هندسه دیفرانسیل

جلسه یازده ۹۷/۷/۲۸

رویه‌های درجه دو

$$f(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2b_1xy+2b_2xz+2b_3yz+$$
$$c_1x+c_2y+c_3z+d$$

بنا بر قضیه تابع ضمنی سطح تراز $S=\{(x,y,z) : f(x,y,z)=0\}$ یک رویه هموار دوبعدی است هرگاه
$\nabla f(x,y,z)\neq 0$ روی نقاط S. (به عنوان مثال اگر $\partial_x f\neq 0$ باشد، در همسایگی آن نقطه
متغیر x را به عنوان تابعی هموار از (y,z) در نظر گرفت. یعنی S به طور موضعی نمودار یک تابع هموار است)

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad,\ f(X)=X^tAX+\vec{c}\cdot X+d$$

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & b_2\\ b_1 & a_2 & b_3\\ b_2 & b_3 & a_3\end{bmatrix}\quad,\ \vec{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

ماتریس A متقارن و در نتیجه قطری شدنی است. در واقع ماتریس یکانی U وجود دارد که

$$U^t A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \Lambda$$

قرار دهید $Y = UX$ ، در دستگاه مختصات جدید

$$f = Y^t \Lambda Y + C_* \cdot Y + d$$

که $C_* = UC$.

پس می‌توان فرض کرد که با تغییر متغیر تابع f به صورت

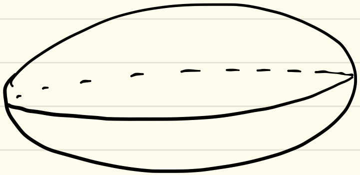
$$f(x,y,z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + d$$

مادامی که ضرایب λ_i ناصفر باشند می‌توان معادل آن ضریب جمله درجه یک را حذف کرد. در واقع اگر $\lambda_1 \neq 0$ ،

$$\lambda_1 x^2 + c_1 x = \lambda_1 \left(x + \frac{c_1}{2\lambda_1}\right)^2 - \frac{c_1^2}{4\lambda_1}$$

حالت اول : $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$

با یک انتقال رویهٔ S در معادله $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2=d$ صدق می‌کند.

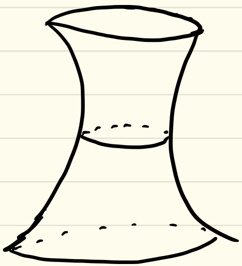


(الف) اگر $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$ ، $d>0$ رویه حاصل یک بیضی‌گون است.

$$P(\varphi,\theta)=\left(\sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}\cos\varphi\cos\theta\ ,\ \sqrt{\frac{d}{\lambda_2}}\cos\varphi\sin\theta\ ,\ \sqrt{\frac{d}{\lambda_3}}\sin\varphi\right)$$

تابع فوق یک نقشه برای این رویه است.

نکته- اگر $d<0$ ، مجموعه S تهی است و اگر $d=0$ ، S تنها شامل مبدأ است.



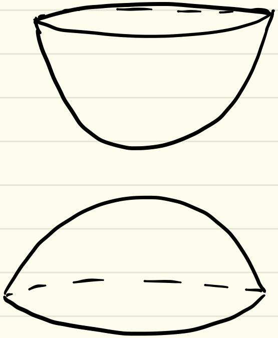
(ب) $\lambda_1,\lambda_2>0>\lambda_3$ و $d>0$ ،

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

رویه را هذلولی‌گون یکپارچه می‌نامیم. (در حقیقت اشتراک این رویه با هر صفحه $z=c$ یک بیضی است.)

تابع $\sigma(\varphi,\theta)=(\alpha\cosh\varphi\cos\theta\,,\ \beta\cosh\varphi\sin\theta\,,\ \gamma\sinh\varphi)$ یک نقشه برای آن ارائه می‌کند.

(iii) $\lambda_3>0>\lambda_1,\lambda_2$ و $d>0$ (این حالت همان حالت (ii) است وقتی $d<0$)



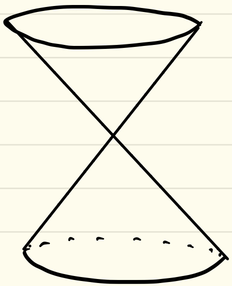
$$\frac{z^2}{\gamma^2}-\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)=1$$

هذلولی‌گون دو پارچه. (اشتراک با صفحه $z=c$ برای $|c|>\gamma$ یک بیضی است.)

$$\sigma(\varphi,\theta)=(\alpha\sinh\varphi\cos\theta\,,\ \beta\sinh\varphi\sin\theta\,,\ \gamma\cosh\varphi)$$

یک پوشش است.

(iv) $\lambda_1,\lambda_2>0>\lambda_3$ و $d=0$



$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=\frac{z^2}{\gamma^2}$$

یک مخروط است که با حذف نقطه مبدأ یک رویه هموار است.

حالت دوم : $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ و $\lambda_3 = 0$

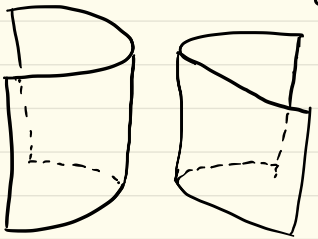
می‌توان فرض کرد که رویهٔ S سطح تراز تابع $f(x,y,z)=\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+c_3 z+d=0$

(۷) $c_3=0$ ،

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=-d$$

یک استوانه است که سطح مقطع آن وابسته به خم $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=-d$ در صفحهٔ $z=0$ است.

مثلاً اگر $d<0$ و $\lambda_1,\lambda_2>0$ سطح مقطع بیضی است. اگر $\lambda_1\lambda_2<0$ سطح مقطع این استوانه هذلولی است.



تابع زیر یک پارامتریش برای استوانهٔ $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ است.

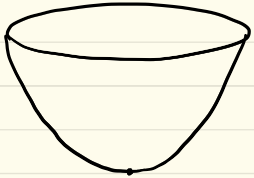
$$\sigma(t,z)=(\pm\alpha\cosh t,\ \beta\sinh t,\ z)$$

نکته - اگر $d=0$ و $\lambda_1,\lambda_2>0$ حاصل خط $x=y=0$ است و اگر $\lambda_1\lambda_2<0$ حاصل دو صفحهٔ متقاطع $y=\pm\alpha x$ است.

(vi) $c_3 \neq 0$ ، $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = z$ ، $\lambda_1 \lambda_2 > 0$.

می‌توان به حالت $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = z$ تبدیل کرد که

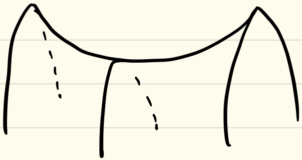
یک سهمی‌گون بیضوی است . تابع



$$\sigma(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\beta^2}\right)$$

یک پرمایش برای این رویه است .

(vii) $c_3 \neq 0$ ، $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. به حالت $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = z$ تبدیل می‌شود .



که یک سهمی‌گون هذلولوی است و پرمایش مناسب آن عبارت است از:

$$\sigma(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2}{\alpha^2} - \frac{v^2}{\beta^2}\right)$$

حالت سوم: $\lambda_1=\lambda_2=0$ و $\lambda_3\neq 0$. $f(x,y,z)=\lambda_3 z^2+c_1x+c_2y+d=0$

(viii) $c_1=c_2=0$ که در این حالت به $z=\pm\alpha$ (بسته به علامت λ_3 و d) تبدیل می‌شود که حاصل تهی، یک یا دو صفحه است.

(ix) $c_1\neq 0$ و $c_2=0$ به حالت $x=\alpha z^2$ تبدیل می‌شود که یک استوانه با سطح مقطع یک سهمی است با پارامتریزاسیون زیر

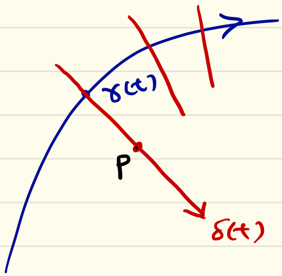
$$\sigma(z,y)=(\alpha z^2,y,z)$$

(x) $c_1,c_2\neq 0$، $\lambda_3 z^2+c_1x+c_2y=0$ که با تغییر متغیر $\bar{x}=c_1x+c_2y$ به حالت (ix) تبدیل می‌شود.

حالت چهارم: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ که حاصل صفحه $c_1x+c_2y+c_3z+d=0$ است.

رویه‌های خط‌کشی شده:

اجتماع خطوطی هستند که از یک خم ثابت می‌گذرند. فرض کنید $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ یک خم در فضا باشد.



در نقطه $\gamma(t)$ در راستای $\delta(t)$ یک خط می‌گذرانید

تابع
$$\sigma(t,s)=\gamma(t)+s\,\delta(t)$$

می‌تواند یک پارامترسازی برای چنین رویه‌ای باشد.

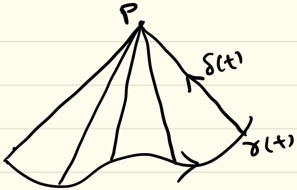
$$\sigma_t=\gamma'(t)+s\,\delta'(t)\quad,\quad \sigma_s=\delta(t)$$

اگر $\delta(t)$ و $\gamma'(t)$ مستقل خطی باشند برای مقادیر کوچک s همواره دو بردار σ_s و σ_t مستقل خطی هستند.

در واقع $\sigma:(\alpha,\beta)\times(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}^3$ یک پارامترسازی برای این رویه است.

می‌توان همواره با انتخاب ϵ به اندازه کافی کوچک فرض کرد که σ یک تابع یک به یک است

یک مثال برای این رویه‌ها می‌تواند اشکالی مخروطی باشند. خم γ را یک خم مسطح در نظر بگیرید و راستای $\delta(t)$ در امتداد $p-\gamma(t)$ باشد که p یک نقطه ثابت خارج آن صفحه است.



$$\sigma(t,s) = \gamma(t) + s\,(p-\gamma(t))$$

هندسه دیفرانسیل

جلسه دوازده ۹۷/۷/۳۰

فرم‌های اساسی نوع اول

طول خم روی رویه: اگر S یک رویه‌ی هموار باشد و $\gamma : I \longrightarrow S$ خم منظم، طول این خم برابر است با

$$\int |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

می‌دانیم $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} S$. برای تعریف طول بردار $\dot{\gamma}(t)$، فرض می‌کنیم که روی فضای مماس T_pS یک ضرب داخلی وابسته به نقطه p تعریف شده است. ضرب داخلی $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ را فرم اساسی نوع اول گوییم.

فرض کنید این ضرب داخلی از ضرب داخلی $\mathbb{R}^3$ ارث برده شده باشد، یعنی

$$v, w \in T_pS \quad , \quad \langle v, w \rangle_p := v \cdot w$$

تعریف: اگر S_1 و S_2 دو رویه هموار باشند، دیفئومورفیسم $f: S_1 \longrightarrow S_2$ را یک ایزومتری موضعی گوییم هرگاه هر خم در S_1 را به یک خم با همان طول در S_2 تصویر کند. در این صورت رویه‌های S_1 و S_2 را به طور موضعی ایزومتر گوییم.

اگر $f: S_1 \to S_2$ ایزومتری موضعی باشد و $\gamma_1: I \to S_1$ یک خم هموار روی S_1 باشد، به ازای دو نقطه دلخواه $t_0, t_1 \in I$،

طول خم γ_1 بین دو نقطه $\gamma_1(t_0)$ و $\gamma_1(t_2)$ برابر است با:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}_1(t)|\, dt$$

از طرف دیگر طول خم $\gamma_2 = f \circ \gamma_1$ برابر است با:

$$\int_{t_0}^{t_1} |D_{\gamma_1(t)} f(\dot{\gamma}_1(t))|\, dt$$

و دو عبارت بالا برای هر دو نقطه t_0 و t_1 برابرند. در نتیجه

$$|D_{\gamma_1(t)} f(\dot{\gamma}_1(t))| = |\dot{\gamma}_1(t)|$$

از طرفی $\gamma_1(t)$ یک خم دلخواه بوده و با تغییر آن $\dot{\gamma}_1(t)$ هر بردار دلخواهی در فضای مماس $T_{\gamma_1(t)} S_1$ می‌تواند باشد. در نتیجه

تبدیلِ خطی $D_pf : T_pS_1 \longrightarrow T_{f(p)}S_2$ یک ایزومتری است یعنی به ازای هر بردار $v \in T_pS_1$

$$|v| = |D_pf(v)|$$

به طور معادل $\langle v, v\rangle_p = \langle D_pf(v), D_pf(v)\rangle_{f(p)}$. به راحتی می‌توان دید که

$$(*) \qquad \forall v, w \in T_pS_1 : \quad \langle v, w\rangle_p = \langle D_pf(v), D_pf(w)\rangle_{f(p)}$$

(کافی است تساوی $|v+w|^2 = |D_pf(v+w)|^2$ را محاسبه کنیم.)

