هندسه دیفرانسیل

جلسه بیست و یک ۹۷/۹/۵

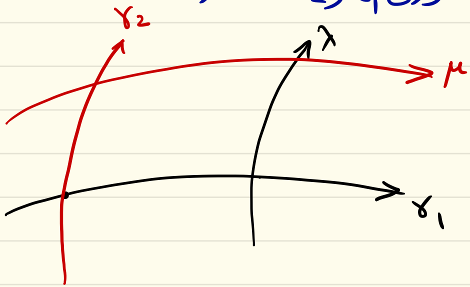
گزاره ۳ : فرض کنید $\tilde{\sigma}:\tilde{U}\to\mathbb{R}^3$ یک نقشه برای رویه S باشد و بردارهای مماس

$$e_1(\tilde{u},\tilde{v})=a(\tilde{u},\tilde{v})\,\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}+b(\tilde{u},\tilde{v})\,\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$$

$$e_2(\tilde{u},\tilde{v})=c(\tilde{u},\tilde{v})\,\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}+d(\tilde{u},\tilde{v})\,\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$$

را در نظر بگیرید که ضرایب a، b، c و d توابعی هموار هستند. اگر e_1 و e_2 در نقطه $(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$ مستقل خطی باشند،

در این صورت در یک همسایگی $\tilde{\sigma}(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$ نقشه σ وجود دارد که σ_u و σ_v موازی e_1 و e_2 هستند.



ایده اثبات : از نقطه $\tilde{\sigma}(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$ ابتدا خم γ_1 را پیدا می‌کنیم که

$$\dot{\gamma}_1=e_1$$

از نقطه $\gamma_1(s_1)$ خم $\lambda(s_1;\cdot)$ را پیدا می‌کنیم $\quad \dot{\lambda}=e_2$

نشان خواهیم داد $\lambda(s_1;s_2)$ یک در همسایگی $\tilde{\sigma}(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$ ارائه می‌کند. به وضوح خواهیم داشت $\frac{\partial}{\partial s_2}\lambda=e_2$ ولی تساوی $\frac{\partial}{\partial s_1}\lambda=e_1$ لزوماً برقرار نیست.

به طور مشابه خم‌های γ_2 و μ را می‌سازیم که $\dot{\gamma}_2=e_2$ و $\dot{\mu}=e_1$. در این صورت $\mu(t_1;t_2)$ نیز نقشه دیگری برای رویه است که $\frac{\partial}{\partial t_1}\mu=e_1$ در همه نقاط.

اگر $\sigma(u,v)$ را نقطه تلاقی $\lambda(u;\cdot)$ و $\mu(\cdot\,;v)$ این دو خم بگیریم، خواهیم دید که σ ویژگی مورد نظر را دارد.

جزئیات اثبات ـ اگر $e = A\tilde{\sigma}_{\tilde u} + B\tilde{\sigma}_{\tilde v}$ یک میدان برداری روی رویه باشد، آنگاه همیشه خم γ وجود دارد که $\dot{\gamma} = e$.

در واقع اگر $\gamma(t)=\tilde{\sigma}(\tilde u(t),\tilde v(t))$ باید $\dot{\tilde u} = A$, $\dot{\tilde v} = B$ که یک معادله دیفرانسیل عادی است و برای هر نقطه شروع جواب یکتا دارد.

ابتدا خم γ_1 را پیدا می‌کنیم که $\gamma_1(0)=\tilde{\sigma}(\tilde u_0,\tilde v_0)$ و $\dot{\gamma}_1 = e_1$ و به ازای هر مقدار s_1 نزدیک صفر خم $\lambda(s_1;\cdot)$ را پیدا می‌کنیم که $\dot{\lambda} = e_2$ و $\lambda(s_1;0)=\gamma_1(s_1)$. ادعا می‌کنیم که $\lambda(s_1;s_2)$ یک نقشه در همسایگی $\tilde{\sigma}(\tilde u_0,\tilde v_0)$ است.

یعنی باید ثابت کنیم به ازای هر $(\tilde u,\tilde v)$ نزدیک $(\tilde u_0,\tilde v_0)$ معادله زیر به ازای $(s_1;s_2)$ جواب یکتا دارد. در ضمن $(s_1;s_2)$ تابع هموار نسبت به $(\tilde u,\tilde v)$ است.

$$\tilde{\sigma}(\tilde u,\tilde v) = \lambda(s_1;s_2)$$

برای اثبات این ادعا تنها کافیست به کمک قضیه تابع وارون نشان دهیم که $\dfrac{\partial(\tilde u,\tilde v)}{\partial(s_1,s_2)}$ وارون‌پذیر است.

$$\begin{cases} \tilde\sigma_{\tilde u}\cdot\dfrac{\partial\tilde u}{\partial s_1}+\tilde\sigma_{\tilde v}\cdot\dfrac{\partial\tilde v}{\partial s_1}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial s_1} \\[2mm] \tilde\sigma_{\tilde u}\cdot\dfrac{\partial\tilde u}{\partial s_2}+\tilde\sigma_{\tilde v}\cdot\dfrac{\partial\tilde v}{\partial s_2}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial s_2}=e_2 \end{cases}$$

هرچند لزوماً تساوی $\frac{\partial\lambda}{\partial s_1}=e_1$ در همه نقاط برقرار نیست ولی در نقطه $(\tilde u_0,\tilde v_0)$ داریم

$$\left.\frac{\partial\lambda}{\partial s_1}\right|_{s_1=s_2=0}=\left.\frac{\partial}{\partial s_1}\gamma_1(s_1)\right|_{s_1=0}=e_1$$

درنتیجه بنابر استقلال خطی $\tilde\sigma_{\tilde u}$ و $\tilde\sigma_{\tilde v}$ خواهیم داشت

$$\left.\frac{\partial(\tilde u,\tilde v)}{\partial(s_1,s_2)}\right|_{s_1=s_2=0}=\left.\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right|_{(\tilde u_0,\tilde v_0)}$$

که یک ماتریس وارون‌پذیر است.

مشابه بالا خم‌های $\gamma_2(t_2)$ و $\mu(t_1;t_2)$ وجود دارند که

$$\begin{cases} \gamma_2(0)=\tilde\sigma(\tilde u_0,\tilde v_0) \\ \dot\gamma_2=e_2 \end{cases}$$

$$\mu(t_1;0)=\gamma_2(t_1)\ ,\quad \frac{\partial}{\partial t_1}\mu(t_1;t_2)=e_1$$

و $\mu(t_1;t_2)$ یک نقشه درهمسایگی $\tilde\sigma(\tilde u_0,\tilde v_0)$ ارائه می‌کند.

حال نقطه $\sigma(u,v)$ را محل تلاقی دو خم $s_2 \longmapsto \lambda(u;s_2)$ و $t_1 \longmapsto \mu(t_1;v)$ قرار دهید

اگر

$$\tilde\sigma(\tilde u,\tilde v) = \lambda(u;s_2) = \mu(t_1;v) = \sigma(u,v)$$

برای اینکه $\sigma(u,v)$ یک نقشه باشد، مشابه قبل کافی است نشان دهیم که $\frac{\partial(\tilde u,\tilde v)}{\partial(u,v)}$ در نقطه $u=v=0$ وارون‌پذیر است. از محاسبات قبلی می‌دانیم که

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde u}{\partial u} = a \,, & \frac{\partial \tilde v}{\partial u} = b \\ \frac{\partial \tilde u}{\partial v} = c \,, & \frac{\partial \tilde v}{\partial v} = d \end{cases}$$

حال نشان می‌دهیم σ همان نقشه مورد نظر است.

از تساوی $\sigma(u,v) = \lambda(u;s_2)$ نسبت به v مشتق بگیرید

$$\sigma_v = \frac{\partial\lambda}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial s_2}{\partial v} = \frac{\partial s_2}{\partial v}\, e_2$$

به طور مشابه

$$\sigma_u = \frac{\partial t_1}{\partial u}\cdot e_1 \,.$$

قضیه: اگر S رویه‌ی فشرده باشد، آنگاه نقطه‌ای روی S وجود دارد که در آنجا انحنای گاوسی مثبت است.

اثبات - تابع $f(x)=\|x\|^2$ را روی $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. این تابع روی S ماکسیمم خود را در نقطه‌ی p می‌گیرد. در این صورت S داخل کره به شعاع $\|p\|$ قرار می‌گیرد و این کره در نقطه‌ی p بر رویه مماس است. ایده‌ی اثبات این است که نشان دهیم انحنای گاوسی S در نقطه‌ی p حداقل به اندازه‌ی انحنای گاوسی کره یعنی $\frac{1}{\|p\|^2}$ است.

