x) = 0$ و اگر $\eta_1(x) = f(x) \le \eta(x)$ آنگاه از رابطه $\eta \le f+g$ نتیجه می‌شود که $\eta_2(x) \le g(x)$)

۲) جمع‌پذیری: اگر E و F دو زیرمجموعه جدا از هم $\mathbb{R}^d$ باشند و $f\geq 0$

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$$

۳) یکنوایی: $0\leq f\leq g$ آنگاه

$$\int f \leq \int g$$

۴) نامساوی مثلث: چون تابع f مثبت است به وضوح برقرار است.

۵) اگر g انتگرال‌پذیر است و $0\leq f\leq g$ آنگاه f انتگرال‌پذیر است.

۶) اگر $f\geq 0$ تابع منفی انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $f(x)<\infty$ تقریبا همه جا. یعنی مجموعه $E=\{x: f(x)=+\infty\}$ اندازه صفر است.

اگر $0<m(E)$ توابع $\varphi_n(x)=n\chi_{E\cap B_n}$ که B_n گوی به شعاع n است. تابع φ_n کران‌دار با تکیه‌گاه اندازه متناهی است و $\varphi_n\leq f$. در نتیجه $n\, m(E\cap B_n)=\int\varphi_n\leq\int f$

$m(E\cap B_n)\to m(E)$ میل می‌کند و در نتیجه $n\, m(E\cap B_n)\to\infty$.

7) اگر $f \geq 0$ و $\int f = 0$ آنگاه $f = 0$ ت.ه.

$$E_n = \{x : f(x) > \tfrac{1}{n}\}$$

$$f \geq \tfrac{1}{n}\chi_{E_n} \Rightarrow 0 = \int f \geq \tfrac{1}{n} m(E_n) \Rightarrow m(E_n) = 0$$

$$\Rightarrow m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$$

جابجایی حد و انتگرال :

در حالت قبل دیدیم اگر دنباله توابع $\{f_n\}$ کراندار با ثابت M روی مجموعه اندازه‌پذیر متناهی E تعریف شده باشند و $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ آنگاه $\int f_n \to \int f$

مثال- اگر $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$ آنگاه $f_n \xrightarrow{a.e.} 0$ در حالیکه $\int f_n = 1$.

مثال- اگر $f_n = \chi_{(n,n+1)}$ ، آنگاه $f_n \xrightarrow{a.e.} 0$ در حالیکه $\int f_n = 1$.

لم (Fatou): اگر $f_n \geq 0$ و $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ آنگاه

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

اثبات ـ تابع دلخواه φ را که $0 \leq \varphi \leq f$ کران‌دار و تکیه‌گاه اندازه متناهی دارد انتخاب کنید.

قرار دهید $\varphi_n = \min(\varphi, f_n)$ واضح است که $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ ت.ه.

دنباله $\{\varphi_n\}$ در دو ویژگی قضیه همگرایی کران‌دار (قضیه جلسه قبل) صدق می‌کنند زیرا $0 \leq \varphi_n \leq \varphi$ در نتیجه

$$\int \varphi = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$$

از طرفی $\varphi_n \leq f_n$ و در نتیجه $\int \varphi_n \leq \int f_n$ و خواهیم داشت:

$$\int \varphi = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

اگر به ازای همه توابع φ دلخواه سوپریمم بگیریم در سمت چپ نامساوی بالا می‌توانیم قرار دهیم $\int f$.

نتیجه: $0 \le f_n$ و $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ به علاوه $f_n \le f$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

اثبات - بنابر لم Fatou:

$$\int f \le \liminf \int f_n$$

از طرفی $f_n \le f \Rightarrow \limsup \int f_n \le \int f$.

نتیجه: (همگرایی یکنوا) $0 \le f_1 \le f_2 \le f_3 \le \cdots$ که $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

اثبات - این گزاره ضعیف‌تر از نتیجه قبلی است.

مثال - $f_n = \chi_{(n,\infty)}$ یک دنباله نزولی است که به $f=0$ همگراست و رابطه $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int f$ را نقض می‌کند.