نتیجه: اگر $f: S_1 \longrightarrow S_2$ به طور موضعی ایزومتری باشد، آنگاه Df حافظ ضرب داخلی است، یعنی رابطهٔ $(*)$ برقرار است.

برعکس اگر Df حافظ ضرب داخلی باشد، f یک ایزومتری موضعی است.

تولید - اگر $f: S_1 \longrightarrow S_2$ یک نگاشت هموار باشد، به کمک آن می‌توان از روی ضرب داخلی (فرم اساسی نوع اول) S_2

یک ضرب داخلی جدید (فرم اساسی نوع اول) برای S_1 به دست آورد:

$$\forall\, v, w \in T_pS_1 \qquad f^*\langle v, w \rangle_p := \langle D_pf(v), D_pf(w) \rangle_{f(p)}$$

نتیجه: نگاشت هموار $f: S_1 \longrightarrow S_2$ یک ایزومتری موضعی است اگر فرم‌های $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ و $f^*\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ روی T_pS_1 برابر باشند.

اثبات - تساوی $\langle v, w \rangle_p = f^*\langle v, w \rangle_p$ معادل این است که D_pf حافظ ضرب داخلی است.

اگر $\sigma: U \longrightarrow S_1$ یک تکه باشد، σ_u و σ_v یک پایه برای فضای مماس T_pS_1 خواهند بود. در نتیجه تساوی $\langle v, w \rangle_p = f^*\langle v, w \rangle_p$ معادل این است که روابط روبرو برقرار باشند:

$$\begin{cases} \langle \sigma_u , \sigma_u \rangle_p = f^*\langle \sigma_u , \sigma_u \rangle_p \\ \langle \sigma_u , \sigma_v \rangle_p = f^*\langle \sigma_u , \sigma_v \rangle_p \\ \langle \sigma_v , \sigma_v \rangle_p = f^*\langle \sigma_v , \sigma_v \rangle_p \end{cases}$$

از طرفی

$$f^*\langle\sigma_u,\sigma_u\rangle_p = \langle D_pf(\sigma_u), D_pf(\sigma_u)\rangle_{f(p)}$$

$$= \langle (f\circ\sigma)_u, (f\circ\sigma)_u\rangle_{f(p)}$$

دقت کنید از رابطه $\sigma: U \longrightarrow S_1 \xrightarrow{f} S_2$ مشخص است که وقتی f دیفئومورفیسم است $f\circ\sigma$ یک نقشه برای S_2 است

در نتیجه ایزومتری موضعی بودن f معادل است با اینکه شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \langle\sigma_u,\sigma_u\rangle_p = \langle (f\circ\sigma)_u, (f\circ\sigma)_u\rangle_{f(p)} \\ \langle\sigma_u,\sigma_v\rangle_p = \langle (f\circ\sigma)_u, (f\circ\sigma)_v\rangle_{f(p)} \\ \langle\sigma_v,\sigma_v\rangle_p = \langle (f\circ\sigma)_v, (f\circ\sigma)_v\rangle_{f(p)} \end{cases}$$

نمایش فرم اساسی نوع اول: اگر $\sigma: V \longrightarrow S$ یک نقشه برای S باشد، ضرب داخلی $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ در پایه‌ی $\{\sigma_u, \sigma_v\}$

را به صورت زیر می‌توان نشان داد. دو نگاشت خطی $du: T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$، $dv: T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارند

که اگر $W = \alpha\sigma_u + \beta\sigma_v \in T_pS$، آنگاه

$$du(W) = \alpha \quad , \quad dv(W) = \beta$$

نگاشت‌های du و dv مختصات هر بردار در T_pS را در پایه‌ی $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ ارائه می‌کنند. بدیهی است که این نگاشت‌ها متناظر با نقشه‌ی σ هستند.

$$|W|^2 = |\alpha\sigma_u + \beta\sigma_v|^2 = \alpha^2|\sigma_u|^2 + 2\alpha\beta\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + \beta^2|\sigma_v|^2$$

قرار دهید:

$$E = |\sigma_u|^2 \quad , \quad F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \quad , \quad G = |\sigma_v|^2$$

در نتیجه

$$|W|^2 = E\,du(W)^2 + 2F\,du(W)\,dv(W) + G\,dv(W)^2$$

نمایش $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ فرم اساسی نوع اول را نشان می‌دهد. توجه کنید E، F، G، du و dv به نقشه‌ی σ وابسته است ولی عبارت فرم اساسی نوع اول مستقل از انتخاب نقشه است.

برای دو بردار دلخواه $w_1, w_2 \in T_pS$،

$$\langle w_1, w_2\rangle_p = \langle du(w_1)\sigma_u + dv(w_1)\sigma_v \,,\, du(w_2)\sigma_u + dv(w_2)\sigma_v\rangle_p$$

$$= E\, du(w_1)du(w_2) + F\big(du(w_1)dv(w_2) + du(w_2)dv(w_1)\big) + G\, dv(w_1)dv(w_2)$$

گزاره: نگاشت دیفئومورفیسم $f: S_1 \longrightarrow S_2$ ایزومتری موضعی است اگر و تنها اگر دارای فرم‌های اساسی نوع اول یکسان باشند.

اثبات از محاسبات در صفحه قبل نتیجه می‌شود.

نکته: اگر $\gamma: I \longrightarrow S$ یک خم هموار روی S باشد و در نقشه σ، داشته باشیم $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ آنگاه طول γ برابر است با:

$$\int |\dot\gamma|\, dt = \int \left(E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2\right)^{1/2} dt$$

مثال: یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ که از نقطه a می‌گذرد و با دو بردار متعامد یکه $\vec{p}$ و $\vec{q}$ تولید می‌شود.

$$\sigma(t,s) = a + t\vec{p} + s\vec{q}$$

$$\sigma_t = \vec{p} \quad , \quad \sigma_s = \vec{q}$$

در نتیجه فرم اساسی نوع اول آن به صورت $dt^2 + ds^2$ است زیرا

$$E = \langle \sigma_t , \sigma_t \rangle = |\vec{p}|^2 = 1 \quad , \quad F = \langle \sigma_t , \sigma_s \rangle = \langle \vec{p} , \vec{q} \rangle = 0$$

$$G = \langle \sigma_s , \sigma_s \rangle = |q|^2 = 1$$

مثال: استوانه $\quad \sigma(t,s) = (\cos t , \sin t , s)$

$$\sigma_t = (-\sin t , \cos t , 0) \quad , \quad \sigma_s = (0,0,1)$$

در نتیجه فرم اساسی نوع اول آن به صورت $dt^2 + ds^2$ است.

نتیجه: صفحه با استوانه به طور موضعی ایزومتری هستند.

ایزومتری شدن صفحه با استوانه بدین معناست که می‌توان بدون چروک و برش استوانه را با صفحه بپوشانیم. چنین چیزی روی کره ممکن نیست.

همچنین به طور شهودی می‌توانیم مخروط را به وسیله قسمتی از صفحه بپوشانیم. در نتیجه باید مخروط و صفحه به طور موضعی ایزومتری باشند.

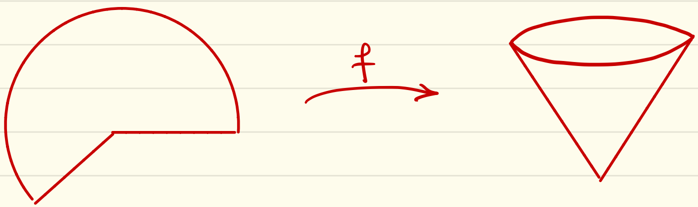
مثال: فرم اساسی نوع اول مخروط، $z^2 = x^2 + y^2$

$$\sigma(r,\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(r\cos\sqrt{2}\theta,\ r\sin\sqrt{2}\theta,\ r\right)$$

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\sqrt{2}\theta,\ \sin\sqrt{2}\theta,\ 1\right), \quad \sigma_\theta = \left(-r\sin\sqrt{2}\theta,\ r\cos\sqrt{2}\theta,\ 0\right)$$

فرم اساسی آن $dr^2 + r^2 d\theta^2$ است.

اگر نقشه $p(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ را برای صفحه در نظر بگیریم فرم اساسی نوع اول صفحه $dr^2 + r^2 d\theta^2$ است.



هندسه دیفرانسیل

جلسه سیزده   ۹۷/۸/۵

مثال- کره : $x^2+y^2+z^2=1$.

$$\sigma(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta)$$

$$\sigma_\theta=(-\sin\theta\cos\varphi,\ -\sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

$$\sigma_\varphi=(-\cos\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ 0)$$

فرم اساسی نوع اول کره عبارتست از:

$$E=|\sigma_\theta|^2=1$$

$$F=\langle\sigma_\theta,\sigma_\varphi\rangle=0\ ,\quad G=|\sigma_\varphi|^2=\cos^2\theta\quad\Rightarrow\quad d\theta^2+\cos^2\theta\,d\varphi^2$$

کره با هیچ قسمتی از صفحه ایزومتر نیست. فرض کنیم پارامتریش $\sigma(u,v)=(f(u,v),g(u,v),0)$ برای صفحه داشته باشیم که

فرم اساسی نوع اول آن $du^2+\cos^2u\,dv^2$ باشد. در این صورت باید

$$\underbrace{|\sigma_u|=1\ ,\quad |\sigma_v|^2=\cos^2u}_{\Downarrow}\ ,\quad \langle\sigma_u,\sigma_v\rangle=0$$

$$\sigma_u\cdot\sigma_{uv}=0\ ,\quad \sigma_u\cdot\sigma_{uu}=0\ ,\quad \sigma_{uu}\cdot\sigma_v+\underbrace{\cancel{\sigma_u\cdot\sigma_{uv}}}_{0}=0$$

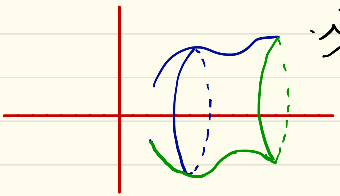
(چون σ پارامتریش صفحه است بردارهای σ_u و σ_v و σ_{uu} و ... در آن صفحه باقی می‌مانند)

$$\Rightarrow\ \sigma_{uu}=0\ \Rightarrow\ \sigma=u\,p(v)+q(v)$$

$$\sigma_v = u\rho'(v) + \eta'(v) \Longrightarrow$$

$$\cos^2 u = |\sigma_v|^2 = u^2 |\rho'(v)|^2 + 2u \langle \rho'(v), \eta'(v) \rangle + |\eta'(v)|^2$$

چندجمله‌ای درجه ۲ است که نمی‌تواند با $\cos^2 u$ برابر باشد.



مثال - نمودار تابع $y = f(x)$ در صفحه حول محور x را دوران دهید. فرم اساسی نوع اول آن را پیدا کنید.

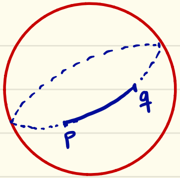
$$\sigma(x,\theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta)$$

$$\sigma_x = (1, f'(x)\cos\theta, f'(x)\sin\theta)$$

$$\sigma_\theta = (0, -f(x)\sin\theta, f(x)\cos\theta)$$

$$(1+|f'(x)|^2)\,dx^2 + |f(x)|^2\,d\theta^2$$

تمرین - به ازای چه توابعی از f رویه فوق ایزومتر با صفحه است؟



مثال- اگر p و q دو نقطه متمایز روی کره باشند، کوتاهترینِ مسیر، دایرهِ عظیمه‌ای است که از اینِ دو نقطه می‌گذرد.

با یکِ دوران می‌توان فرض کرد که نقطه p در قطب شمال است. $p=(0,0,1)$

و همچنینِ نقطه q در صفحه گذرا از محورهای x و z. $q=(x,0,z)$

اگر $q=(\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$ که $0\le\alpha\le\pi$ ثابت می‌کنیم طول کوتاهترینِ مسیر $\frac{\pi}{2}-\alpha$ است (اندازه کمان بینِ اینِ دو نقطه در دایرهِ عظیمه است).