اگر $\gamma(t)$ یک خم روی S باشد که $\gamma(0)=p$. در نتیجه $f(\gamma(t))$ ماکسیمم خود را در $t=0$ می‌گیرد، در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2\Big|_{t=0}=0 \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2}\|\gamma(t)\|^2\Big|_{t=0}\leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\gamma}(0)\cdot p=0 \quad , \quad |\dot{\gamma}(0)|^2+\ddot{\gamma}\cdot p\leq 0$$

اگر $\gamma(t)$ یک خم با سرعت واحد بگیریم یعنی $|\dot{\gamma}|=1$، باید $\ddot{\gamma}\cdot p\leq -1$.

از طرفی تساوی $\dot{\gamma}(0)\cdot p=0$ نشان می‌دهد که T_pS صفحه مماس کره در نقطه p است یا به عبارتی صفحه عمود بر بردار p.

در نتیجه بردار عمود بر رویه در نقطه p موازی بردار p است، یعنی $\vec{N} = \pm \frac{p}{\|p\|}$

$$\ddot{\gamma} \cdot p \le -1 \implies \pm \ddot{\gamma} \cdot \vec{N} \le -\frac{1}{\|p\|}$$

بنا بر مطالب جلسه شانزده، انحنای قائم γ برابر است با $K_n = \ddot{\gamma} \cdot \vec{N} = \mathrm{II}_p \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$

$$\implies \pm K_n \le -\frac{1}{\|p\|} \implies \frac{1}{\|p\|} \le |K_n|$$

از طرفی که $K_1 \le K_n \le K_2$ و K_1 و K_2 انحناهای اصلی S هستند. در نتیجه هم علامت K_1 و K_2 یکسان هست هم اینکه

$$\frac{1}{\|p\|^2} \le K_1 K_2 = K .$$

رویه‌های با انحنای میانگین ثابت

تعریف: اگر S یک رویه‌ی جهت‌دار باشد و $\lambda \in \mathbb{R}$، رویه‌ی S^λ را موازی رویه‌ی S می‌نامیم که

$$S^\lambda = \{ p + \lambda \vec{N}_p \; : \; p \in S \}$$

که $\vec{N}_p$ بردار عمود رویه‌ی S در نقطه‌ی p است.

گزاره: اگر k_1 و k_2 انحناهای اصلی رویه‌ی جهت‌دار S باشند و S^λ رویه‌ی موازی S. به علاوه اگر در نقطه‌ی S هیچ یک از k_1 و k_2 برابر $\frac{1}{\lambda}$ نباشد، آنگاه

(i) S^λ رویه‌ی جهت‌دار است که قائم آن در نقطه‌ی $p+\lambda N_p$ برابر εN_p است که ε علامت $(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)$ است.

(ii) $\frac{\varepsilon k_1}{1-\lambda k_1}$ و $\frac{\varepsilon k_2}{1-\lambda k_2}$ انحناهای اصلی S^λ هستند و بردارهای اصلی وابسته به آنها همان بردارهای اصلی S وابسته به k_1 و k_2 هستند.

(iii) انحنای میانگین و انحنای گاوسی S^λ به ترتیب برابرند با $\frac{\varepsilon(H-\lambda K)}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}$ و $\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}$ که K و H انحناهای گاوسی و میانگین S هستند.

نتیجه: اگر S دارای انحنای گاوسی $\frac{1}{R^2}$ باشد، رویه‌ها موازی $S^{\pm R}$ دارای انحنای میانگین $\frac{1}{2R}$ هستند. برعکس اگر S دارای انحنای میانگین $\frac{1}{2R}$ باشد، آنگاه رویه موازی S^R دارای انحنای گاوسی $\frac{1}{R^2}$ است.

اثبات - به راحتی از گزاره قبل نتیجه می‌شود.

<u>اثبات گزاره:</u> اگر $\sigma(u,v)$ یک تکه برای S باشد و $\vec{N}(u,v)=\frac{\sigma_u\times\sigma_v}{\|\sigma_u\times\sigma_v\|}$ بردار عمود منطبق با جهت رویه S، قرار دهید:

$$\sigma^\lambda(u,v)=\sigma(u,v)+\lambda\vec{N}(u,v)$$

اگر $\vec{N}_u=-a\sigma_u-b\sigma_v$ ، $\vec{N}_v=-c\sigma_u-d\sigma_v$ که $W_\sigma=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$

آنگاه

$$\sigma_u^\lambda\times\sigma_v^\lambda=\left[1-\lambda(a+d)+\lambda^2(ad-bc)\right]\sigma_u\times\sigma_v$$

از آنجا که K_1 و K_2 مقادیر ویژه ماتریس W_σ هستند، پس $K_1+K_2=(a+d)$ ، $K_1K_2=ad-bc$ در نتیجه

$$\sigma_u^\lambda\times\sigma_v^\lambda=\left[(1-\lambda K_1)(1-\lambda K_2)\right]\sigma_u\times\sigma_v$$

$\Rightarrow$ قسمت (i) را اثبات می‌کند

برای محاسبه انحناهای اصلی S^λ، باید مختصات N_u^λ و N_v^λ را در پایه σ_u^λ و σ_v^λ محاسبه کنیم.

بنابر تبصره (ز) $N^\lambda = \varepsilon N$ در نتیجه:

$$\begin{cases} N_u^\lambda = \varepsilon N_u = -\varepsilon(a\sigma_u + b\sigma_v) \\ N_v^\lambda = \varepsilon N_v = -\varepsilon(c\sigma_u + d\sigma_v) \end{cases} \Rightarrow (N_u^\lambda, N_v^\lambda) = -\varepsilon(\sigma_u, \sigma_v)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

از طرف دیگر همان‌طور که در صفحه قبل دیدیم:

$$(\sigma_u^\lambda, \sigma_v^\lambda) = (\sigma_u, \sigma_v)\begin{pmatrix} 1-\lambda a & \lambda c \\ \lambda b & 1-\lambda d \end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$W_{\sigma^\lambda} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1-\lambda a & \lambda c \\ \lambda b & 1-\lambda d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \varepsilon\,[I - \lambda W_\sigma]^{-1} W_\sigma$$

در نتیجه اگر μ مقدار ویژه W_{σ^λ} و T بردار ویژه آن

$$W_{\sigma^\lambda} T = \mu T \Rightarrow \varepsilon W_\sigma T = \mu(T - \lambda W_\sigma T)$$

$$\Rightarrow W_\sigma T = \frac{\mu}{\varepsilon + \lambda\mu} T$$ $\Rightarrow$ $\frac{\mu}{\varepsilon+\lambda\mu}$ مقدار ویژه W_σ و T بردار ویژه آن است.

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\varepsilon+\lambda\mu} = k_i \Rightarrow \mu = \frac{\varepsilon k_i}{1-\lambda k_i} \qquad i=1,2$$

$\Downarrow$

قسمت (ii)

قسمت (iii) به راحتی از (ii) نتیجه می‌شود.

هندسه دیفرانسیل

جلسه بیست و دو ۹۷/۹/۱۰

ژئودزیک ها :

تعبیر شهودی : خطوط راست روی رویه با این معنا که ۱- کوتاهترین فاصله بین نقاط را ارائه می دهد.

۲- مؤلفه مماسی شتاب صفر باشد.

تعریف - خم γ روی S را یک ژئودزیک گوییم هرگاه مؤلفه مماسی $\ddot{\gamma}$ صفر باشد. ($\ddot{\gamma}=0$ یا $\ddot{\gamma}$ بر رویه عمود است)

به عبارتی $\nabla_\gamma \dot{\gamma} = 0$ یا $\dot{\gamma}$ در امتداد γ موازی است.

در ادامه نشان خواهیم که اگر γ ژئودزیک باشد، با تغییر پارامترش بر حسب طول همچنان ژئودزیک می ماند.

گزاره : اندازه سرعت ژئودزیک در راستای خم ثابت است.

اثبات -
$$\frac{d}{dt}|\dot{\gamma}|^2 = 2\dot{\gamma}\cdot\ddot{\gamma} = 0$$

چون $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}S \Rightarrow \ddot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}=0$

اگر γ یک ژئودزیک باشد و $v = |\dot\gamma|$ اندازه سرعت آن که یک مقدار ثابت است $\tilde\gamma(s) = \gamma(\frac{s}{v})$ پارامتریزاسیون برحسب طول γ خواهد بود و در نتیجه $\frac{d^2\tilde\gamma}{ds^2} = \frac{1}{v^2}\ddot\gamma$ موازی $\ddot\gamma$ است و عمود بر رویه.

تذکر- اگر γ ژئودزیک باشد، می‌توان تغییر پارامتری ارائه کرد که خم حاصل ژئودزیک نباشد.

گزاره: یک خم با سرعت واحد روی یک رویه، ژئودزیک است اگر و تنها اگر انحنای ژئودزیک آن در همه نقاط صفر باشد.