نتیجه: $f_1 \ge f_2 \ge f_3 \ge \cdots \ge 0$ که $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ اگر لااقل یکی از $\{f_n\}$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int f$

اثبات - تمرین

نتیجه: $a_n(x)\geq 0$ و $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ آنگاه $\int f = \sum_{n=1}^{\infty}\int a_n$

اثبات- $f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ یک دنباله صعودی و همگرا به f است.

مثال- اگر $\{E_n\}$ دنباله ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشند که $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)<\infty$. آنگاه مجموعه نقاطی که عضو تعداد بی‌نهایت تا مجموعه E_n هستند، اندازه صفر هستند.

اگر قرار دهیم $a_k(x)=\chi_{E_k}(x)$ آنگاه مقدار تابع $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ به ازای این نقاط بی‌نهایت است. از طرفی

$$\int f = \sum\int a_n = \sum m(E_k) <\infty$$

پس تابع f انتگرال‌پذیر است و مجموعه $\{x : f(x)=\infty\}$ اندازه صفر است.

تعریفِ انتگرال برای توابعِ دلخواه :

f یک تابع دلخواه است ، آن را انتگرال‌پذیر گوییم که $\int |f| < \infty$. دقت کنید تابع $|f|$ یک تابع نامنفی است که انتگرال آن تعریف شده است . اگر f انتگرال‌پذیر باشد ،

$$f^+ = \max(f, 0)$$

$$f^- = \max(-f, 0)$$

f^+ و f^- دو تابع نامنفی هستند که $f = f^+ - f^-$.

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

وقتی f انتگرال‌پذیر است ، $|f| = f^+ + f^-$ و

$$\int f^+ + \int f^- = \int |f| < \infty$$

بنابراین $\int f^+ < \infty$ و $\int f^- < \infty$.

به وضوح خواص خطی بودن، جمع‌پذیری، یکنوایی و نامساوی مثلث برقرار است.

نکته: اگر f یک تابع مختلط‌مقدار باشد یعنی $f(x)=u(x)+iv(x)$ آنگاه به وضوح تعریف انتگرال را می‌توان به آن تعمیم داد:

$$\int f := \int u + i\int v$$

به شرط آنکه f انتگرال‌پذیر باشد یعنی $\int |f| < \infty$. ← خاصیت خطی، جمع‌پذیری و نامساوی مثلث برقرار است.

آنالیز حقیقی

جلسه ده ۹۷٫۷٫۲۴

گزاره: اگر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، مجموعه B (می‌تواند گوی یا مکعب باشد) با اندازه متناهی وجود دارد که

$$\int_{B^c} |f| < \varepsilon$$

اثبات - B_N گوی به شعاع N در نظر بگیرید و قرار دهید $g_N(x) = |f(x)|\chi_{B_N}(x)$ به وضوح دنباله $\{g_N\}$ به صورت صعودی به $|f|$ به طور نقطه‌ای همگراست. بنابر قضیه همگرایی یکنوا،

$$\int g_N \longrightarrow \int |f|$$

از طرفی $\int g_N = \int_{B_N} |f|$ و در نتیجه

$$\int |f| - \int g_N = \int_{B_N^c} |f| \longrightarrow 0$$

گزاره- (پیوستگی انتگرال نسبت به دامنه) اگر f تابع انتگرال‌پذیر باشد، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مقدار $\delta > 0$ وجود دارد که به ازای هر مجموعه E که $m(E) < \delta$ داشته باشیم

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

اثبات- $F_N = \{x : |f(x)| \leq N\}$ و $g_N(x) = |f(x)|\, \chi_{F_N}(x)$

دنباله g_N به صورت صعودی به $|f|$ همگرای نقطه‌ای است و در نتیجه

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_N \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |f|$$

اگر N به اندازه کافی بزرگ باشد که $\left| \int_{\mathbb{R}^d} g_N - |f| \right| < \varepsilon/2$ و δ را قرار دهید $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$