برهان: $\sigma(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ را برای $-\pi\le\varphi,\theta\le\pi$

در نظر بگیرید. فرم اساسی نوع اول آن $d\theta^2+\cos^2\theta\, d\varphi^2$ است

حال اگر $\gamma(t)=\sigma(\theta(t),\varphi(t))$ خم دلخواه روی کره باشد که $\gamma(t_0)=q, \gamma(t_1)=p$، طول آن برابر است با

$$\int_{t_0}^{t_1}(\dot\theta^2+\cos^2\theta\,\dot\varphi^2)^{1/2}dt \ge \int_{t_0}^{t_1}|\dot\theta|\,dt \ge \int_{t_0}^{t_1}d\theta = \theta(t_1)-\theta(t_0)=\pi/2-\alpha$$

حالت تساوی: $\cos\theta\,\dot\varphi=0$. تنها در نقطه قطب شمال و جنوب $\cos\theta=0$ است. پس در تمام نقاط دیگرِ خم γ بایدِ $\dot\varphi=0$ باشد. یعنی $\varphi\equiv$ ثابت. اما $\varphi(t_0)=\varphi(t_1)=0$ چون γ از دو نقطه p و q می‌گذرد. در نتیجه $\varphi\equiv0$ و γ قسمتی از دایرهِ عظیمه $(\cos\theta, 0, \sin\theta)$ است.

ایزومتری‌ها روی کره:

می‌دانیم همه نگاشته‌های $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ که حافظ طول باشند و $f(0)=0$ خطی هستند و به صورت $f(X)=AX$ که A یک ماتریس متعامد است $(A^tA=I)$. در حقیقت این نگاشته‌ها ترکیب حداکثر سه تقارن هستند. آنها کره واحد را به کره واحد تصویر می‌کنند.

لذا همه آنها به عنوان یک ایزومتری روی کره $f:S^2 \longrightarrow S^2$ شناخته می‌شوند.

قضیه زیر نشان می‌دهد همه ایزومتری‌های روی کره همین نگاشته‌های خطی متعامد است.

قضیه: هر ایزومتری $f:S^2 \longrightarrow S^2$ ترکیبی از حداکثر سه تقارن نسبت به صفحات گذرنده از مبدأ است.

اثبات - قرار دهید: $e_1=(1,0,0)$ ، $e_2=(0,1,0)$ و $e_3=(0,0,1)$.

اگر $f(e_1)\neq e_1$ صفحه عمود منصف پاره خط واصل بین e_1 و $f(e_1)$ از مبدأ می‌گذرد. $(|e_1|=|f(e_1)|=1)$.

g_1 را نگاشت تقارن نسبت به این صفحه درنظر بگیرید. $g_1 \circ f$ یک ایزومتری روی کره است که نقطه e_1 را ثابت نگه می‌دارد.

(اگر $f(e_1)=e_1$، قرار دهید $g_1=id$ نگاشت همانی)

حال اگر $g_1 \circ f(e_2)\neq e_2$، نگاشت g_2 را تقارن نسبت به صفحه عمود منصف این دو نقطه بگیرید. و اگر $g_1 \circ f(e_2)=e_2$ قرار دهید $g_2=id$

درهرصورت $g_2\circ g_1\circ f(e_2)=e_2$. اما همچنان داریم: $g_2\circ g_1\circ f(e_1)=e_1$. زیرا:

$$e_1=g_1\circ f(e_1) \Longrightarrow |e_1-g_1\circ f(e_2)| = |g_1\circ f(e_1)-g_1\circ f(e_2)| \underset{\uparrow}{=} |e_1-e_2|$$

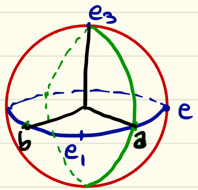
$g_1\circ f$ ایزومتری است

$$\Downarrow$$

نقطه e_1 روی صفحه عمود منصف e_2 و $g_1\circ f(e_2)$ قرار دارد. و در نتیجه $g_2(e_1)=e_1$.

به طور مشابه نگاشت g_3 تعریف می‌شود به طوری که ایزومتری $h=g_3\circ g_2\circ g_1\circ f$ هر سه نقطه e_1، e_2 و e_3 را ثابت نگه می‌دارد.

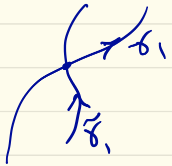
از طرفی دایره عظیمه گذرا از e_1 و e_2 فاصله نقاطش تا e_3 برابر $\pi/2$ است. (مثال قبل) لذا h این دایره را به خودش تصویر می‌کند. اما هر نقطه‌ای از آن با فاصله از e_1 و e_2 به طور یکتا تعیین می‌شود. در نتیجه h همه نقاط این دایره را ثابت نگه می‌دارد. به طور مشابه دایره‌ای گذرا از



e_1 و e_3 یا e_2 و e_3 چنین هستند. حال یک نقطه دلخواه a روی دایره گذرا از e_1 و e_2 در نظر بگیرید و نقطه b را به گونه‌ای انتخاب کنید که $\{a,b,e_3\}$ یک پایه متعامد یکه باشند. پس h هر سه نقطه را ثابت نگه می‌دارد. لذا با استدلال مشابه h همه نقاط روی دایره گذرا از a و e_3 را ثابت نگه می‌دارد. چون نقطه a دلخواه بود در نتیجه h نگاشت همانی است. پس $f=g_1\circ g_2\circ g_3$. ($g_i\circ g_i=id$ دقت کنید) .

نگاشت‌های همدیس

اگر $f: S_1 \to S_2$ یک دیفئومورفیسم موضعی باشد، آن را همدیس (Conformal) گوییم، هرگاه γ_1 و $\tilde{\gamma}_1$ دو خم روی S_1 باشند و $\gamma_2 = f\circ\gamma_1$ و $\tilde{\gamma}_2 = f\circ\tilde{\gamma}_1$ تصویرانِ دو خم روی S_2، زاویه بینِ γ_1 و $\tilde{\gamma}_1$ در نقطه تلاقی برابر با زاویه بینِ γ_2 و $\tilde{\gamma}_2$ باشد.



زاویه بینِ دو خم γ_1 و $\tilde{\gamma}_1$ که روی رویهٔ S واقع هستند و در نقطه p همدیگر را قطع می‌کنند، همان زاویه بینِ بردارهای مماس آن دو تعریف می‌شود

θ زاویه بینِ دو خم :
$$\cos\theta := \frac{\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\tilde{\gamma}}_1 \rangle_p}{[\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_1 \rangle_p]^{1/2} [\langle \dot{\tilde{\gamma}}_1, \dot{\tilde{\gamma}}_1 \rangle_p]}$$

اگر $\sigma: \mathbb{R}^2 \to S$ یک تکه رویه موضعی حول نقطه p باشد، این زاویه براساس فرم اساسی نوع اول آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\gamma_1(t) = \sigma(u(t), v(t)) \qquad \tilde{\gamma}_1(t) = \sigma(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$$

$$\cos\theta := \frac{E\dot{u}\dot{\tilde{u}} + F(\dot{u}\dot{\tilde{v}} + \dot{\tilde{u}}\dot{v}) + G\dot{v}\dot{\tilde{v}}}{(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{1/2}(E\dot{\tilde{u}}^2 + 2F\dot{\tilde{u}}\dot{\tilde{v}} + G\dot{\tilde{v}}^2)^{1/2}}$$

نگاشت $f: S_1 \to S_2$ همدیس است هرگاه به‌ازای دو بردار $u, v \in T_pS_1$

زاویه بین $D_pf(u), D_pf(v)$ = زاویه بین u, v

$$(*) \qquad \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\langle D_pf(u), D_pf(v)\rangle}{\|D_pf(u)\| \cdot \|D_pf(v)\|}$$

قضیه: یک دیفئومورفیسم موضعی $f: S_1 \to S_2$ همدیس است اگر و تنها اگر یک تابع $\lambda: S_1 \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که

$$\forall u, v \in T_pS_1 \qquad f_*\langle u, v\rangle_p = \lambda(p) \langle u, v\rangle_p$$

اثبات _ از رابطه $f_*\langle u, v\rangle_p = \lambda \langle u, v\rangle_p$ به وضوح رابطه $(*)$ نتیجه می‌شود که همان همدیس بودن f است.

برعکس از رابطه $(*)$ وجود تابع λ را اثبات می‌کنیم:

$\{e_1, e_2\}$ را یک پایه متعامد یکه برای T_pS_1 می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$\lambda = f_*\langle e_1, e_1\rangle_p = \langle D_pf(e_1), D_pf(e_1)\rangle$$

$$\mu = f_*\langle e_2, e_2\rangle_p = \langle D_pf(e_2), D_pf(e_2)\rangle$$

از طرفی واضح است که $f^*\langle e_1, e_2\rangle_p = \langle D_pf(e_1), D_pf(e_2)\rangle = 0$

چون f همدیس است و e_1 و e_2 بردار متعامد هستند.

اگر $\lambda = \mu$ باشد به سادگی نتیجه می‌شود زیرا $f^*\langle u, v\rangle_p = \lambda(p)\langle u, v\rangle_p$

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

$$v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

$$\langle u, v\rangle_p = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

$$f^*\langle u, v\rangle_p = \langle D_pf(u), D_pf(v)\rangle = \langle \alpha_1 D_pf(e_1) + \alpha_2 D_pf(e_2), \beta_1 D_pf(e_1) + \beta_2 D_pf(e_2)\rangle$$

$$= \lambda\alpha_1\beta_1 + \mu\alpha_2\beta_2 = \lambda(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)$$

اکنون نشان می‌دهیم $\lambda = \mu$.

$$\lambda - \mu = \langle D_pf(e_1), D_pf(e_1)\rangle - \langle D_pf(e_2), D_pf(e_2)\rangle$$

$$= \langle D_pf(e_1) + D_pf(e_2), D_pf(e_1) - D_pf(e_2)\rangle$$

که در این تساوی از رابطه $\langle D_pf(e_1), D_pf(e_2)\rangle = 0$ استفاده کرده ایم. در نتیجه

$$\lambda-\mu = \langle D_pf(e_1+e_2),\ D_pf(e_1-e_2)\rangle$$

برای اینکه نشان رابطه بالا برابر صفر است به یک رابطه $(*)$ کافی است $\langle e_1+e_2, e_1-e_2\rangle = 0$ باشد

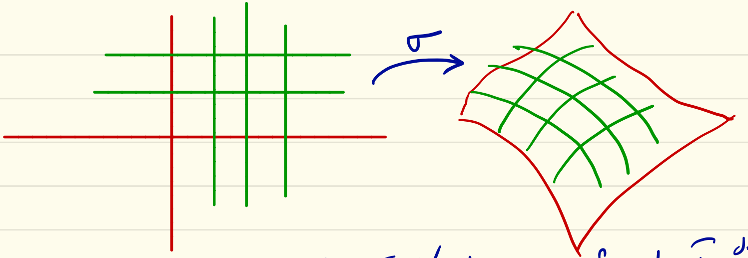
که از متعامد یکه بودن بردارهای $\{e_1, e_2\}$ نتیجه می شود.

نکته ـ در فرآیند اثبات قضیه دیدیم که $\lambda = \langle D_pf(e_1), D_pf(e_1)\rangle$ که e_1 یک بردار یکه در فضای ۲ بعدی T_pS_1 است.

از آنجا که می توان e_1 را به طور موضعی هموار انتخاب کرد، نتیجه گرفت λ یک تابع هموار است.

نتیجه: دیفئومورفیسم موضعی $f: S_1 \longrightarrow S_2$ همدیس است اگر و تنها اگر برای هر نقشه $\sigma: U \to S_1$، فرم های اساسی نوع

اول σ و $f\circ\sigma$ مضرب هم باشند.

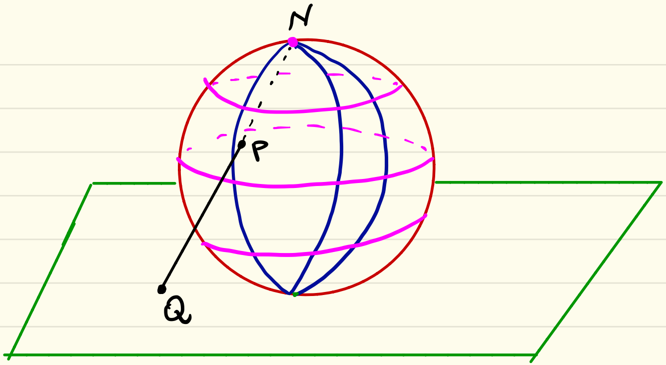


تعریف: اگر $\sigma: U \longrightarrow S$ یک نقشه موضعی برای S باشد، $U\subseteq \mathbb{R}^2$ را به عنوان یک رویه دوبعدی در $\mathbb{R}^3$ نگاه کنید. اگر σ یک نگاشت همدیس باشد، آنگاه آن را پارامتری همدیس یا کارت رویه‌ای همدیس می‌نامیم.

از نتیجه صفحه قبل نتیجه می‌شود که نقشه σ همدیس است اگر و تنها اگر فرم اساسی نوع اول آن برای S برابر $\lambda(du^2+dv^2)$ باشد که $\lambda(u,v)$ یک تابع هموار است.

قضیه: هر رویه هموار، یک اطلس دارد که شامل کارت‌های رویه‌ای همدیس است.