اثبات- بنابر تعریف انحنای ژئودزیک در جلسه ۱۶، $\kappa_g = \ddot\gamma \cdot (\vec{N} \times \dot\gamma) = 0 \iff \ddot\gamma \perp \vec{N} \times \dot\gamma$

از طرفی چون سرعت γ واحد است داریم $\dot\gamma \cdot \ddot\gamma = 0$ و $\langle \dot\gamma , \vec{N} \times \dot\gamma \rangle$ یک پایه برای فضای مماس است.

نتیجه: اگر صفحه در همه نقاط تقاطعش با یک رویه بر آن قائم باشد، فصل مشترک آنها یک ژئودزیک است.

اثبات- بنابر گزاره‌ای در جلسه ۱۶، انحنای ژئودزیک برش قائم صفر است.

مثال: هر خط راست در صفحه ژئودزیک است. (در واقع یک برش تام است.)

مثال- اگر قسمتی از خط راست روی یک رویه قرار بگیرد، ژئودزیک است. زیرا می‌توان با ضابطه $\gamma(t)=\vec{a}+\vec{b}t$ برچسب‌گذاری کرد و دید که $\ddot{\gamma}=0$.

مثال- روی کره همه دایره‌های عظیمه ژئودزیک هستند. (در حقیقت یک برش تام هستند.)

مثال- استوانه در راستای محور z، خطهای عمودی و دوایر موازی با صفحه xy ژئودزیک هستند.

معادلات ژئودزیک:

اگر $\gamma(t)=\sigma(u(t),v(t))$ مختصات خم γ در نقشه σ باشد،

$$\dot{\gamma}=\sigma_u\dot{u}+\sigma_v\dot{v}$$

بنابراین γ یک ژئودزیک است اگر و تنها اگر $\ddot{\gamma}\cdot\sigma_u=\ddot{\gamma}\cdot\sigma_v=0$

$$0=\ddot{\gamma}\cdot\sigma_u=\frac{d}{dt}(\sigma_u\dot{u}+\sigma_v\dot{v})\cdot\sigma_u=\frac{d}{dt}\left[(\sigma_u\dot{u}+\sigma_v\dot{v})\cdot\sigma_u\right]-(\sigma_u\dot{u}+\sigma_v\dot{v})\frac{d}{dt}\sigma_u$$

$$=\frac{d}{dt}\left[E\dot{u}+F\dot{v}\right]-(\sigma_u\dot{u}+\sigma_v\dot{v})(\sigma_{uu}\dot{u}+\sigma_{uv}\dot{v})$$

از طرفی

$$E_u = \frac{\partial}{\partial u}|\sigma_u|^2 = 2\,\sigma_u\cdot\sigma_{uu}$$

$$E_v = \frac{\partial}{\partial v}|\sigma_u|^2 = 2\,\sigma_u\cdot\sigma_{uv}$$

$$G_u = \frac{\partial}{\partial u}|\sigma_v|^2 = 2\,\sigma_v\cdot\sigma_{uv}$$

$$F_u = \frac{\partial}{\partial u}(\sigma_u\cdot\sigma_v) = \sigma_{uu}\cdot\sigma_v + \sigma_u\cdot\sigma_{uv} = \sigma_{uu}\cdot\sigma_v + \frac{1}{2}E_v$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[E\dot{u} + F\dot{v}\right] = \frac{1}{2}E_u(\dot{u})^2 + F_u\,\dot{u}\dot{v} + \frac{1}{2}G_u(\dot{v})^2$$

به طور مشابه از $\ddot{\gamma}\cdot\sigma_v = 0$ نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt}\left[F\dot{u} + G\dot{v}\right] = \frac{1}{2}E_v(\dot{u})^2 + F_v\,\dot{u}\dot{v} + \frac{1}{2}G_v(\dot{v})^2$$

دستگاه معادلات فوق که معادلات ژئودزیک نامیده می‌شوند، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم است که به ازای هر نقطه آغازین $\gamma(t_0) = \sigma(u(t_0), v(t_0))$ و سرعت اولیه $\dot{\gamma}(t_0) = \dot{u}(t_0)\sigma_u + \dot{v}(t_0)\sigma_v$ یک جواب یکتا دارد.

نتیجه: اگر p یک نقطه‌ای از رویه‌ی و T یک بردار مماس یکه بر S در نقطه p باشد، آنگاه یک ژئودزیکِ منحصر به فرد روی S وجود دارد که از نقطه p می‌گذرد و بر T مماس است. در ضمن سرعت ژئودزیک همیشه یک است.

مثال- معادلات ژئودزیک در صفحه عبارتند از: $\ddot{u} = \ddot{v} = 0$.

مثال- روی کره با نقشه $\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ و فرم اساسی نوع اول $d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2$

معادلات ژئودزیک عبارتند از:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\cos\theta\sin\theta\,(\dot{\varphi})^2 \\ (\cos^2\theta\,\dot{\varphi})' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta\,\dot{\varphi} = \Omega$$ مقدار ثابت

اگر فرض کنیم سرعت ژئودزیک یک است، آنگاه

$$\dot{\theta}^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\cos^2\theta} \Leftarrow \dot{\theta}^2 + \cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2 = 1$$

اگر $\dot{\varphi} \neq 0$ می‌توان روی خم θ را برحسب φ نوشت و آنگاه

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\right)^2 = \frac{1 - \Omega^2/\cos^2\theta}{\Omega^2/\cos^4\theta} = \Omega^{-2}\cos^4\theta - \cos^2\theta$$

اگر سمت راست مخالف صفر باشد،

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{d\varphi}{d\theta} = \pm \int \frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{\Omega^{-2}\cos\theta - 1}} = \sin^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{\Omega^{-2} - 1}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \pm\sqrt{\Omega^{-2} - 1}\,\sin(\varphi - \varphi_0)$$

اگر $x = \cos\theta\cos\varphi$ ، $y = \cos\theta\sin\varphi$ ، $z = \sin\theta$ آنگاه

$$z = ax + by$$

درنتیجه خم γ روی کره داخل صفحه فوق که از مبدأ می‌گذرد قرار می‌گیرد. یعنی یک دایره عظیمه است.

حالت $\dot{\varphi} = 0$ (ولو در یک نقطه) نتیجه خواهد داد که $\Omega = 0$ و $\dot{\varphi} = 0$ همه جا. یعنی φ ثابت است و خم γ دایره عظیمه نصف النهار است.

هندسه دیفرانسیل

جلسه بیست و سه ۹۷/۹/۱۲

قضیه: ایزومتری‌های موضعی بین دو رویه، ژئودزیک‌های یک رویه را به ژئودزیک‌های رویه دیگر تصویر می‌کند.

اثبات. اگر $f: S_1 \longrightarrow S_2$ ایزومتری باشد و $\sigma: U \longrightarrow S_1$ یک نقشه برای S_1، آنگاه فرم اساسی نوع اول σ با فرم اساسی نوع اول نقشه $f \circ \sigma$ برای S_2 برابر است. درنتیجه معادلات ژئودزیک هر دو یکسان است و بنابر یکتایی جواب معادله دیفرانسیل نتیجه می‌شود که اگر $\gamma_1(t) = \sigma(u(t), v(t))$ یک ژئودزیک روی S_1 باشد، (u و v در معادلات ژئودزیک صدق می‌کنند.) آنگاه $\gamma_2(t) = (f \circ \sigma)(u(t), v(t))$ نیز یک ژئودزیک روی S_2 خواهد بود.

مثال - استوانه $x^2 + y^2 = 1$ ایزومتر با صفحه تحت ایزومتری

$$\begin{cases} f(u,v) = (\cos u, \sin u, v) \\ f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \text{استوانه} \end{cases}$$

بنابراین تمام ژئودزیک‌های روی استوانه تصویر خطوط راست هستند. تصویر خط $v = au + b$ عبارتست از

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at + b)$$

یا تصویر خط $u = u_0$، خم ژئودزیک $\eta(t) = (\cos u_0, \sin u_0, t)$ است.

ژئودزیکِ رویه‌های دوار $\sigma(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$

که $(f')^2 + (g')^2 = 1$ ، $f>0$.

فرم اساسی نوع اول آن عبارت است از $du^2 + f(u)^2\, dv^2$.

با جایگذاری در معادلات ژئودزیک خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[E\dot{u} + F\dot{v}] = \dfrac{1}{2}E_u(\dot{u})^2 + F_u\dot{u}\dot{v} + \dfrac{1}{2}G_u(\dot{v})^2 \\ \dfrac{d}{dt}[F\dot{u} + G\dot{v}] = \dfrac{1}{2}E_v(\dot{u})^2 + F_v\dot{u}\dot{v} + \dfrac{1}{2}G_v(\dot{v})^2 \end{cases}$$

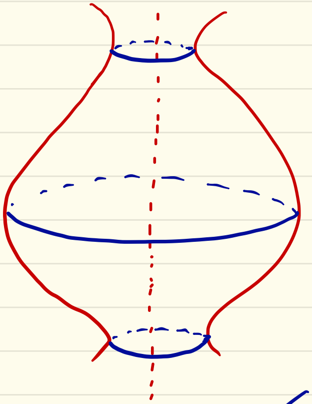
$$\begin{cases} \ddot{u} = f'(u)f(u)\,\dot{v}^2 \\ \dfrac{d}{dt}\left(f(u)^2\dot{v}\right) = 0 \end{cases}$$

به راحتی می‌توان دید که $v=$ ثابت و $u=at+b$ در معادلات ژئودزیک صدق می‌کند

در نتیجه هر نصف‌النهار یک ژئودزیک است.