اگر $m(E) < \delta$ آنگاه

$$\int_E |f| = \int_E |f| - g_N + g_N$$

$$\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} |f| - g_N \right| + \int_E g_N < \frac{\varepsilon}{2} + N\, m(E) < \varepsilon$$

قضیه (تسلط لبگ) دنباله توابع اندازه‌پذیر $\{f_n\}$ را در نظر بگیرید که $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ ت. هـ . به علاوه $|f_n(x)| \le g(x)$ که g یک تابع انتگرال‌پذیر است . آنگاه

$$\int |f_n - f| \longrightarrow 0$$

در نتیجه $\int f_n \longrightarrow \int f$

اثبات ـ اگر g تکیه‌گاه کراندار باشد و $\operatorname{Supp} g$ اندازه متناهی هم f_n این دو ویژگی را دارند و بنابر قضیه همگرایی کراندار نتیجه بالا اثبات می‌شود.

قرار دهید $E_K = \{x : |x| \le K \ , \ g(x) \le K\}$ ، آنگاه دنباله $\{f_n \chi_{E_K}\}_{n=1}^{\infty}$ به ازای هر K ثابت در شرایط قضیه همگرایی کراندار صدق می‌کند در نتیجه

$$\int |f_n \chi_{E_K} - f \chi_{E_K}| \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

$$\| \qquad \int_{E_K} |f_n - f|$$

از طرفی دنباله $\{g \chi_{E_K}\}_{K=1}^{\infty}$ به صورت صعودی به g همگرا است و در نتیجه

$$\int_{E_K^c} g \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

به ازای هر ε دلخواه ، K را به اندازه کافی بزرگ بگیرید که

$$\int_{E_k^c} g < \frac{\varepsilon}{3}$$

و بنابر (1) خواهیم داشت :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f-f_n| = \int_{E_k} |f-f_n| + \int_{E_k^c} |f-f_n|$$

$$\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{برای همه مقادیر } n \text{ به اندازه کافی بزرگ}} + \int_{E_k^c} 2g < \varepsilon$$

فضای توابع انتگرال‌پذیر L^1

مجموعه همه توابع $\{f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^d} |f| < \infty\}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$.

بردارها توابع انتگرال‌پذیر هستند و اسکالر اعداد حقیقی. (به راحتی می‌توان دید که اگر f و g انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه $f+g$ نیز انتگرال‌پذیر است و همچنین این مجموعه نسبت به ضرب اسکالر بسته است.)

تعریف نرم روی فضای برداری V: تابعی است که $\|\cdot\|: V \longrightarrow [0,\infty)$ که

(i) $\|x\|=0 \iff x=0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ به ازای هر $x \in V$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

اگر روی فضای برداری توابع انتگرال‌پذیر نرم زیر را قرار دهیم

$$\|f\| = \int |f|$$

این نرم خاصیت (ن۱) را ندارد هر چند دو خاصیت دیگر برقرارند.

اگر $\int |f| = 0$ تنها نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که تابع f ت.ه. صفر است.

روی این فضای برداری رابطه هم‌ارزی زیر را در نظر بگیرید

$$f \sim g \iff f = g \quad \text{ت.ه.}$$

فضای خارج قسمت نسبت به این رابطه هم‌ارزی را $\mathcal{L}^1$ می‌نامیم. اعضای $\mathcal{L}^1$ کلاس‌های هم‌ارزی فوق هستند.

در حقیقت اعضای $\mathcal{L}^1$ توابع انتگرال‌پذیر هستند و در صورتی که دو تابع ت.ه. برابر باشند، در $\mathcal{L}^1$ برابر هستند.

روی این فضا تابع

$$\|f\| = \int |f|$$

یک نرم خواهد بود. دقت کنید این مقدار در یک کلاس هم‌ارزی ثابت است. یعنی اگر تابع f را با g جایگزین کنیم که $f = g$ ت.ه.

آنگاه $\int |f| = \int |g|$.