نتیجه: اگر S_1 و S_2 دو رویه دلخواه باشند، به ازای هر دو نقطه $p_1\in S_1$ و $p_2\in S_2$ همسایگی‌های U_1 و U_2 از این نقاط به ترتیب در S_1 و S_2 وجود دارند که نگاشت همدیس $f: U_1 \longrightarrow U_2$ تعریف شود.



مثال- یک نقشه هندسی برای کره

نقاط σ را اینگونه تعریف کنیم که از قطب شمال به نقطه P روی کره وصل کنید و امتداد دهید تا صفحه را که مماس بر قطب جنوب است قطع کند. اگر نقطه تقاطع Q باشد، تعریف می‌کنیم $\sigma(Q)=P$.

اگر کره نقاط $x^2+y^2+z^2=1$ باشد، صفحه فوق را $z=-1$ می‌گیریم.

$$Q=(u,v,-1)$$

$$N=(0,0,1)$$

اگر $P=tN+(1-t)Q$ باید $|P|=1$.

$$\sigma(u,v)=\left(\frac{4u}{u^2+v^2+4},\ \frac{4v}{u^2+v^2+4},\ \frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4}\right)$$

$$\sigma_u=\left(\frac{4(v^2-u^2+4)}{(u^2+v^2+4)^2},\ \frac{-8uv}{(u^2+v^2+4)^2},\ \frac{16u}{(u^2+v^2+4)^2}\right)$$

$$\sigma_v=\left(\frac{-8uv}{(u^2+v^2+4)^2},\ \frac{4(u^2-v^2+4)}{(u^2+v^2+4)^2},\ \frac{16v}{(u^2+v^2+4)^2}\right)$$

$$E = |\sigma_u|^2 = \frac{16}{(u^2+v^2+4)^2}$$

$$G = |\sigma_v|^2 = \frac{16}{(u^2+v^2+4)^2}$$

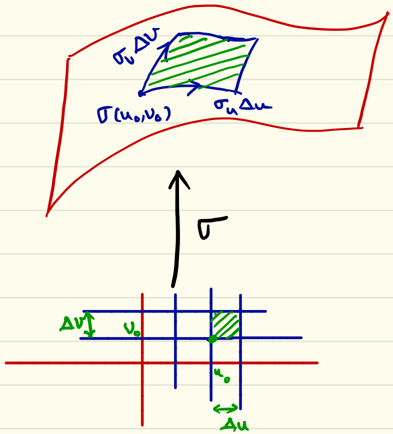
$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = 0$$

$\Longrightarrow$ فرم اساسی نوع اول $\quad \dfrac{16}{(u^2+v^2+4)^2}\,(du^2+dv^2)$

$x(u,v)$

هندسه دیفرانسیل

مطلب چهارده ۹۷/۸/۷



مساحت:

$\sigma : U \to S$ را یک نقشه برای رویه که می‌گیرید. در همسایگی نقطه

$\sigma(u_0,v_0)$، ناحیه محصور بین خم‌های $\sigma(u_0+u, v_0)$ برای

$0 \le u \le \Delta u$ و خم $\sigma(u_0, v_0+v)$ برای $0 \le v \le \Delta v$

تقریباً نزدیک به متوازی‌الاضلاع است در فضای مماس رویه در نقطه (u_0,v_0)

که با بردارهای $\sigma_u \Delta u$ و $\sigma_v \Delta v$ تولید شده است. مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با

$$\| \sigma_u \Delta u \times \sigma_v \Delta v \| = \| \sigma_u \times \sigma_v \| \Delta u \Delta v$$

عبارت بالا را عنصر سطح رویه می‌نامیم و

$$\int_U \| \sigma_u \times \sigma_v \| \, du \, dv$$

مساحت قسمتی از رویه که با نقشه σ پوشیده شده را نشان می‌دهد.

مقدار این انتگرال (مساحت تعریف شده) مستقل از انتخاب نقشه است. اگر $\Phi : \tilde{U} \to U$ نگاشت تغییر پارامتر باشد

و $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$ نقشه دیگری باشد آنگاه $D\tilde{\sigma} = D\sigma \cdot D\Phi$ و

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \det(D\Phi)\,(\sigma_u \times \sigma_v)$$

$$\int_{\tilde{U}} \|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\| \, d\tilde{u}\, d\tilde{v} = \int_{\tilde{U}} \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, |\det D\Phi| \, d\tilde{u}\, d\tilde{v}$$

$$= \int_{U} \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du\, dv$$

فرمول تغییر متغیر در انتگرال

گزاره: $\|\sigma_u \times \sigma_v\| = (EG - F^2)^{1/2}$

اثبات ـ از رابطه $(a\times b)\cdot(c\times d) = (a\cdot c)(b\cdot d) - (a\cdot d)(b\cdot c)$

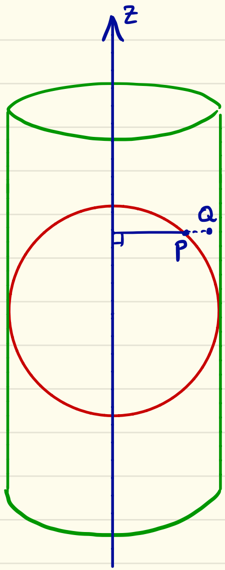
با جایگزینی $a = c = \sigma_u$ و $b = d = \sigma_v$ نتیجه می‌شود.

تعریف ـ دیفئومورفیسم موضعی $f: S_1 \longrightarrow S_2$ را حافظ مساحت گوییم هرگاه f هر ناحیه S_1 را به ناحیه‌ای با مساحت برابر در S_2 تصویر کند.

اگر σ یک نقشه برای S_1 باشد که فرم اساسی نوع اول آن $E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2$ باشد، $f \circ \sigma$ یک نقشه‌ای برای S_2 خواهد بود. اگر فرم اساسی نوع آن $E_2 du^2 + 2F_2 du dv + G_2 dv^2$ باشد، به راحتی می‌توان دید که f حافظ مساحت است اگر و تنها اگر

$$E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$$

مثال ـ همه نگاشت‌های ایزومتری حافظ مساحت هستند. برای نگاشت‌های همدیس می‌دانیم که فرم اساسی نوع اول مضرب همدیگر هستند، در نتیجه عنصر سطح نیز مضرب یکدیگرند. بنابراین یک نگاشت همدیس در صورتی حافظ مساحت است که آن مضرب برابر یک باشد، یعنی یک ایزومتری باشد.



مثال ـ یک نگاشت حافظ مساحت بین کره و صفحه وجود دارد.

از آنجا که صفحه با استوانه ایزومتر است، نشان می‌دهیم نگاشت حافظ مساحت بین کره و استوانه وجود دارد. کره به شعاع یک و مرکز مبدأ در نظر بگیرید و استوانه در امتداد محور z که محیط بر کره باشد. نقطه دلخواه P روی کره را در نظر بگیرید و بر محور z عمود کنید. امتداد این عمود استوانه را در نقطه Q قطع می‌کند که P بین Q و محور z است.

نشان می‌دهیم این نگاشت حافظ مساحت است.

اگر مختصات Q برابر $Q=(\cos\theta, \sin\theta, z)$ باشد و مختصات P

$$P=(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$$

چون پاره خط PQ بر محور z عمود است پس $z = \sin\varphi$ باشد.

$$f : S^2 \longrightarrow \text{استوانه}$$

$$f(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\theta, \sin\theta, \sin\varphi)$$

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}, z\right)$$

اگر $\sigma_1(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$ یک نقشه کره باشد،

$\sigma_2 = f \circ \sigma_1 = (\cos\theta, \sin\theta, \sin\varphi)$ نقشه ای برای استوانه است.

فرم اساسی نوع اول کره : $d\varphi^2 + \cos^2\varphi \, d\theta^2$ است و برای استوانه

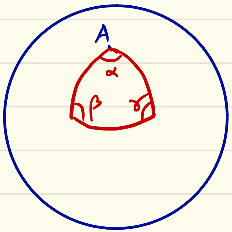
$$(\sigma_2)_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \quad , \quad (\sigma_2)_\varphi = (0, 0, \cos\varphi)$$

$$d\theta^2 + \cos^2\varphi \, d\varphi^2$$

که در هر دو عنصر سطح $\cos\varphi$ است.

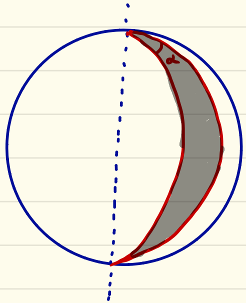
قضیه- مساحت مثلث کروی روی کره واحد با زوایای داخلی α ، β و γ برابر است با : $\alpha+\beta+\gamma-\pi$.

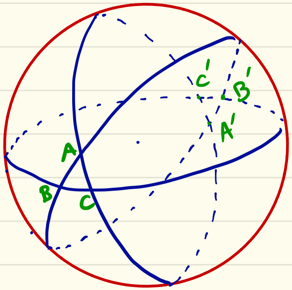
نکته: اگر A و B دو نقطه روی کره باشند، کوتاه‌ترین مسیر بین A و B روی دایرهٔ عظیمه گذرا از این دو نقطه قرار دارد. یک مثلث کروی ناحیه محصور بین دوایر عظیمه گذرا دو به دو از نقاط A، B و C است.



اگر دو دایرهٔ عظیمه همدیگر را با زاویه α قطع کنند مساحت محصور بین این دو (مطابق شکل) برابر 2α است.

(زیرا این سهم $\frac{\alpha}{2\pi}$ کل مساحت کره است. با تصویر این قسمت را روی استوانه نگاه کنید که مستطیلی به ضلع α و طول 2 است.)





ضلع‌های مثلث را امتداد دهید تا سه دایره عظیمه داشته باشیم.

پاره خط‌های AB و AC همدیگر را در نقطه A' قطع می‌کنند که A' نقطه مقابل A است.

و به طور مشابه برای B' و C' . بنا بر نکته قبل

$$(ABC) + (A'BC) = 2\alpha$$

$$(ABC) + (AB'C) = 2\beta$$

$$(ABC) + (ABC') = 2\gamma$$

منظور از (ABC) مساحت مثلث ABC است. از طرفی کل کره به $\underline{8}$ مثلث تقسیم شده است که دو به دو برابر هستند در نتیجه

$$(ABC) + (A'BC) + (AB'C) + (ABC') = 2\pi$$

بنابراین

$$(ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

هندسه دیفرانسیل

جلسه پانزده ۹۷/۸/۱۲

فرم اساسی نوع دوم

برای محاسبه میزان خمیدگی یک رویه چند روش مختلف وجود دارد که همگی معادل هستند.

رویکرد اول: اگر $\sigma : U \longrightarrow$ یک نقشه باشد، میزان تغییرات رویه در راستای قائم $\vec{N}$.

$$\vec{N} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$$

$$\big(\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v) - \sigma(u,v)\big) \cdot \vec{N}$$

$$\approx \left[\sigma_u \Delta u + \sigma_v \Delta v + \frac{1}{2}\left(\sigma_{uu}(\Delta u)^2 + 2\sigma_{uv}(\Delta u)(\Delta v) + \sigma_{vv}(\Delta v)^2\right)\right] \cdot \vec{N}$$

$$= \frac{1}{2}\left[L(\Delta u)^2 + 2M\,\Delta u\,\Delta v + N(\Delta v)^2\right]$$

دقت کنید N بر صفحه مماس رویه که از σ_u و σ_v تشکیل شده عمود است یعنی $\sigma_u \cdot N = \sigma_v \cdot N = 0$

$$L = \sigma_{uu} \cdot \vec{N}, \quad M = \sigma_{uv} \cdot \vec{N}, \quad N = \sigma_{vv} \cdot \vec{N}$$

به کمک نگاشت های خطی du و dv که قبلاً تعریف کردیم، فرم اساسی نوع دوم با عبارت

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

نشان داده می‌شود.

برای بردار دلخواه $W \in T_pS$ ، عبارت

$$L\,du(W)^2 + 2M\,du(W)\,dv(W) + N\,dv(W)^2$$

میزان خمیدگی رویه در نقطه و در راستای W را محاسبه می‌کند.

فرم اساسی نوع دوم فرم دوخطی متقارن زیر را روی صفحه مماس ارائه می‌کند:

$\vec{X}, \vec{Y} \in T_pS$:

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = L\,du(\vec{X})\,du(\vec{Y}) + M\big(du(\vec{X})\,dv(\vec{Y}) + du(\vec{Y})\,dv(\vec{X})\big) + N\,dv(\vec{X})\,dv(\vec{Y})$$

فرم دوخطی فوق به انتخاب نقشه σ وابسته نیست. (تمرین) (این فرم دوخطی لزوماً مثبت نیست)

مثال - صفحه $\quad \sigma(u,v) = \vec{a} + u\vec{p} + v\vec{q} \quad \Leftarrow \quad \sigma_{uu} = \sigma_{uv} = \sigma_{vv} = 0 \;. \quad \Leftarrow$ فرم اساسی نوع دوم صفر است.