اگر قرار باشد مدار $u=u_0$ (u_0 ثابت) یک ژئودزیک باشد، آنگاه باید

$$\begin{cases} f'(u_0)\, f(u_0)\, \dot{v}^2 = 0 \\ f(u_0)^2\, \ddot{v} = 0 \end{cases}$$

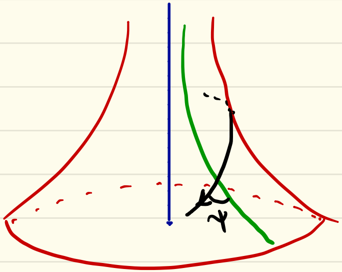


چون $f>0$ در نتیجه $\ddot{v}=0$ و $v=at+b$. از معادله اول نتیجه خواهد شد که

$$f'(u_0)=0$$

قضیه: فرض کنید که یک رویه دوار حول محور z باشد و $\rho : S \to \mathbb{R}$ فاصله تا محور z را نشان دهد.

اگر γ یک خم با سرعت واحد روی S یک ژئودزیک باشد، آنگاه $\rho \sin\psi$ در امتداد γ ثابت است که ψ زاویه بین $\dot{\gamma}$ و نصف‌النهار گذرا از نقطه $\gamma(t)$ است. برعکس اگر $\rho\sin\psi$ ثابت باشد و هیچ قسمتی از γ بر بخشی از یک منطبق نباشد، γ یک ژئودزیک است.



یادآوری: وقتی مسیر حرکت یک ذره ژئودزیک باشد، تنها نیروی وارد بر آن، نیروی عمود بر رویه است.

درنتیجه این بردار در صفحه گذرا از محور z ، و قرار می‌گیرد.

اثبات- $\rho = f(u)$. بردار مماس بر نصف النهار برابر σ_u است . درحقیقت σ_v بردار مماس بر مدارها .

$$\dot{\gamma} = \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v$$

زاویه $\dot{\gamma}$ و σ_u برابر ψ است .

$$\dot{\gamma} \cdot \sigma_u = \underbrace{|\dot{\gamma}|}_{=1} \underbrace{|\sigma_u|}_{=1} \cos\psi \implies \alpha = \cos\psi$$

$$|\dot{\gamma}| = 1 \implies \beta = \rho^{-1} \sin\psi$$

$$(1) \qquad \dot{\gamma} = \cos\psi \, \sigma_u + \rho^{-1} \sin\psi \, \sigma_v$$

از طرفی معادلات ژئودزیک عبارتند از $\ddot{u} = f'(u) \rho \dot{v}^2$ و $(\rho^2 \dot{v})' = 0$

درحقیقت نشان می‌دهیم $\rho \dot{v} = \sin\psi$ و از معادله دوم بالا قضیه اثبات می‌شود .

$$\dot{\gamma} = \dot{u} \sigma_u + \dot{v} \sigma_v \xRightarrow{(1)} \begin{cases} \dot{v} = \rho^{-1} \sin\psi \\ \dot{u} = \cos\psi \end{cases}$$

برعکس اگر $\rho \sin\psi$ ثابت باشد، آنگاه $\rho^2 \dot{\theta}$ ثابت است و معادله دوم ژئودزیک برقرار است. تنها باید درستی معادله اول را نشان دهیم. قرار دهید $\rho \sin\psi = \Omega$ که عددی ثابت است.

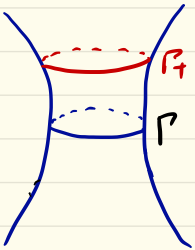
$$(\dot{u})^2 = (\cos\psi)^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\rho^2} \Rightarrow 2\ddot{u}\dot{u} = 2\Omega^2 \rho^{-3} \dot{\rho} \qquad (2)$$

باید نشان دهیم $\ddot{u} = \rho \rho_u \dot{\theta}^2$ و $\dot{\theta} = \frac{\Omega}{\rho^2}$ یعنی باید ثابت کنیم $\ddot{u} = \Omega^2 \rho_u \rho^{-3}$

با استفاده از تساوی $\dot{\rho} = \rho_u \cdot \dot{u}$ و عبارت (2) این مطلب اثبات می‌شود به شرط آنکه $\dot{u} \neq 0$.

نکته: اگر α یک ژئودزیک با گشتاور زاویه‌ای $\rho \sin\psi = \Omega$ باشد که $\Omega > 0$. $\rho \geq \Omega \Leftarrow$. تا مادامیکه $\rho > \Omega$ ژئودزیک تمام مدارها را قطع می‌کند. به عنوان مثال اگر تمام نقاط رویه فاصله‌اش از محور z بزرگتر از Ω باشد، هر ژئودزیک تمام مدارهای رویه را قطع می‌کند. زیرا در غیر این صورت اگر $u = u_0$ کوچکترین کران بالای یک مدار برای این ژئودزیک باشد، در همسایگی $u = u_0$ داریم $\dot{u} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\rho^2}} \geq \varepsilon > 0$ و در نتیجه u باید مدار $u = u_0$ را قطع کند.

مثال - هذلولی‌گون یکپارچه که از دوران هذلولی $x^2 - z^2 = 1$ حول محور z به دست آمده است را در نظر بگیرید



فاصله همه نقاط از محور z بزرگتر یا مساوی یک است. در نتیجه اگر ژئودزیکی با گشتاور Ω داشته باشیم

که $1 > \Omega \geq 0$ همه مدارها را قطع می‌کند و از $z=-\infty$ تا $z=+\infty$ امتداد دارد.

اگر $\Omega > 1$ باشد، آنگاه روی خم ژئودزیک باید

$$z \geq \sqrt{\Omega^2-1}$$

یا

$$z \leq -\sqrt{\Omega^2-1}$$

(زیرا $\Omega \leq \rho = \sqrt{z^2+1}$) مدار $z=\sqrt{\Omega^2-1}$ را با P^+ نشان می‌دهیم که یک کران پایین برای

ژئودزیک‌های با گشتاور Ω که در نیمه بالایی هستند، خواهد بود. روی P^+، $\dot{u}=0$ و در بالای آن همواره $|\dot{u}|>0$.

لذا از یک طرف خم ژئودزیک به $z=+\infty$ میل می‌کند. از طرف دیگر $\ddot{u} = \Omega^2 \rho_u \rho^{-3}$ که همواره از صفر فاصله دارد. (با توجه به قرار گرفتن خم روی نیمه بالایی

یا پایینی علامت آن مثبت یا منفی است.) لذا وقتی t از $-\infty$ به $+\infty$ تغییر می‌کند $\dot{u}$ نیز از $-\infty$ به $+\infty$ تغییر می‌کند (اگر روی

نیمه بالایی باشیم وگرنه از $+\infty$ به $-\infty$ می‌رود) در نتیجه در این حالت ژئودزیک در یک نقطه به P_+ مماس می‌شود و دوباره به $z=+\infty$ میل می‌کند.

دقت کنید $\dot{\theta} = \frac{\Omega}{\rho^2} > 0$ یعنی در امتداد ژئودزیک‌ها θ صعودی است و همه نصف‌النهارها را به کرات قطع می‌کند.

در حالت $\Omega=1$، کمر هذلولی گون P یک ژئودزیک با گشتاور $\Omega=1$ است. در ضمن ژئودزیک دیگری با گشتاور $\Omega=1$ وجود ندارد. ابتدا توجه کنید اگر ژئودزیک دیگری با P در نقطه p اشتراک داشته باشد باید در این نقطه $p\sin\psi=1$ و چون $p=1$ باید $\psi=\frac{\pi}{2}$

یعنی بردار مماس ژئودزیک همراستا P باشد. با توجه به یکتایی ژئودزیک، باید کاملاً بر P منطبق باشد.

در نتیجه اگر ژئودزیک دیگری با $\Omega=1$ داشته باشیم هیچ موقع P را قطع نمی‌کند و مشابه استدلال قبل باید به طور مجانبی به P همگرا شود و حول آن بچرخد.

نکته: در هر نقطه‌ای از رویه می‌توان ژئودزیکی با گشتاور Ω گذراند به شرط آنکه $p \geq \Omega$ باشد.