تعریف همگرایی: دنباله f_n در $\mathcal{L}^1$ به f همگرا است اگر $\|f_n - f\| \to 0$ به طور معادل

$$\int |f_n - f| \to 0$$

این همگرایی را همگرایی در نُرم می‌نامیم.

در مقابل همگرایی نقطه‌ای است بدین معنا که $f_n(x) \to f(x)$ ت.ه. تحت شرایطی با شرط قضیه تسلطی لبگ همگرایی نقطه‌ای همگرایی در نُرم را نتیجه می‌دهد. برعکس آن در حد یک زیردنباله درست است.

قضیه: اگر f_n در $\mathcal{L}^1$ به f همگرا باشد، آنگاه زیردنباله $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد که $f_{n_k}(x) \to f(x)$ ت.ه.

مثال-

$f_1 = \chi_{(0,1)}$ ، $f_2 = \chi_{(0,\frac{1}{2})}$، $f_3 = \chi_{(\frac{1}{2},1)}$

$f_4 = \chi_{(0,\frac{1}{3})}$ ، $f_5 = \chi_{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})}$، $f_6 = \chi_{(\frac{2}{3},1)}$ ، ...

واضح است که $\int |f_n| \to 0$ یعنی $f_n \to 0$ در $\mathcal{L}^1$ ولی به ازای هر x دنباله $\{f_n(x)\}$ همگرا نیست.

اثبات قضیه: زیردنباله $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که

$$(*) \qquad \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$$

زیرا به ازای هر $\varepsilon > 0$، N ای وجود دارد که برای همه $n > N$، می‌دانیم $\|f_n - f\| < \varepsilon$ در نتیجه برای هر $m,n > N$

$$\|f_n - f_m\| < 2\varepsilon$$

ادعا: دنباله $\{f_{n_k}(x)\}$ ت.ه به $f(x)$ همگرا است.

به طور معادل نشان می‌دهیم $f_{n_M}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{M-1} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right)$ به $f(x)$ همگرا (ت.ه.) است.

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

واضح است که g یک تابع انتگرال‌پذیر است (به دلیل انتخاب n_k که در شرط $(*)$ صدق می‌کند.) در نتیجه $\{x : g(x) = \infty\}$

اندازه صفر است یعنی خارج یک مجموعه اندازه صفر سری فوق همگرا است در نتیجه دنباله $\{f_{n_M}(x)\}$ همگرا است. فرض کنید $f_{n_M}(x) \to h(x)$

تنها باید نشان دهیم $h=f$. ولی $f_{n_M}(x) \longrightarrow h(x)$ ت.هـ . و از طرفی

$$\left|f_{n_M}(x)\right| \leq \left|f_{n_1}(x)\right| + \sum_{k=1}^{M-1} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \leq g(x)$$

و بنابر قضیه تسلط لبگ $\int |f_{n_M} - h| \longrightarrow 0$ یعنی f_{n_M} در نرم به h همگرا است.

اما $\{f_{n_M}\}$ زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ است که در نرم به f همگرا بود پس $f=h$ در L^1. یعنی $f(x)=h(x)$ ت.هـ. و در نتیجه $f_{n_M}(x) \longrightarrow f(x)$ ت.هـ.

تعریف ـ فضای متریک X را تام (Complete) گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

قضیه (Rieze-Fisher) فضای برداری L^1 با نرم تعریف شده، تام است.

اثبات ـ فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله کوشی در L^1 باشد، آنگاه زیردنباله $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$$

و بنا به قضیه قبل اثبات می‌شود که $f_{n_k} \longrightarrow h$ در L^1. در نتیجه دنباله f_n در نرم به h همگراست.

$$\|f_n - h\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - h\|$$

بنابر خاصیت کوشی برای هر $\varepsilon > 0$ اگر n و $n_k > N$ آنگاه

$$\|f_n - f_{n_k}\| < \varepsilon$$

شبیه آن برای $\|f_{n_k} - h\|$ برقرار است و در نتیجه

$$\Rightarrow \|f_n - h\| < 2\varepsilon .$$