مثال - کره : $\quad \sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$

$$\sigma_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$$\sigma_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = 1 \implies \vec{N} = \sigma_\theta \times \sigma_\varphi$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = (\sin\theta\sin\varphi, -\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

$$M = \sigma_{\theta\theta}\cdot\vec{N} = 1 \;,\quad L = \sigma_{\theta\varphi}\cdot\vec{N} = 0 \;,\quad N = \sigma_{\varphi\varphi}\cdot\vec{N} = \cos^2\theta$$

فرم اساسی نوع دوم: $\quad d\theta^2 + \cos^2\theta \, d\varphi^2$

مثال - استوانه

$$\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

$$\sigma_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \quad , \quad \sigma_z = (0, 0, 1)$$

$$\vec{N} = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0) \quad , \quad \sigma_{zz} = \sigma_{\theta z} = 0$$

$$M = \sigma_{\theta\theta} \cdot \vec{N} = +1 \quad \Rightarrow \quad +d\theta^2$$ فرم اساسی نوع دوم استوانه

رویکرد دوم : نگاشت گاوس و وینگارتن

در این رویکرد میزان تغییرات بردار قائم $\vec{N}$ را اندازه گیری می‌کنیم. اگر S یک رویه جهت‌پذیر باشد، میدان برداری قائم $\vec{N}$ سرتاسر S تعریف شده است. نگاشت گاوس $g : S \longrightarrow \underset{\text{کره واحد}}{S^2}$ در هر نقطه رویه S بردار عمود $\vec{N}$ را نشان می‌دهد.

$$g(p) = \vec{N}(p)$$

دقت کنید $\vec{N}$ یک بردار واحد است که با یک نقطه از کره S^2 می‌تواند متناظر شود.

میزان تغییرات $\vec{N}$ با مشتق نگاشت گاوس محاسبه می‌شود:

$$D_p G : T_p S \longrightarrow T_{G(p)} S^2$$

فضای مماس کره در نقطه $G(p)$ یک صفحه است که بر $G(p)$ عمود است. از طرفی $G(p)$ بردار عمود روی در نقطه p است

یعنی بر فضای مماس $T_p S$ عمود است. بنابراین این دو فضای مماس یک صفحه هستند. لذا می‌توان $D_p G$

را به عنوان یک نگاشت خطی از فضای مماس $T_p S$ به خودش داشت:

$$D_p G : T_p S \longrightarrow T_p S$$

تعریف- نگاشت وینگارتن در نقطه p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_p := -D_p G$$

اگر $S \to U$: X یک نقشه برای S در همسایگی p باشد، $\{X_u, X_v\}$ یک پایه برای فضای مماس $T_p S$ است.

نمایش نگاشت خطی W_p در این پایه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_pG(\sigma_u) = \frac{\partial}{\partial u}(G\circ\sigma) = \frac{\partial}{\partial u}\vec{N} = \vec{N}_u$$

$$D_pG(\sigma_v) = \frac{\partial}{\partial v}(G\circ\sigma) = \frac{\partial}{\partial v}\vec{N} = \vec{N}_v$$

$$\vec{N}\cdot\sigma_u = \vec{N}\cdot\vec{\sigma}_v = 0$$ از قبل می‌دانیم

$$\vec{N}_u\cdot\sigma_u = -\vec{N}\cdot\sigma_{uu} = -L$$

$$\vec{N}_u\cdot\sigma_v = -\vec{N}\cdot\sigma_{uv} = -M$$

$$\vec{N}_v\cdot\sigma_u = -\vec{N}\cdot\sigma_{uv} = -M$$

$$\vec{N}_v\cdot\sigma_v = -\vec{N}\cdot\sigma_{vv} = -N$$

اگر $\vec{N}_u = \alpha\sigma_u + \beta\sigma_v$ ، آنگاه

$$-L = \vec{N}_u\cdot\sigma_u \Rightarrow -L = \alpha E + \beta F$$

$$-M = \vec{N}_u\cdot\sigma_v \Rightarrow -M = \alpha F + \beta G$$

$$\begin{bmatrix}-L\\-M\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \frac{-1}{EG-F^2}\begin{bmatrix}G & -F\\ -F & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L\\ M\end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس W_p در این پایه بدین صورت است:

$$W_p = \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

نکته: به کمک نگاشت وینگارتن فرم دوخطی زیر روی فضای مماس تعریف می‌شود:

$$\mathrm{II}_p\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \langle W_p(\vec{X}), \vec{Y} \rangle$$

که عبارت سمت راست ضرب داخلی است یا همان فرم اساسی نوع اول.

گزاره: فرم دوخطی فوق همان فرم اساسی نوع دوم است که به صورت زیر تعریف شد:

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = L\, du(\vec{X})\, du(\vec{Y}) + M\left(du(\vec{X})\, dv(\vec{Y}) + du(\vec{Y})\, dv(\vec{X})\right) + N\, dv(\vec{X})\, dv(\vec{Y})$$

اثبات - کافی است مقدار این دو فرم دوخطی را روی پایه σ_u و σ_v نگاه کنیم به عنوان مثال:

$$\langle \sigma_u, \sigma_u \rangle_p = \langle W_p(\sigma_u), \sigma_u \rangle = \langle -N_u, \sigma_u \rangle = L$$

نمایش این فرم دوخطی در پایه $\{\sigma_u , \sigma_v\}$ به صورت زیر است :

$$\langle \vec{X},\vec{Y}\rangle_p = \begin{bmatrix} du(\vec{Y}) & dv(\vec{Y}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du(\vec{X}) \\ dv(\vec{X}) \end{bmatrix}$$

ماتریس نمایش فرم دوخطی در پایه $\{\sigma_u , \sigma_v\}$

با تغییر پایه ماتریس نمایش فوق عوض می‌شود ولی حاصل فرم دوخطی همچنان ثابت می‌ماند.

نتیجه : نگاشت وینگارتن خودالحاق است.

$$\langle W_p(\vec{X}), Y \rangle \overset{\text{تعریف عملگر الحاقی}}{=} \langle \vec{X}, W_p^t(\vec{Y}) \rangle \underset{\text{شرط معادل خودالحاقی}}{=} \langle X, W_p Y \rangle$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$Y^t W_p X \qquad\qquad\qquad\qquad Y^t W_p^t X$$

از اینکه ماتریس نمایش W_p یک ماتریس متقارن است نتیجه می‌شود.

هندسه دیفرانسیل

جلسه شانزده ۹۷/۸/۱۴

انحنای یک خم دلخواه روی رویه S .

γ یک خم با سرعت واحد روی رویه S در نظر بگیرید. انحنای این خم برابر است با

$$T = \dot{\gamma}$$
$$k\vec{n} = \ddot{\gamma}$$

که $\vec{n}$ بردار قائم اصلی خم γ است و k انحنای این خم.

از طرف دیگر $\dot{\gamma}$ در صفحه مماس رویه قرار دارد. درنتیجه $\dot{\gamma}\cdot\vec{N} = 0$ که $\vec{N}$ بردار عمود بر رویه است.

درنتیجه $\{\dot{\gamma}$ و $N\times\dot{\gamma}\}$ پایه متعامد یکه برای صفحه مماس هستند. اگر مختصات $\ddot{\gamma}$ را در پایه متعامد یکه $\{N, \dot{\gamma}, N\times\dot{\gamma}\}$

بنویسیم ضریب $\dot{\gamma}$ صفر است (چون $|\dot{\gamma}|=1$)

$$\ddot{\gamma} = k_n\vec{N} + k_g(N\times\dot{\gamma})$$

$k_n = \gamma$ انحنای قائم ، $k_g = \gamma$ انحنای ژئودزیک

$k_n\vec{N}$ مؤلفه عمودی $\ddot{\gamma}$ نسبت به رویه S است و $k_g(N\times\dot{\gamma})$ مؤلفه مماسی آن.

$$k_n = \ddot{\gamma}\cdot\vec{N}, \quad k_g = \ddot{\gamma}\cdot(N\times\dot{\gamma}), \quad k^2 = |\ddot{\gamma}|^2 = k_n^2 + k_g^2$$

$$k_n = k\cos\psi, \quad k_g = k\sin\psi$$

ψ زاویه بین $\vec{N}$ و $\vec{n}$ است.

نکته: انحنای قائم، K_n، به خمیدگی رویه S یعنی فرم اساسی نوع دوم وابسته است. درحالیکه K_g تنها به فرم اساسی نوع اول وابسته است.

گزاره ۱: اگر γ خم با سرعت واحد باشد، آنگاه

$$K_n = II_{\gamma(t)}\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$$

یعنی اگر $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ در نقشه σ، آنگاه

$$K_n = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2$$

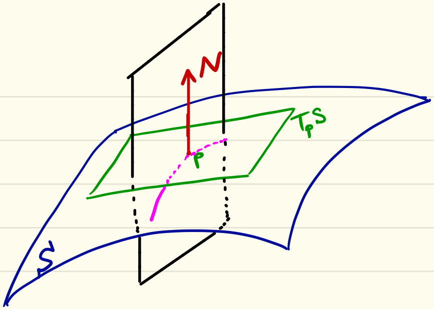
نکته - یک نتیجه طبیعی از این گزاره این است که اگر دو خم روی S در نقطه P بر هم مماس باشند، آنگاه انحناهای قائم هر دو برابر است.

اثبات -

$$II_{\gamma(t)}\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \langle W(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle = -\langle DG(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle$$

$$= -\langle \frac{d}{dt}(G \circ \gamma), \dot{\gamma} \rangle = -\langle \frac{d}{dt}\vec{N}, \dot{\gamma} \rangle$$

$$\vec{N} \cdot \dot{\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{N} \cdot \dot{\gamma} + \vec{N} \cdot \ddot{\gamma} = 0 \Rightarrow -\frac{d}{dt}\vec{N} \cdot \dot{\gamma} = \vec{N} \cdot \ddot{\gamma} = K_n$$



از نقطه p روی رویه S صفحه‌ای بگذرانید که شامل بردار قائم $\vec{N}$ باشد، این صفحه عمود بر فضای مماس T_pS و همچنین رویه S است. فصل مشترک این صفحه و رویه S را برش قائم S می‌نامیم.

گزاره ۲: اگر γ یک برش قائم رویه S باشد، آنگاه $K_n = \pm K \; , \; K_g = 0$

اثبات ـ به کمک رابطه $K_n = K\cos\psi$ تنها کافیست نشان دهیم $\vec{N}$ و $\vec{n}$ موازی هم هستند. خم γ یک خم مسطح است که در صفحه عمود بر رویه قرار دارد. لذا بردار $\vec{n}$ عمود بر γ در این صفحه واقع است. در نتیجه $\vec{n} = \pm\vec{N}$ است.

گزاره (قضیه مونیه) اگر از نقطه p روی رویه S صفحه‌ای بگذرانیم که شامل بردار مشخص $v \in T_pS$ باشد و با صفحه مماس T_pS زاویه $\theta \neq 0$ داشته باشد و اگر فصل مشترک این صفحه با رویه S خمی با انحنای K_θ باشد، آنگاه $K_\theta \sin\theta$ مستقل از θ است.

اثبات ـ

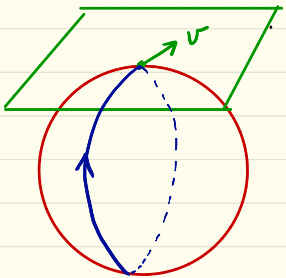
$$\ddot{\gamma} = K_\theta \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\gamma}\cdot\vec{N} = K_\theta(\vec{n}\cdot\vec{N}) = K_\theta \cos(\pi/2 - \theta) = K_\theta \sin\theta$$

$$\Rightarrow K_n = K_\theta \sin\theta$$

از طرفی بردار مماس γ در نقطه p باید بردار v باشد پس $K_n = II_p\langle v, v\rangle$.

نکته- به کمک گزاره‌ی ۱ و ۲ می‌توان روشی برای محاسبه فرم اساسی نوع دوم پیدا کرد. بدین صورت که برای محاسبه $II_p\langle w,w\rangle$ برای یک بردار دلخواه $w\in T_pS$ کافی است، صفحه‌ای شامل w و $\vec{N}$ را در نظر بگیریم و فصل مشترک آن با S خم خواهد شد که انحنای آن خم $II_p\langle w,w\rangle$ را نشان می‌دهد.

$$\pm k = II_p\langle w, w\rangle$$
$$= L\, du(w)^2 + 2M\, du(w)\, dv(w) + N\, dv(w)^2$$



مثال- در صفحه برش‌های قائم همگی خطوط راست هستند که انحنای آنها صفر است. پس $II_p \equiv 0$

مثال- روی کره به شعاع R همه برش‌های قائم دوایر عظیمه به شعاع R هستند و انحنای آنها $\frac{1}{R}$ است.