هندسه دیفرانسیل

جلسه بیست و چهار ۹۷/۹/۱۷

ژئودزیک‌ها کوتاه‌ترین مسیر هستند.

این تعبیر از ژئودزیک به معنای موضعی درست است. به عنوان مثال وقتی روی کره هستیم دایره‌های عظیمه ژئودزیک هستند و روی یک دایره عظیمه بین دو نقطه تنها کمان کوچک‌تر، کوتاه‌ترین فاصله را ارائه می‌کند و حتی کمان بزرگ‌تر نیز یک ژئودزیک است.

اگر p و q دو نقطه روی رویه که در یک نقشه σ باشند. درحقیقت اگر خم γ کوتاه‌ترین مسیر بین p و q را ارائه کند، آنگاه γ ژئودزیک است. فرض کنید

$$\sigma(\tilde{p})=p \,,\quad \sigma(\tilde{q})=q$$

اگر $\tilde{\gamma}:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^2$ که $\gamma=\sigma\circ\tilde{\gamma}$. درحقیقت $\tilde{\gamma}(a)=\tilde{p}\,,\ \tilde{\gamma}(b)=\tilde{q}$

$$X=\{\eta:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^2 \ :\ \eta(a)=\eta(b)=0\}$$

خم‌های $\tilde{\gamma}+\eta$ به ازای هر $\eta\in X$ فضای همه خم‌هایی را ارائه می‌کند که دو نقطه $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$ را به هم وصل می‌کند.

وقتی به دنبال کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه p و q هستیم باید از بین $\sigma(\tilde{\gamma}+\eta)$ کمترین طول را انتخاب کنیم.

$$\mathcal{L}(\eta) = \sigma(\tilde{\gamma}+\eta) \quad \text{طول خم} \quad = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt}\sigma(\tilde{\gamma}+\eta) \right\| dt$$

$$= \int_a^b \left| E\dot{U}^2 + 2F\dot{U}\dot{V} + G\dot{V}^2 \right|^{1/2} dt$$

که $\tilde{\gamma}+\eta = (U,V) = (\tilde{u}+u, \tilde{v}+v)$

X یک فضای برداری بعد نامتناهی است و $\mathcal{L}: X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر است

و $D\mathcal{L}(\eta_0)=0$ است هرگاه می‌نیمم $\mathcal{L}$ در η_0 به دست بیاید.

در این صورت باید به ازای هر $\eta \in X$ دلخواه $\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\eta_0+\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$ ← مشتق جهتی $\mathcal{L}$ در راستای η

قضیه: γ یک خم با سرعت واحد روی S یک ژئودزیک است اگر و تنها اگر $\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$ به ازای هر $\eta \in X$.

نکته: درحقیقت اگر γ کوتاه‌ترین مسیر بین p و q باشد، آنگاه γ ژئودزیک است.

قضیه فوق بیان می‌کند که اگر γ ژئودزیک باشد، در فضای همه خم‌های بین دو نقطه p و q مشتق طول صفر است.

این به معنای این نیست که طول γ می‌نیمم است.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b \left| E(\dot{\tilde u}+\varepsilon\dot u)^2 + 2F(\dot{\tilde u}+\varepsilon\dot u)(\dot{\tilde v}+\varepsilon\dot v) + G(\dot{\tilde v}+\varepsilon\dot v)^2 \right|^{1/2} dt\,\Bigg|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_a^b \underbrace{\left| E\dot{\tilde u} + 2F\dot{\tilde u}\dot{\tilde v} + G\dot{\tilde v} \right|^{-1/2}}_{=1} A(u,v)\,dt$$

چون سرعت $\tilde\gamma$ واحد است.

$$A(u,v) = E\dot{\tilde{u}}\dot{u} + F(\dot{\tilde{u}}\dot{v} + \dot{u}\dot{\tilde{v}}) + G\dot{\tilde{v}}\dot{v}$$
$$+\frac{1}{2}\Big[(E_u u + E_v v)\dot{\tilde{u}}^2 + 2(F_u u + F_v v)\dot{\tilde{u}}\dot{\tilde{v}} + (G_u u + G_v v)\dot{\tilde{v}}^2\Big]$$

که منظور از E_u ، F_u و G_u مشتق نسبت به مؤلفه اول این توابع است.

از طرفی می‌دانیم α ژئودزیک است اگر و تنها اگر معادلات ژئودزیک به صورت زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(E\dot{\tilde{u}} + F\dot{\tilde{v}}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{\tilde{u}}^2 + 2F_u\dot{\tilde{u}}\dot{\tilde{v}} + G_u\dot{\tilde{v}}) \\ \\ \frac{d}{dt}(F\dot{\tilde{u}} + G\dot{\tilde{v}}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{\tilde{u}}^2 + 2F_v\dot{\tilde{u}}\dot{\tilde{v}} + G_v\dot{\tilde{v}}^2) \end{cases}$$

در حقیقت ثابت می‌کنیم این معادلات معادل این است که عبارت زیر به ازای هر u,v که $\eta = (u,v) \in X$ برقرار باشد:

$$\int_a^b A(u,v)\,dt = 0 \qquad (*)$$

از لزوم $(*)$ معادل این است که

$$\int_a^b u\, B(\tilde u,\tilde v) + v\, C(\tilde u,\tilde v)\, dt = 0$$

به ازای هر u و v دلخواه که $u(a)=u(b)=0=v(a)=v(b)$ که نتیجه می‌دهد

$$B = C = 0$$

$$B = -\frac{d}{dt}\left(E\dot{\tilde u} + F\dot{\tilde v}\right) + \frac{1}{2}\left[E_u \dot{\tilde u}^2 + 2F_u \dot{\tilde u}\dot{\tilde v} + G_u \dot{\tilde v}\right]$$

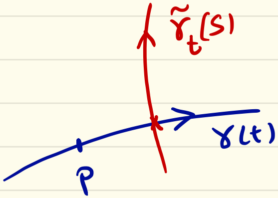
در نتیجه $B=0$ اگر و تنها اگر معادله اول ژئودزیک برقرار باشد.

به طور مشابه $C=0$ اگر و تنها اگر معادله دوم ژئودزیک برقرار باشد.

مختصات ژئودزیک

از آنجا که تعبیر ژئودزیک خطوط راست روی رویه هستند، دستگاه مختصاتی می‌توانیم بسازیم که به آن مختصات ژئودزیک گفته می‌گردد.

در واقع برای هر نقطه دلخواه p، ژئودزیک γ را در نظر بگیرید که $\gamma(0)=p$ و سرعت γ واحد باشد.



از نقطه $\gamma(t)$ ژئودزیک $\tilde{\gamma}_t$ می‌گذرد که سرعت آن واحد است و

$$\tilde{\gamma}_t(0)=\gamma(t)\ ,\quad \frac{d}{ds}\tilde{\gamma}_t(0)\cdot\dot{\gamma}(t)=0$$

آنگاه قرار دهید:

$$\sigma(u,v)=\tilde{\gamma}_v(u)$$

گزاره: تابع σ یک نقشه در یک همسایگی p ارائه می‌کند که فرم اساسی نوع اول آن $du^2+G(u,v)\,dv^2$ است که G یک تابع هموار است و $G(0,v)=1$ و $G_u(0,v)=0$.

اثبات - σ یک تابع هموار از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^3$ تعریف شده است. اگر رتبه مشتق σ در مبدأ برابر ۲ باشد در یک همسایگی آن نیز

این اتفاق می‌افتد. (چرا؟) در نتیجه σ یک نقشه در همسایگی $\sigma(0,0)=p$ ارائه می‌کند.

$$\sigma_u(0,0) = \frac{d}{dt}\sigma(t,0)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} = \dot{\gamma}(0)$$

$$\sigma_v(0,0) = \frac{d}{ds}\sigma(0,s)\Big|_{s=0} = \dot{\tilde{\gamma}}_0(0)$$

که با توجه به تعریف خم $\tilde{\gamma}_t$ ، $\sigma_t(0,0)$ و $\sigma_s(0,0)$ بر هم عمود هستند. در نتیجه رتبه $D\sigma(0,0)$ برابر ۲ است.

برای محاسبه فرم اساسی نوع اول σ باید نشان دهیم: $|\sigma_u| = 1$ که با توجه به اینکه $\tilde{\gamma}_t$ خم با سرعت واحد است

این رابطه همیشه برقرار است:
$$|\sigma_u| = \left|\frac{d}{ds}\tilde{\gamma}_t\right| = 1$$

همچنین باید اثبات کنیم: $\sigma_u \cdot \sigma_v = 0$

وقتی روی ژئودزیک $\tilde{\gamma}_v(u)$ حرکت می‌کنیم مختصات v ثابت است و u تغییر می‌کند. در نتیجه از معادلات ژئودزیک داریم:

$$\frac{d}{dt}(F\dot{u}+G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2+2F_v\dot{u}\dot{v}+G_v\dot{v}^2)$$

و از آنجا که $E=1$ نتیجه می‌شود $\frac{d}{dt}F=0$ بنابراین F روی خم $\tilde{\gamma}_v(u)$ ثابت است ولی به ازای $u=0$ داریم

$\sigma_u(0,v)\cdot\sigma_v(0,v)=0$ زیرا $\tilde{\gamma}_v$ را بدین گونه ساختیم که در راستای عمود بر γ حرکت کند.

در نتیجه $F=0$ در همه نقاط.

به علاوه از آنجا که سرعت γ واحد است داریم:

$$G(0,v) = |\sigma_v(0,v)|^2 = |\dot{\gamma}(v)|^2 = 1$$

برای اثبات $G_u(0,v)=1$ معادله اول ژئودزیک را برای خم $\gamma(v)$ بنویسید. روی این خم $u=0$ است

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u}+F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2+2F_u\dot{u}\dot{v}+G_u\dot{v}^2)$$

که نتیجه می‌شود $G_u(0,v)=0$.

هندسه دیفرانسیل

مطلب بیست و پنج ۹۷/۹/۱۹

قضیه شگفت انگیز گاوس :

انحنای گاوسی یک رویه تحت ایزومتری موضعی، حفظ می‌شود.

نکته: ایزومتری فرم اساسی نوع اول را حفظ می‌کند و انحنای گاوسی که به فرم اساسی نوع دوم مرتبط است. قضیه فوق بیان می‌کند که انحنای گاوسی یک خاصیت ذاتی است.

نتیجه: هیچ نقشه‌ای از زمین (یا قسمتی از کره زمین) وجود ندارد که فاصله‌ها را با نسبت یکسان حفظ کند.

نکته: نقشه‌ای از زمین وجود دارد که زاویه‌ها حفظ شود. یا حتی مساحت ثابت باشد. ولی نمی‌توان طول‌ها را ثابت نگه داشت.

یادآوری: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$

معادلات گداتسی - ماینارد ی:

اگر $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ و $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ فرم‌های اساسی نوع اول و دوم نقشه $\sigma(u,v)$ باشند، آن‌گاه

$$L_v - M_u = L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2$$

$$M_v - N_u = L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2$$

که Γ_{ij}^k ضرایب کریستوفل هستند و تنها به فرم اساسی نوع اول وابسته‌اند.

یادآوری :

$$\begin{cases} \sigma_{uu} = \Gamma_{11}^{1}\sigma_u + \Gamma_{11}^{2}\sigma_v + L\vec{N} \\ \sigma_{uv} = \Gamma_{12}^{1}\sigma_u + \Gamma_{12}^{2}\sigma_v + M\vec{N} \\ \sigma_{vv} = \Gamma_{22}^{1}\sigma_u + \Gamma_{22}^{2}\sigma_v + N\vec{N} \end{cases}$$

معادلات گاوس :

$$\begin{cases} EK = (\Gamma_{11}^{2})_v - (\Gamma_{12}^{2})_u + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} - (\Gamma_{12}^{2})^2 \\ FK = (\Gamma_{12}^{1})_u - (\Gamma_{11}^{1})_v + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} \\ FK = (\Gamma_{12}^{2})_v - (\Gamma_{22}^{2})_u + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{2} \\ GK = (\Gamma_{22}^{1})_u - (\Gamma_{12}^{1})_v + \Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{1} + \Gamma_{22}^{2}\Gamma_{12}^{1} - (\Gamma_{12}^{1})^2 - \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1} \end{cases}$$

اثبات قضیه گاوس: تحت ایزومتری فرم اساسی نوع اول ثابت می‌ماند و در نتیجه ضرایب کریستوفل هم. از معادلات گاوس نتیجه می‌شود که K تنها به فرم اساسی نوع اول وابسته است و در نتیجه تحت ایزومتری تغییر نمی‌کند.

اثبات معادلات کداتسی-ماینارِدی :

$$(\sigma_{uu})_v = (\sigma_{uv})_u$$

$$(\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + L\vec{N})_v = (\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + M\vec{N})_u$$

$$(*)\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} - \dfrac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u}\right)\sigma_u + \left(\dfrac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \dfrac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u}\right)\sigma_v + (L_v - M_u)\,\vec{N} \\ \quad + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\,\sigma_{uv} + \Gamma_{11}^2\,\sigma_{vv} - \Gamma_{12}^1\,\sigma_{uu} + L\vec{N}_v - M\vec{N}_u = 0 \end{cases}$$

ضرب $\vec{N}$ را در رابطه بالا محاسبه کنید : (دقت کنید $\vec{N}_u$ و $\vec{N}_v$ بر $\vec{N}$ عمود هستند)

$$L_v - M_u = M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 + L\Gamma_{12}^1$$

معادله دوم از رابطه $(\sigma_{vv})_u = (\sigma_{uv})_v$ به دست می آید.

اثبات معادلات گاوس: در رابطه (*) ضریب σ_u را محاسبه کنید. از طرفی می‌دانیم که

$$\begin{cases} -N_u = a\,\sigma_u + b\,\sigma_v \\ -N_v = c\,\sigma_u + d\,\sigma_v \end{cases} \quad , \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{12}\left(\cancel{\Gamma^1_{11}} - \Gamma^2_{12}\right) + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \cancel{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12}} - cL + aM = 0$$

$$cL - aM = \frac{(MG-NF)L - (LG-FM)M}{EG-F^2} = -KF$$

$\Rightarrow$ معادله دوم گاوس

بقیه معادلات از محاسبه ضرایب σ_v در $(\sigma_{uu})_v = (\sigma_{uv})_u$ و σ_u و σ_v در $(\sigma_{uv})_v = (\sigma_{vv})_u$ به دست می‌آید.

قضیه - فرض کنید σ و $\tilde{\sigma}$ دو نقشه برای دو رویه‌ی یکه و آنچه باشند، به طوری که فرم‌های اساسی نوع اول و دوم هر دو یکسان باشند،

آنگاه ایزومتری M در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد به طوری که $\tilde{\sigma} = M(\sigma)$.

برعکس اگر توابع هموار E، F، G، L، M و N در باز U داده شده باشند که $E>0$، $F>0$، $EG-F^2>0$ و

شش معادله گاوس و کداتسی-مایناردی وقتی در آن قرار دهیم $K = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$ برقرار باشند، آنگاه رویه $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$

وجود دارد به طوری که $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ فرم اساسی نوع اول آن و $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ فرم اساسی نوع دوم

آن باشد.

مثال- می‌خواهیم ببینیم که چه رویه‌ای فرم‌های اساسی نوع اول و دوم آن به ترتیب $du^2 + dv^2$ و $-du^2$ است.

$$L = -1 \quad , M = N = G = 0 \quad , E = F = 1$$

به وضوح شرایط قضیه برای این ضرایب برقرار است. (دقت کنید $K=0$ ، $\Gamma_{ij}^{k} = 0$)

$$\sigma_{uu} = -\vec{N} \quad , \quad \sigma_{uv} = \sigma_{vv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_v \equiv \text{تابع ثابت} = \vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(u,v) = \vec{a}\,v + \vec{b}(u)$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{b}'(u)|^2 = 1 \;, \quad |\vec{a}| = 1 \;, \quad \vec{a}\cdot\vec{b}' = 0$$

$$b''(u) = -\vec{N} = -(b' \times \vec{a}) \;\Rightarrow\; b''' = -b'' \times \vec{a} = (b' \times \vec{a}) \times \vec{a} = -b'$$

$$\Rightarrow \quad b''' + b' = 0 \;\Rightarrow\; b(u) = \vec{c}\cos u + \vec{d}\sin u$$

$$1 = |b'(u)|^2 = |-\vec{c}\sin u + \vec{d}\cos u|^2 = |c|^2 \sin^2 u + |d|^2 \cos^2 u - 2\vec{c}\cdot d \sin u \cos u$$

$$\Rightarrow \quad |c| = |d| = 1 \;, \quad c\cdot d = 0$$

در واقع باید $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\}$ پایه متعامد یکه باشد و آنگاه $\sigma(u,v) = \vec{a}\,v + \vec{c}\cos u + \vec{d}\sin u$

فرم‌های اساسی نوع اول و دوم داده شده را دارا است.

هندسه دیفرانسیل

جلسه بیست و هفت ۹۷/۹/۲۶

رویه‌های مینیمال

اگر خم بسته‌ای در $\mathbb{R}^3$ داده شده باشد. به دنبال رویه‌ای هستیم که مرز آن، این خم باشد و کمترین مساحت را داشته باشد.

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ داده شده باشد و $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ آن خم بسته را در $\mathbb{R}^3$ ارائه کند.

به دنبال نقشه $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^3$ هستیم که $\sigma|_{\partial\Omega} = f$ و مساحت رویه σ کمترین مساحت را داشته باشد.