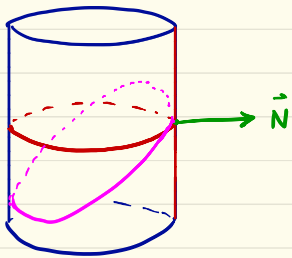
اگر $\vec{N}(p)=p$، آنگاه $II_p\langle v, v\rangle = \frac{1}{R}$ در همه نقاط $p\in S^2$

$$|v| = 1$$

در شکل جلسه قبل فرم اساسی نوع دوم در نقشه $\sigma(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ به صورت $d\theta^2+\cos^2\theta\, d\varphi^2$ محاسبه شد.

$$v = d\theta(v)\,\sigma_\theta + d\varphi(v)\,\sigma_\varphi \quad , \quad |\sigma_\varphi|^2=\cos^2\theta$$

$$d\theta(v)^2 + \cos^2\theta\, d\varphi(v)^2 = 1$$



مثال - یک استوانه برش‌های قائم از یک خط راست و بیضی و همچنین دایره می‌توانند باشند

اگر سطح مقطع استوانه دایره به شعاع یک باشد و محور آن در راستای محور z }.

$$II_p(e_3,e_3) = 0$$

انحنای همه بیضی‌ها بین صفر و یک است. در نتیجه

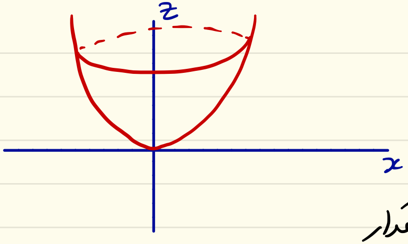
$$0 \le II_p\langle w,w\rangle \le 1$$

$$\forall\ |w| = 1$$

بنابر محاسبه جلسه قبل در نقشه $\sigma(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ ، $II_p\langle w,w\rangle = d\theta(w)^2$

$$w = d\theta(w)\sigma_\theta + dz(w)\sigma_z$$

تعریف - بیشترین مقدار و کمترین مقدار $II_p\langle w,w\rangle$ برای $|w|=1$ را انحناهای اصلی رویه می‌نامیم.



مثال- خم $z=f(x)$ را حول محور z دوران دهید

$f'(0)=0 \Leftarrow$ شکل حاصل یک رویه هموار در نقطه $p=(0,0,0)$ است.

همه برش‌های قائم، دوران نمودار $z=f(x)$ است. در نتیجه انحنای همگی در نقطه p مقدار

ثابت دارد که برابر $f''(0)$ است. مقایسه کنید با فرم اساسی نوع دوم که از نقشه

$$\sigma(x,y)=(x,y,f(\sqrt{x^2+y^2}))$$

هندسه دیفرانسیل

جلسه هفده   ۹۷/۸/۱۹

انتقال موازی و مشتق کوواریان

اگر روی رویه S در حالت حرکت باشیم برای یک ناظر روی S، شتابی قابل درک است که در راستای فضای مماس S باشد

یعنی اگر $\gamma(t)$ خمی روی S باشد، بردار سرعت برابر $V(t)=\frac{d\gamma}{dt}\in T_{\gamma(t)}S$ و شتاب $\vec{a}(t)=\frac{dV}{dt}$. تجزیه زیر را می‌توانیم داشته باشیم

$$\vec{a}(t)=(\vec{a}\cdot\vec{N})\vec{N}+\vec{u} \qquad \vec{u}\in T_{\gamma(t)}S$$

از نقطه یک ناظر بیرونی شتاب همواره بردار $\vec{a}$ است ولی از نقطه ناظر روی رویه مولفه مماسی شتاب بردار $\vec{u}$

قابل درک است. مولفه مماسی از عبارت زیر به دست می‌آید

$$\nabla_\gamma V=\frac{dV}{dt}-\left(\frac{dV}{dt}\cdot\vec{N}\right)\vec{N}$$

و به آن مشتق کوواریان $\vec{V}$ در امتداد γ گفته می‌شود.

اگر $\nabla_\gamma V=0$ در هر نقطه γ، می‌گوییم V موازی در امتداد γ است. در این حالت $\vec{V}$ در همه نقاط موازی بردار عمود $\vec{N}$ است.

فرض کنید $\gamma(t)=\sigma(u(t),v(t))$ یک منحنی روی S باشد و $V(t)=\alpha(t)\,\sigma_u+\beta(t)\,\sigma_v$ میدان برداری مماس در امتداد γ باشد

$$\nabla_\gamma \dot V = \dot V - (\dot V\cdot \vec N)\,\vec N = p\,\sigma_u + q\,\sigma_v$$

$$\begin{cases} \dot V\cdot\sigma_u = pE + qF \\ \dot V\cdot\sigma_v = pF + qG \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot V\cdot\sigma_u \\ \dot V\cdot\sigma_v \end{bmatrix}$$

در نتیجه میدان برداری $\vec V$ موازی در امتداد γ است اگر و تنها اگر $\dot V\cdot\sigma_u=\dot V\cdot\sigma_v=0$ برای نقشه σ .

$$\dot V = \dot\alpha\,\sigma_u + \dot\beta\,\sigma_v + \alpha\left[\sigma_{uu}\,\dot u + \sigma_{uv}\,\dot v\right] + \beta\left[\sigma_{vu}\,\dot u + \sigma_{vv}\,\dot v\right]$$

$$\begin{cases} \sigma_{uu} = \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + L \vec{N} \\ \sigma_{uv} = \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + M \vec{N} \\ \sigma_{vv} = \Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + N \vec{N} \end{cases}$$

شش ضریب Γ_{ij}^k را ضرایب کریستوفل می‌نامیم که برحسب فرم اساسی نوع اول به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{uu} \cdot \sigma_u \\ \sigma_{uu} \cdot \sigma_v \end{bmatrix}$$

$$E = |\sigma_u|^2 \Rightarrow E_u = 2\sigma_{uu} \cdot \sigma_u$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v \Rightarrow F_u = \sigma_{uu} \cdot \sigma_v + \sigma_u \cdot \sigma_{uv} \Rightarrow \sigma_{uu} \cdot \sigma_v = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G E_u - 2 F F_u + F E_v}{2(EG - F^2)} \quad , \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2 E F_u - E E_v - F E_u}{2(EG - F^2)}$$

در ادامه محاسبه مشتق کواریان بردار V خواهیم داشت:

$$\dot{V} = \dot{\alpha}\,\sigma_u + \dot{\beta}\,\sigma_v + \alpha\left[\sigma_{uu}\,\dot{u} + \sigma_{uv}\,\dot{v}\right] + \beta\left[\sigma_{vu}\,\dot{u} + \sigma_{vv}\,\dot{v}\right]$$

$$= \left[\dot{\alpha} + \alpha\left(\Gamma_{11}^{1}\,\dot{u} + \Gamma_{12}^{1}\,\dot{v}\right) + \beta\left(\Gamma_{12}^{1}\,\dot{u} + \Gamma_{22}^{1}\,\dot{v}\right)\right]\sigma_u$$

$$+ \left[\dot{\beta} + \alpha\left(\Gamma_{11}^{2}\,\dot{u} + \Gamma_{12}^{2}\,\dot{v}\right) + \beta\left(\Gamma_{12}^{2}\,\dot{u} + \Gamma_{22}^{2}\,\dot{v}\right)\right]\sigma_v + (\cdots)\vec{N}$$

در نتیجه شرط لازم و کافی برای اینکه V در راستای γ موازی باشد این است که در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} + \alpha\left(\Gamma_{11}^{1}\,\dot{u} + \Gamma_{12}^{1}\,\dot{v}\right) + \beta\left(\Gamma_{12}^{1}\,\dot{u} + \Gamma_{22}^{1}\,\dot{v}\right) = 0 \\ \dot{\beta} + \alpha\left(\Gamma_{11}^{2}\,\dot{u} + \Gamma_{12}^{2}\,\dot{v}\right) + \beta\left(\Gamma_{12}^{2}\,\dot{u} + \Gamma_{22}^{2}\,\dot{v}\right) = 0 \end{cases}$$

در نتیجه اگر $\gamma(t)$ روی S داده شده باشد و $V(t_0) = V_0$ مشخص باشد، آنگاه ضرایب $V(t) = \alpha(t)\sigma_u + \beta(t)\sigma_v$

در معادله دیفرانسیل بالا صدق می‌کند با شرط اولیه $\alpha(t_0) = \alpha_0$ و $\beta(t_0) = \beta_0$ که $V_0 = \alpha_0\,\sigma_u + \beta_0\,\sigma_v$

می‌دانیم این دستگاه معادله دیفرانسیل جواب یکتا دارد. یعنی با مشخص شدن $V(t_0)=V_0$ دقیقاً یک میدان برداری در راستای γ وجود دارد که موازی γ است و $\nabla_\gamma V=0$.

تعریف - اگر $\gamma(t_0)=p$ و $\gamma(t_1)=q$ به ازای هر بردار دلخواه $V_0\in T_pS$ میدان برداری مماسی γ یکتا وجود دارد که موازی γ است. اگر $V(t_1)=V_1$. بردار V_1 را انتقال موازی V_0 در راستای γ می‌نامیم. درحقیقت نگاشت خطی

$$\Pi_\gamma^{p,q}: T_pS \longrightarrow T_qS$$

وجود دارد که هر بردار در فضای مماس T_pS را به صورت موازی به نقطه q انتقال می‌دهد.

چون معادله دیفرانسیل عادی صفحه قبل یک دستگاه خطی به صورت $\begin{pmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\end{pmatrix}=A(t)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ است درنتیجه هم جواب به صورت

$$\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}=\Phi(t)\begin{pmatrix}\alpha(t_0)\\ \beta(t_0)\end{pmatrix}$$

است که $\Phi(t)$ یک ماتریس 2×2 وارون پذیر است. این مطلب نشان می‌دهد که نگاشت $\Pi_\gamma^{p,q}$ خطی است.

گزاره: $\Pi_\gamma^{p,q}$ ایزومتری بینِ دو فضای مماس T_pS و T_qS است.

اثبات ـ $v_0, w_0 \in T_pS$ و متناظر این دو میدانهای برداری $V(t)$ و $W(t)$ در امتداد γ وجود دارند که موازی γ هستند.

$$\frac{d}{dt}(V\cdot W) = \dot{V}\cdot W + V\cdot\dot{W}$$

اما چون V و W موازی γ هستند پس $\dot{V}$ و $\dot{W}$ هر دو موازی بردار عمود $\vec{N}$ هستند. از آنجا که $V, W \in T_{\gamma(t)}S$ در نتیجه

$$\dot{V}\cdot W = V\cdot\dot{W} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(V\cdot W) = 0$$

مثال - روی کره با نقشه $\sigma(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ فرم اساسی نوع اول و نوع دوم به صورت $d\theta^2+\cos^2\theta\, d\varphi^2$ است.

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}=\Gamma^1_{12}=0 \quad , \quad \Gamma^2_{12}=-\tan\theta \quad , \quad \Gamma^1_{22}=\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dot\alpha+\beta\sin\theta\cos\theta\,\dot v=0 \\ \dot\beta-\alpha\tan\theta\,\dot u-\beta\tan\theta\,\dot v=0 \end{cases}$$

مسیر $\gamma(\varphi)=\sigma(\theta_0,\varphi)$ را در نظر بگیرید. پس $\dot u=0$, $\dot v=1$ و

$$\ddot\alpha+\alpha\sin^2\theta_0=0 \Rightarrow \alpha(\varphi)=A\cos(\varphi\sin\theta_0)+B\sin(\varphi\sin\theta_0)$$

به شرط آنکه $\theta_0\neq 0$

$$\Rightarrow \beta(\varphi)=\frac{-\dot\alpha}{\sin\theta_0\cos\theta_0}$$

میدان برداری $V(\varphi)=\alpha\,\sigma_\theta+\beta\,\sigma_\varphi$ موازی در راستای دایره‌ی

با عرض جغرافیایی ثابت $\theta=\theta_0$ هستند. اگر $\theta_0=0$ یعنی γ روی خط استوا باشد، $\dot\alpha=\dot\beta=0$ و در این حالت

نتیجه این است که میدان های برداری σ_φ و σ_θ هر دو موازی در امتداد استوا هستند.

$$\Pi_\gamma^{p,q}\Big(\underbrace{\alpha\,\sigma_\theta+\beta\,\sigma_\varphi}_{\text{مختصات در نقطه } p}\Big)=\underbrace{\alpha\,\sigma_\theta+\beta\,\sigma_\varphi}_{\text{مختصات در نقطه } q}$$

که α و β توابع ثابت هستند.

در حالت کلی روی دایره $\theta=\theta_0$ میدانهای برداری زیر موازی هستند:

$A=1,\ B=0$
$$\cos(\varphi\sin\theta_0)\,\sigma_\theta+\frac{\sin(\varphi\sin\theta_0)}{\cos\theta_0}\,\sigma_\varphi$$

$A=0,\ B=1$
$$\sin(\varphi\sin\theta_0)\,\sigma_\theta-\frac{\cos(\varphi\sin\theta_0)}{\cos\theta_0}\,\sigma_\varphi$$

هر ترکیب خطی این دو میدان نیز در راستای γ موازی است.

دقت کنید در این مثال $\sigma_\varphi=\dot{\gamma}$ تنها در صورتی موازی امتداد γ است که $\theta_0=0$.

هندسه دیفرانسیل

مطلب جدید ۹۷/۸/۲۱

انحنای گاوسی، میانگین :

در جلسات قبل دیدیم که نگاشت وینگارتن در پایه $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ برای یک نقطه مشخص، نمایش زیر را دارد :

$$W_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

فرم اساسی نوع دوم به کمک آن به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\mathrm{II}_p(\omega) = \langle W_p(\omega), \omega \rangle \qquad \forall \omega \in T_pS$$

همچنین $K_1 = \max\limits_{|\omega|=1} \mathrm{II}_p(\omega)$ و $K_2 = \min\limits_{|\omega|=1} \mathrm{II}_p(\omega)$ را انحناهای اصلی رویه S در نقطه p می‌نامیم.

ادعا می‌کنیم که K_1 و K_2 مقادیر ویژه عملگر خطی W_p است.

از آنجا که W_p یک عملگر خودالحاقی (یا متقارن) است یک نمایش قطری در یک پایه متعامد یکه دارد یعنی بردارهای متعامد یکه $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2\}$ در T_pS وجود دارند، $W_p(\vec{t}_1) = \lambda_1 \vec{t}_1$, $W_p(\vec{t}_2) = \lambda_2 \vec{t}_2$.

حال اگر $\omega = x\vec{t}_1 + y\vec{t}_2$ آنگاه $|\omega|^2 = x^2+y^2$ و

$$\mathbb{I}_p(\omega) = \langle W_p(\omega), \omega \rangle = (x\lambda_1\vec{t}_1 + y\lambda_2\vec{t}_2 \,,\, x\vec{t}_1 + y\vec{t}_2) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$$

بنابراین بیشینه و کمینه عبارت فوق وقتی $x^2+y^2=1$ است مقادیر λ_1 و λ_2 است. درنتیجه λ_1 و λ_2 همان انحناهای اصلی k_1 و k_2 هستند.

تعریف: بردارهای $\vec{t}_1$ و $\vec{t}_2$ که $W_p(\vec{t}_i) = k_i\vec{t}_i$ را بردارهای اصلی رویه S در نقطه p می‌نامند.

تعریف: مقدار $K = k_1 k_2 = \det W_p$ را انحنای گاوسی رویه S در نقطه p می‌نامیم.
مقدار $H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{trac} W_p$ را انحنای میانگین رویه S در نقطه p می‌نامیم.

گزاره: براساس فرم اساسی نوع اول و نوع دوم و ماتریس نمایش W_p داریم:

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \,, \qquad H = \frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$$

به علاوه انحناهای اصلی ریشه‌های چندجمله‌ای زیر هستند:

$$\det\begin{bmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{bmatrix}=0$$

مثال- روی کره، فرم اساسی نوع اول و نوع دوم $d\theta^2+\cos^2\theta\, d\varphi^2$ است. بنابراین انحناهای اصلی ریشه‌های چندجمله‌ای زیر هستند:

$$\begin{vmatrix} 1-K & 0 \\ 0 & \cos^2\theta\,(1-K) \end{vmatrix}=\cos^2\theta\,(1-K)^2=0 \implies K=1$$

در نتیجه $K=H=1$.

مثال- روی صفحه چون فرم اساسی نوع دوم صفر است، همه انحناها صفر هستند.

مثال- روی استوانه در نقشه $\sigma(u,v)=(\cos u, \sin u, v)$ فرم اساسی نوع اول du^2+dv^2 است و فرم اساسی نوع دوم dv^2 است.

$$\begin{vmatrix} -K & 0 \\ 0 & 1-K \end{vmatrix}=K(K-1)=0$$

انحناهای اصلی $K_1=0$ و $K_2=1$ است و

$$H=\frac{1}{2}\ ,\ K=0$$

مثال - رویه دوار $\sigma(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ که $f>0$ و $\dot f^2+\dot g^2=1$. ($\gamma(u)=(f(u),g(u))$ در حقیقت

یک خم با پارامتر برحسب طول در صفحه (x,z) است که حول محور z دوران داده شده است.)

فرم اساسی نوع اول $\quad du^2+f^2\,dv^2$

فرم اساسی نوع دوم $\quad (\dot f\ddot g-\ddot f\dot g)\,du^2+(f\dot g)\,dv^2$

$$K=\frac{\dot g}{f}(\dot f\ddot g-\ddot f\dot g)\ , \qquad 2H=tr\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & f^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dot f\ddot g-\ddot f\dot g & 0\\ 0 & f\dot g\end{pmatrix}\right]$$

$$=\dot f\ddot g-\ddot f\dot g+\frac{\dot g}{f}$$

$$\dot f^2+\dot g^2=1 \implies \dot f\ddot f+\dot g\ddot g=0 \implies \dot f\ddot g-\ddot f\dot g=\frac{(\dot f^2+\dot g^2)\ddot g\dot g}{\dot f\dot g}=\frac{\ddot g}{\dot f}=\frac{-\ddot f}{\dot g}$$

$$K=\frac{-\ddot f}{f}$$

در این مثال با قرار دادن $f\equiv 1$ و $g(u)=u$ یک استوانه به دست می‌آید و

برای $f(u)=\cos u$ و $g(u)=\sin u$ یک کره.

قضیه (اویلر) اگر γ یک خم روی رویه که باشد و k_1 و k_2 انحناهای اصلی و $\vec{t}_1$ و $\vec{t}_2$ بردارهای اصلی باشند، در این صورت انحنای قائم خم γ

برابر است با:

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

که در آن θ زاویه جهت دار بین $\vec{t}_1$ و $\dot{\gamma}$ است.

اثبات ـ مختصات بردار $\dot{\gamma}$ در پایه $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2\}$ برابر است با: $\dot{\gamma} = \cos\theta\, \vec{t}_1 + \sin\theta\, \vec{t}_2$

در نتیجه:

$$k_n = \mathrm{II}_p(\dot{\gamma}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

تعریف ـ اگر دو انحنای اصلی در نقطه p برابر باشند، آن نقطه را نافی می نامیم. در این صورت عملگر خطی W_p مضربی از همانی است

یعنی $W_p = kI$ و فرم اساسی نوع دوم مضربی از فرم اساسی نوع اول است.

$$\mathrm{II}_p(w) = (W_p(w), w) = k|w|^2 = k\, \mathrm{I}_p(w)$$

این اتفاق برای همه نقاط صفحه و کره می افتد.

گزاره: اگر تمام نقاط رویه یک سطح نافی باشند، آنگاه که زیرمجموعه‌ای از صفحه یا کره است.

اثبات - می‌دانیم $W_p(w) = K_p w$ برای هر $w \in T_pS$ که K_p انحنای اصلی در نقطه p است.

$\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک نقشه برای این رویه بگیرید، آنگاه

$$W_p(\sigma_u) = -\vec{N}_u \quad , \quad W_p(\sigma_v) = -\vec{N}_v$$

بنابراین در هر نقطه داریم

$$(*) \qquad \vec{N}_u = -K\sigma_u \, , \, \vec{N}_v = -K\sigma_v$$

$$\Rightarrow -\vec{N}_{uv} = (K\sigma_u)_v = (K\sigma_v)_u \Rightarrow K_v\sigma_u + \cancel{K\sigma_{uv}} = K_u\sigma_v + \cancel{K\sigma_{uv}}$$

اما بردارهای $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ مستقل خطی هستند، در نتیجه $K_u = K_v = 0$ یعنی K در همه جا روی یک مقدار ثابت دارد.

در نتیجه از روابط $(*)$ خواهیم داشت $\frac{\partial}{\partial u}(\vec{N} + K\sigma) = \frac{\partial}{\partial v}(\vec{N} + K\sigma) = 0$ یعنی بردار $\vec{N} + K\sigma$

بردار ثابت مثلاً $\vec{a}$ است. $\vec{N} + K\sigma = \vec{a}$

اگر $K \neq 0$ خواهیم داشت $\|\sigma - \frac{1}{K}\vec{a}\| = \|-\frac{1}{K}\vec{N}\| = \frac{1}{K}$ یعنی فاصله نقاط $\sigma(u,v)$ از نقطه ثابت

$\frac{1}{k}\vec{a}$ برابر مقدار ثابت $1/k$ است. یعنی نقاط $\sigma(u,v)$ روی یک کره به شعاع $1/k$ قرار دارند.

حال اگر $K=0$، آنگاه بردار عمود $\vec{N}=\vec{a}$ ثابت است

$$\begin{cases} (\vec{N}\cdot\sigma)_u = \vec{N}\cdot\sigma_u = 0 \\ (\vec{N}\cdot\sigma)_v = \vec{N}\cdot\sigma_v = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$ $\vec{N}\cdot\sigma = c$ مقدار ثابت دارد.

$\Downarrow$

σ روی صفحه $\vec{N}\cdot X = c$ قرار دارد.

قبلاً دیدیم که برای خمهای مسطح، $K_s = \phi'$ که ϕ زاویه بین بردار مماس (یا بردار عمود) و یک راستای ثابت بود. در واقع به تعبیری آهنگ تغییرات بردار عمود یا بردار مماس میزان خمیدگی خم را نشان می‌دهد. انتظار داریم که این اتفاق برای رویه‌ها بیفتد.

در واقع آهنگ تغییرات بردار عمود $\vec{N}$ بر رویه S در نقطه p بدین صورت تعریف می‌شود که ناحیه R حول نقطه p در نظر بگیرید

نسبت مساحت ناحیه‌ای که بردار عمود روی کره S^2 جارو می‌کند به مساحت ناحیه R، آهنگ تغییرات بردار عمود در این همسایگی است.

مقدار $\dfrac{\text{مساحت}(\mathcal{G}(R))}{\text{مساحت}(R)}$ وقتی مساحت R به صفر میل کند به انحنای گاوسی S در p همگرا است.

قضیه: $\sigma: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک نقشه برای رویه که باشد و دیسک بسته

$$R_\delta := \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : \quad (u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \leq \delta^2 \}$$

حول نقطه (u_0,v_0) به شعاع δ در U را درنظر بگیرید:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mathcal{G}(R_\delta) \text{ مساحت}}{\sigma(R_\delta) \text{ مساحت}} = |K|$$

اگر مساحت را با علامت در تعریف کنیم مقدار حد دقیقاً K است.

اثبات.

$$\sigma(R_\delta) \text{ مساحت} = \int_{R_\delta} \| \sigma_u \times \sigma_v \| \, du \, dv$$

اگر نقشه $\mathcal{G} \circ \sigma = \vec{N}$ را برای کره درنظر بگیریم آنگاه

$$\mathcal{G}(R_\delta) \text{ مساحت} = \int_{R_\delta} \| N_u \times N_v \| \, du \, dv$$

اگر $\begin{cases} \vec{N}_u = a\sigma_u + b\sigma_v \\ \vec{N}_v = c\sigma_u + d\sigma_v \end{cases}$ بنابر محاسبات جلسه قبل (برای پیدا کردن ماتریس W_p)

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M & N \\ N & L \end{bmatrix}$$

$$N_u \times N_v = (a\sigma_u + b\sigma_v) \times (c\sigma_u + d\sigma_v)$$

$$= (ad-bc)(\sigma_u \times \sigma_v)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}\right) \sigma_u \times \sigma_v$$

$$= K(\sigma_u \times \sigma_v)$$

$\Rightarrow$ نسبت مساحت‌ها $= \dfrac{\int_{R_\delta} |K| \, \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du\, dv}{\int_{R_\delta} \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du\, dv} \longrightarrow |K(u_0, v_0)|$

نکته ـ اگر $N_u \times N_v$ روی کره هم جهت با بردار $\tilde{N}$ باشد مساحت کره را با علامت $(+)$ وگرنه با علامت $(-)$ محاسبه کنیم،

آنگاه، مقدار حد دقیقاً K خواهد بود.