اگر حداقل یک تابع هموار $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ وجود داشته باشد که $F|_{\partial\Omega} = f$.

مساحت رویه σ با فرمول زیر به دست می‌آید:

$$I(\sigma) = \int_{\Omega} \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du\, dv$$

$$X = \{ \rho : \Omega \to \mathbb{R}^3 \; : \; \rho|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

فضای برداری

وقتی سطح σ مینیمال هست باید تابع $\varphi(t) = I(\sigma + tp)$ بازای یک $p \in X$ دلخواه، مینیمم خود را در نقطه $t=0$ اتخاذ می‌کند. بنابراین باید

$$0 = \varphi'(0) = \frac{d}{dt} I(\sigma + tp)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \|(\sigma_u + tp_u) \times (\sigma_v + tp_v)\| \, du\, dv \Big|_{t=0}$$

$$= \int_{\Omega} \left[(p_u \times \sigma_v) + (\sigma_u \times p_v)\right] \cdot \frac{(\sigma_u \times \sigma_v)}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \, du\, dv$$

$$= \int_{\Omega} \left[(p_u \times \sigma_v) + (\sigma_u \times p_v)\right] \cdot \vec{N} \, du\, dv$$

$$= \int_{\Omega} (\sigma_v \times \vec{N}) \cdot p_u + (\vec{N} \times \sigma_u) \cdot p_v \, du\, dv$$

اکنون به کمک رابطه انتگرال‌گیری جزء به جزء به صورت زیر

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v \, dx = -\int_{\Omega} u v_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, d\sigma \qquad \vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$$

بردار عمود بر $\partial\Omega$

می‌توانیم نتیجه بگیریم که : ($p|_{\partial\Omega} = 0$ دقت کنید)

$$0 = \int_{\Omega} (\sigma_v \times \vec{N})_u \cdot p + (\vec{N} \times \sigma_u)_v \cdot p \; du\, dv$$

رابطه بالا به ازای هر $p \in X$ دلخواه برقرار است. درنتیجه باید

$$(\sigma_v \times \vec{N})_u + (\vec{N} \times \sigma_u)_v = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \cancel{\sigma_{vu} \times \vec{N}} + \sigma_v \times \vec{N}_u + \vec{N}_v \times \sigma_u + \cancel{\vec{N} \times \sigma_{uv}} = 0$$

اگر داشته باشیم

$$\begin{cases} -N_u = a\sigma_u + b\sigma_v \\ -N_v = c\sigma_u + d\sigma_v \end{cases}$$

که $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ماتریس نگاشت وینگارتن در پایه $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ است.

$$0 = \sigma_v \times N_u + \vec{N}_v \times \sigma_u = -a(\sigma_v \times \sigma_u) - d(\sigma_v \times \sigma_u)$$

در نتیجه باید $a+d=0$ و از آنجا که $H = \frac{a+d}{2}$ انحنای میانگین است، نتیجه می‌شود که

قضیه: اگر σ از بین رویه‌های همواری که مرز ثابتی دارند کمترین مساحت را داشته باشد، انحنای میانگین آن صفر است.

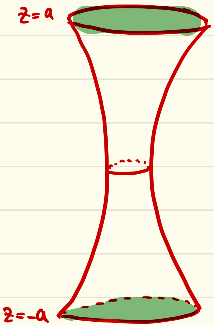
نکته: محاسبات قبل نشان می‌دهد که

$$\varphi'(0) = \frac{d}{dt} I(\sigma + t\rho)\Big|_{t=0} = \int_{\Omega} 2H\,(\sigma_u \times \sigma_v)\cdot \rho \, du\,dv$$

$$= \int_{\Omega} 2H\,(EG-F^2)^{1/2}\,(\rho\cdot \vec{N})\, du\,dv$$

یکی از مثال‌های کلاسیک رویه‌های مینیمال حباب‌های صابون هستند. اگر p فشار وارده بر سطح باشد، در ناحیه به اندازه ΔA نیروی وارده $p\Delta A$ است. اگر جابجایی آن را با ρ اندازه بگیریم مقدار کار انجام شده برابر $p\Delta A(\rho\cdot\vec{N})$ است.

از طرفی تغییرات مساحت بنابر رابطه بالا برابر است با $2H\,\Delta A\,(\rho\cdot\vec{N})$. در نتیجه باید p متناسب H باشد. در شکل‌گیری یک حباب صابون تغییرات فشار روی سطح وجود ندارد، بنابراین باید انحنای میانگین آن همه جا صفر باشد.



نکته - برعکس قضیه فوق صحیح نیست. یعنی لزوماً رویه‌ای با میانگین صفر، کمترین مساحت را ندارند.

مثال - خم $x=\cosh z$ را حول محور z دوران دهید. رویه حاصل را کاتنوئید یا زنجیره‌وار می‌نامیم.

$$\sigma(u,v)=(\cosh u\cos v,\ \cosh u\sin v,\ u)$$

با محاسبه ساده می‌توان دید که $E=G=\cosh^2 u$, $F=0$ ، $L=-1$ ، $M=0$ و $N=1$.

در نتیجه انحنای میانگین برابر است با

$$2H = tr\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}=tr\begin{pmatrix}E^{-1}&0\\0&G^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=G^{-1}-E^{-1}=0$$

اگر این رویه را در ناحیه $|z|<a$ در نظر بگیریم، مرز آن دو دایره به شعاع $\cosh a$ است.

مساحت آن در این قسمت عبارتست از:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-a}^{a} (EG-F^2)^{1/2}\, du\, dv = 2\pi \int_{-a}^{a} \cosh^2 u \, du$$

$$= 2\pi\,(a + \sinh a \cosh a)$$

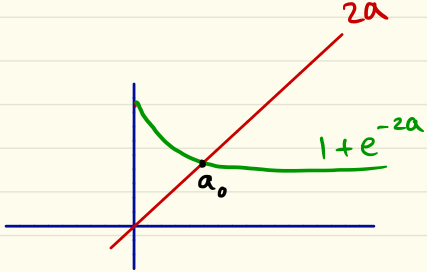
از طرف دیگر دو دیسکِ به شعاع $\cosh a$ هم مرز با این رویه هستند که در شکل صفحه قبل با رنگ سبز نشان داده شده است.

مساحت آنها برابر است با $\quad 2\pi(\cosh a)^2$

برای آنکه رویهِ کاتنوید مساحت کمتری داشته باشد

$$2\pi(a+\sinh a\cosh a) < 2\pi(\cosh a)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1+e^{-2a} > 2a$$



اگر $a<a_0$ رویهِ کاتنوید مینیمال است و اگر $a>a_0$ دو دیسک مساحت کمتری دارند.

مثال- رویه با انحنای میانگین صفر. رویه دوار $\sigma(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ را در نظر بگیرید که

$(f(u),0,g(u))$ یک خم با سرعت واحد در صفحه xz است و $f>0$.

فرم های اساسی نوع اول و دوم آن به ترتیب عبارتند از

$$du^2+f(u)^2dv^2 \qquad (\dot f\ddot g-\ddot f\dot g)\,du^2+f\dot g\,dv^2$$

انحنای میانگین برابر است با

$$H=\frac{1}{2}\left(\dot f\ddot g-\ddot f\dot g+\frac{\dot g}{f}\right)$$

اگر انحنای میانگین صفر باشد باید معادله

$$\dot f\ddot g-\ddot f\dot g+\dot g/f=0$$

را حل کنیم

در ضمن شرط $(\dot f)^2+(\dot g)^2=1$ داریم.

$$\dot f\ddot f+\dot g\ddot g=0$$

فرض کنید $\dot g(u_0)\neq 0$ برای یک مقدار u_0 بنابراین در یک همسایگی u_0 نیز ناصفر است. (α,β) را بزرگترین بازه‌ای حول u_0

بگیرید که در آن $\dot g$ مخالف صفر است. پس در آن بازه داریم:

$$\ddot g=-\frac{\dot f\ddot f}{\dot g}$$

$$-(\dot f)^2 \ddot f - \ddot f (\dot g)^2 + \frac{(\dot g)^2}{f} = 0$$

$$\Rightarrow -(\dot f)^2 \ddot f + \left(\frac{1}{f} - \ddot f\right)\left(1-(\dot f)^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot f = \frac{1-(\dot f)^2}{f} \qquad (*)$$

قرار دهید $h = \dot f$.

$$\frac{dh}{df} = \frac{dh}{du} \Big/ \frac{df}{du} = \frac{\ddot f}{\dot f} = \frac{\ddot f}{h}$$

$$h\frac{dh}{df} = \frac{1-h^2}{f} \Rightarrow \int \frac{h\,dh}{1-h^2} = \int \frac{df}{f}$$

$$\Rightarrow \quad h(f) = \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af}$$

که a یک ثابت غیرصفر است.

$$\Rightarrow \quad \dot{f} = \frac{\sqrt{a^2f^2-1}}{af} \quad \Rightarrow \int \frac{af\,df}{\sqrt{a^2f^2-1}} = \int du$$

$$\Rightarrow \quad f(u) = \frac{1}{a}\sqrt{1+a^2(u+b)^2}$$

به ازای یک مقدار ثابت b.

همه جواب‌های $(*)$ به صورت بالا هستند. با تغییر متغیر $u \longrightarrow u+b$ می‌توان فرض کرد $b=0$.

$$f(u) = \frac{1}{a}\sqrt{1+a^2u^2}$$

$$\Rightarrow \quad (\dot{g})^2 = 1-(\dot{f})^2 = \frac{1}{1+a^2u^2} \quad \Rightarrow \quad g(u) = \pm\frac{1}{a}\sinh^{-1}(au) + c$$

که c یک مقدار ثابت است. در نتیجه باید

$$au = \pm\sinh\left(a(g-c)\right)$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{a}\cosh\left(a(g-c)\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{a}\cosh\left(a(z-c)\right)$$

بنابراین در این حالت رویه دوار همان زنجیره‌وار یا کاتنوید است. (این محاسبات تا زمانی که $\dot g \neq 0$ معتبر است)

اگر (α,β) بزرگترین بازه‌ای باشند که $\dot g \neq 0$ بنابراین باید $\dot g(\beta) = \dot g(\alpha) = 0$ و بنابر محاسبات بالا

در این بازه $\dot g(u) = \dfrac{1}{1+a^2u^2}$ که نمی‌تواند رابطه $\dot g(\beta) = \dot g(\alpha) = 0$ درست باشد، پس $\alpha = -\infty$ و $\beta = +\infty$

در نتیجه تنها حالت باقیمانده این است که $\dot g \equiv 0$ در همه نقاط. یعنی $g(u) = $ ثابت در نتیجه $(f(u), 0, g(u))$ خم

در صفحه ثابت z قرار دارد و دوران آن یک بخشی از صفحه است.

نتیجه - هر رویه دوار با انحنای میانگین صفر، یک زیرمجموعه از صفحه یا یک کاتنوید (زنجیره‌وار) است.

هندسه دیفرانسیل

جلسه بیست و هشت ۹۷/۱۰/۱

نگاشت گاوس روی رویه‌های مینیمال

اگر S رویه جهت‌پذیر باشد، $G: S \longrightarrow S^2$ نگاشت گاوس است که $G(p) = N_p$ برای تمامی بر رویه S

را نشان می‌دهد. اگر $W = -DG : T_pS \longrightarrow T_pS$ نگاشت وینگارتن باشد، $\frac{1}{2}\operatorname{tr} W = H$

انحنای میانگین و $K = \det W$ انحنای گاوسی است.

گزاره: اگر انحنای گاوسی S در نقطه p ناصفر باشد، آنگاه نگاشت گاوس یک دیفئومورفیسم موضعی در همسایگی p خواهد بود.

اثبات _ با توجه به تساوی $T_pS = T_{G(p)}S^2$ و اینکه $K(p) \neq 0$ پس DG در نقطه p وارون‌پذیر است و بنابر قضیه تابع وارون گزاره بالا برقرار است.

قضیه: اگر S یک رویه‌ی مینیمال باشد با انحنای گاوسی غیرصفر، آنگاه نگاشت گاوس یک همدیسی از S به S^2 است.

اثبات.
$$g : S \longrightarrow S^2$$

$$v, w \in T_pS : \quad g^*\langle v, w\rangle = \langle Dg(p)v \,,\, Dg(p)w\rangle$$
$$= \langle -W(v) \,,\, -W(w)\rangle$$
$$= \langle W^2(v) \,,\, w\rangle$$

تساوی آخر به علت خودالحاق بودن W برقرار است.

از طرفی $\det W = K$ ، $\operatorname{tr} W = 2H$ $\Leftarrow$ بنابر قضیه‌ی کیلی-همیلتون

$$W^2 - 2HW + K = 0$$

چون S رویه‌ی مینیمال است پس $H=0$ و $W^2 = -KI$. درنتیجه

$$g^*\langle v, w\rangle = -K\langle v, w\rangle$$

قضیه - اگر S یک رویه مینیمال باشد، آنگاه در هر نقطه ای یک نقشه همدیس وجود دارد.

تذکر - این قضیه برای هر رویه هموار دلخواه برقرار است. در اینجا آن را فقط برای رویه‌ها مینیمال اثبات می‌کنیم.

نکته: منظور از نقشه همدیس، نقشه $\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ است که σ یک نگاشت همدیس است. برای این منظور کافیست نشان دهیم که فرم اساسی نوع اول σ به صورت $E(du^2 + dv^2)$ است که $E(u,v)$ یک تابع هموار است.

اثبات - فرض کنید $p=(0,0,0) \in S$ و T_pS صفحه (x,y) است. به علاوه می‌توان فرض کرد در همسایگی p، S به صورت نمودار تابع $z=f(x,y)$ است. یعنی نقشه $\tilde{\sigma}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ به صورت $\tilde{\sigma}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ وجود دارد. به راحتی می‌توان دید که فرم اساسی نوع اول $\tilde{\sigma}$ به صورت زیر است:

$$E = 1+f_x^2, \qquad F = f_x f_y, \qquad G = 1+f_y^2$$

به علاوه

$$H = \frac{(1+f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2) f_{yy}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}$$

در واقع $L = \dfrac{f_{xx}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}}$ ، $M = \dfrac{f_{xy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}}$, $N = \dfrac{f_{yy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}}$

به کمک این روابط می‌توان دید که $\left(\frac{E}{A}\right)_y = \left(\frac{F}{A}\right)_x$ و $\left(\frac{F}{A}\right)_y = \left(\frac{G}{A}\right)_x$ که

$A = \sqrt{EG-F^2}$. (در واقع این مطلب از تساوی $H=0$ نتیجه می‌شود)

می‌دانیم که از تساوی بالا نتیجه می‌شود که توابع هموار $\varphi, \psi : U \to \mathbb{R}$ وجود دارند که

$$\left(\frac{E}{A}, \frac{F}{A}\right) = \nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$$

$$\left(\frac{F}{A}, \frac{G}{A}\right) = \nabla\psi = (\psi_x, \psi_y)$$

به دنبال یک نگاشت تغییر مختصات هستیم که $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \Phi$ که فرم اساسی نوع اول σ به صورت $E(du^2+dv^2)$ باشد. در حقیقت

$$\begin{cases} u(x,y) = x + \varphi(x,y) \\ v(x,y) = y + \psi(x,y) \end{cases}$$

همان نگاشت تغییر مختصات است.

$(x,y) = \Phi(u,v)$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1+\varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & 1+\psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+E/A & F/A \\ F/A & 1+G/A \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = (1+E/A)(1+G/A) - \frac{F^2}{A^2} = 2 + \frac{E+G}{A} > 2$$

درنتیجه نگاشت $(x,y) \mapsto (u,v)$ وارون پذیر است و نگاشت وارون پذیر $\Phi: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ وجود دارد که

$(x,y) = \Phi(u,v)$. اگر $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \Phi$

$$\sigma(u,v) = \left(\Phi(u,v)\,,\, f(\Phi(u,v))\right)$$

$$\sigma_u = \left(\Phi_u\,,\, f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$(\Phi_u\,,\,\Phi_v) = \begin{pmatrix} 1+E/A & F/A \\ F/A & 1+G/A \end{pmatrix}^{-1} = \frac{A}{2A+E+G} \begin{pmatrix} 1+G/A & -F/A \\ -F/A & 1+E/A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A+E+G} \begin{pmatrix} A+G & -F \\ -F & A+E \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_u = \left(\frac{G+A}{E+G+2A} , \frac{-F}{E+G+2A} \right)$$

$$f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{f_x (G+A) - f_y F}{E+G+2A}$$

$$\sigma_u = \frac{1}{E+G+2A} \left(G+A , \ -F , \ f_x (G+A) - f_y F \right)$$

به طور مشابه

$$\sigma_v = \frac{1}{E+G+2A} \left(-F , \ E+A , \ f_y (E+A) - f_x F \right)$$

$$\begin{aligned} (E+G+2A)^2 \sigma_u \cdot \sigma_v &= -F(G+A) - F(E+A) + f_x f_y (E+A)(G+A) \\ &\quad - f_x^2 F(G+A) - f_y^2 F(E+A) + f_x f_y F^2 \\ &= -F(G+A) - F(E+A) + F(E+A)(G+A) - (E-1)F(G+A) \\ &\quad - (G-1)F(E+A) + F^3 = 0 \end{aligned}$$

با محاسبه می‌توان دید که

$$\sigma_u \cdot \sigma_u = \frac{A^2}{E+G+2A} = \sigma_v \cdot \sigma_v$$