هندسه دیفرانسیل

مطلب نوزده ۹۷/۸/۲۸

مثالهایی از رویه‌های با انحنای ثابت :

فرم کانونی رویه : اگر σ یک نقشه‌ای برای رویه‌ی S باشد که $\sigma(0,0)=0$ و صفحه مماس بر رویه در نقطه $p=0$ صفحه $z=0$ باشد.

در همسایگی مبدأ می‌توانیم بنویسیم

$$\sigma(s,t) \approx \cancel{\sigma(0,0)}^{\,0} + s\,\sigma_s(0,0) + t\,\sigma_t(0,0) + \frac{1}{2}\left(s^2\sigma_{ss} + 2st\,\sigma_{st} + t^2\sigma_{tt}\right)$$

بردار عمود بر رویه در نقطه $p=0$ برابر $\vec{N}=(0,0,1)$ است. در نتیجه اگر رویه را به صورت $z=h(t,s)$ در همسایگی مبدأ نگاه کنیم :

$$z = \sigma\cdot\vec{N} = \frac{1}{2}\left[s^2(\sigma_{ss}\cdot\vec{N}) + 2st(\sigma_{st}\cdot\vec{N}) + t^2(\sigma_{tt}\cdot\vec{N})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[Ls^2 + 2Mst + Nt^2\right]$$

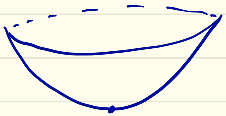
که $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ فرم اساسی نوع دوم σ است. در نتیجه رویه S تقریباً شبیه رویه زیر است.

$$z = \frac{1}{2}\left[Ls^2 + 2Mst + Nt^2\right]$$

که با تغییر متغیر به صورت $z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2)$ نوشته می‌شود. k_1 و k_2 مقادیر ویژه ماتریس

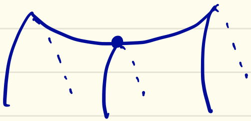
$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$ است. اگر نقشه σ را به گونه‌ای انتخاب کرده باشیم که $\sigma_s(0,0)=e_1$ و $\sigma_t(0,0)=e_2$ آنگاه فرم اساسی

نوع اول در نقطه $p=0$ به صورت ds^2+dt^2 است و در نتیجه مقادیر ویژه k_1 و k_2 همان انحناهای اصلی رویه در نقطه p است.

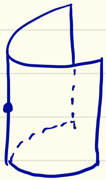


(۱) اگر k_1 و k_2 هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند رویه در همسایگی p شبیه یک سهمی‌گون بیضوی است.

نقطه p را نقطه بیضوی گوییم.



(۲) اگر k_1 و k_2 هر دو ناصفر و مختلف العلامه باشند، آنگاه رویه شبیه یک سهمی‌گون هذلولوی است. نقطه p را نقطه هذلولوی گوییم.



(۳) اگر یکی از انحناهای اصلی صفر و دیگری ناصفر، آنگاه رویه تقریباً یک استوانه سهموی است.

نقطه p را نقطه سهموی گوییم.

(۴) اگر هر دو انحناها صفر باشد، نقطه p را نقطه تخت رویه می‌گوییم.

رویه با انحنای گاوسی ثابت :

در شکل جلسه قبل دیدیم اگر رویه دوار $\sigma(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ را در نظر بگیریم، انحنای گاوسی آن

$$K = -\frac{\ddot f}{f}$$

است (که البته $\dot f^2 + \dot g^2 = 1$) .

<u>مثال ۱</u> $(K=0)$

$$f(u) = au + b$$

$$\Rightarrow \dot g = \pm\sqrt{1-a^2} \Rightarrow g(u) = \pm\sqrt{1-a^2}\, u + c$$

مقدار c تنها رویه را در امتداد محور z انتقال می‌دهد لذا فرض می‌کنیم $z=0$. یک شکل از این رویه به صورت زیر است :

$$\sigma(u,v) = (b\cos v, b\sin v, 0) + u(a\cos v, a\sin v, \sqrt{1-a^2})$$

حالت $-\sqrt{1-a^2}$ برای تابع g نیز همین حالت بالا است زیرا با تغییر $(u,v)\mapsto(-u, v+\pi)$ و $b \mapsto -b$ به نقشه فوق می‌رسیم. در حالت $|a|<1$ یک مخروط است و برای $a=0$ یک استوانه.

مثال ۲ $K = \frac{1}{R^2} > 0$ انحنای ثابت مثبت.

$$\frac{\ddot{f}}{f} = -\frac{1}{R^2} \Rightarrow f(u) = a\cos\left(\frac{u}{R} + b\right)$$

$$\dot{g} = \pm\left[1 - \frac{a^2}{R^2}\sin^2\left(\frac{u}{R} + b\right)\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow g(u) = \int \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}\sin^2\left(\frac{u}{R} + b\right)}\, du$$

در حالت $a = R$، $g(u) = R\sin\left(\frac{u}{R} + b\right)$ در نتیجه در این حالت

$$r(u,v) = \left(R\cos\frac{u}{R}\cos v,\ R\cos\frac{u}{R}\sin v,\ R\sin\frac{u}{R}\right)$$

که پارامتریزاسیون یک کره است.

در حالت کلی $(f(u), g(u))$ یک قسمتی از بیضی در صفحه (x,z) نمایش می‌دهند و رویه حاصل یک بیضی‌گون است.

مثال ۳ انحنای ثابت منفی : $K=-1$

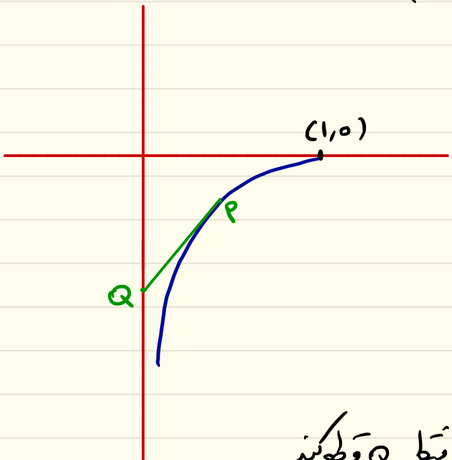
$$\ddot{f} = f \quad \Rightarrow \quad f(u) = ae^{u} + be^{-u}$$

فرض کنید $b=0$ و $a=1$

$$g(u) = \int \sqrt{1-e^{2u}}\, du$$

با تغییر متغیر $\cos\theta = e^{u}$ نتیجه انتگرال عبارت زیر است (برای اینکه عبارت زیر رادیکال معنا داشته باشد $u<0$)

$$g(u) = \sqrt{1-e^{2u}} - \ln\left(e^{-u} + \sqrt{e^{-2u}-1}\right)$$



اگر $x = e^{u} = f(u)$ ، آنگاه

$$z = g(u) = \sqrt{1-x^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

درحقیقت رویه بدست آمده دوران خم فوق است که به تراکتریکس

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

این خم دارای این ویژگی است که اگر از نقطه دلخواه P بر آن خط مماس رسم کنیم تا محور z ها را در نقطه Q قطع کند

طول پاره خط PQ مقدار ثابت یک است.

مثال- رویهٔ خط‌کشی شده: $\sigma(u,v)=\gamma(u)+v\,\delta(u)$ که γ یک خم در فضا است و در هر نقطه آن در راستای δ توسعه داده می‌شود. می‌توان فرض کرد که $|\delta|=1$.

$$\sigma_u=\dot\gamma+v\dot\delta \quad , \quad \sigma_v=\delta(u) \quad \Rightarrow \vec N=\frac{\sigma_u\times\sigma_v}{\|\sigma_u\times\sigma_v\|}$$

$$\sigma_{uv}=\dot\delta \quad , \quad \sigma_{vv}=0$$

$$M=\sigma_{uv}\cdot\vec N=\dot\delta\cdot\vec N \quad , \quad N=\sigma_{vv}\cdot\vec N=0$$

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-(\dot\delta\cdot\vec N)^2}{EG-F^2}\leqslant 0$$

اگر رویهٔ خط‌کشی شده دارای انحنای گاوسی صفر باشد باید همه جا $\dot\delta\cdot\vec N=0$. یعنی $\dot\delta\cdot(\sigma_u\times\sigma_v)=0$ و سه بردار $\dot\delta$، σ_u و σ_v وابستهٔ خطی هستند. اما چون $|\delta|=1$ پس $\delta\cdot\dot\delta=0$ و δ و $\dot\delta$ مستقل خطی هستند. پس

در حالت $K=0$، $\sigma_u=\alpha\,\delta(u)+\beta\,\dot\delta(u)$

دقت کنید $\sigma_u=\dot\gamma(u)+v\,\dot\delta(u)$

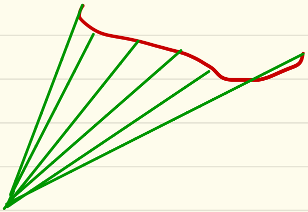
یعنی باید $\dot{\gamma}(u) = f(u)\,\delta(u) + g(u)\,\dot{\delta}(u)$ در همه نقاط.

(۱) یک حالت وقتی است که $f = \dot{g}$ در این صورت $\gamma(u) = a + g(u)\,\delta(u)$ و رویه خط‌کشی شده به صورت

$$\sigma(u,v) = a + g(u)\,\delta(u) + v\,\delta(u)$$

با فرض $a=0$ و تغییر متغیر $\tilde{v} = v + g(u)$ به رویه $\sigma(u,\tilde{v}) = \tilde{v}\,\delta(u)$

که یک مخروط است.



(۲) δ و $f - \dot{g}$ هرجا ناصفر باشند، آنگاه تغییر متغیر

$$\tilde{v} = \frac{v + g(u)}{f - \dot{g}} \quad , \quad \tilde{\gamma}(u) = \gamma(u) - g(u)\,\delta(u)$$

$$\sigma(u,v) = \tilde{\gamma}(u) + \tilde{v}\,\dot{\tilde{\gamma}}(u)$$

که در واقع یک رویه خط‌کشی شده است که بردار δ همان بردار مماس خم $\tilde{\gamma}$ است. این رویه را گسترده مماسی خم $\tilde{\gamma}$ می‌نامیم.

(۳) حالت $\delta' = 0$. بنابراین $\delta(s)$ یک بردار ثابت است که در حقیقت رویه به دست آمده یک استوانه است.

تعریف - رویه S را <u>تخت</u> می‌نامیم هرگاه انحنای گاوسی آن در همه نقاط صفر باشد.

یادآوری: نقطه p را نافی گوییم هرگاه انحناهای اصلی در آن نقطه برابر باشند.

قضیه: اگر نقطه p روی رویه تخت S نافی نباشد، آنگاه نقشه‌ای برای S در همسایگی p وجود دارد که رویه خط‌کشی شده است.

هندسه دیفرانسیل

جلسه بیست ۹۷/۹/۳

قضیه ۱: اگر نقطه p روی رویه تخت S نافی نباشد، آنگاه نقشه ای برای S در همسایگی p وجود دارد که رویه خط کشی شده است.

گزاره ۲: فرض کنید p نقطه ای روی رویه تخت S باشد که نافی نیست. در این صورت نقشه $\sigma(u,v)$ برای رویه در همسایگی p وجود دارد به طوری که فرم اساسی نوع اول و نوع دوم آن به صورت Edu^2+Gdv^2 و Ldu^2+Ndv^2 هستند.

اثبات قضیه ۱: به کمک گزاره ۲ نشان می دهیم نقشه $\sigma(u,v)$ به صورت $\sigma(u,v)=\gamma(u)+v\,\delta(u)$ است یا به طور معادل به ازای هر مقدار ثابت u_0، $\sigma(u_0,v)$ یک خط راست است.

از طرفی انحنای گاوسی این رویه برابر $K=\dfrac{LN}{EG}$ است. در نتیجه در هر نقطه ای از رویه $L=0$ یا $N=0$ و چون p نافی نیست در نقطه p فقط یکی از این دو صفر است. فرض کنید $L\neq 0$ در نقطه p و می توان فرض کرد که در یک همسایگی p همیشه $L\neq 0$ و در نتیجه باید $N=0$. (تذکر: در حالتی که $L=0$ و $N\neq 0$ آنگاه $\sigma(u,v_0)$ به ازای هر v_0 ثابت یک خط راست می شود.)

برای اینکه نشان دهیم $\sigma(u_0, v)$ یک خط راست است، بردار یکه مماس خم $T = \frac{\sigma_v}{G^{1/2}}$ است، کافی است نشان دهیم $\partial_v T = 0$.

از طرفی

$$\vec{N}_v \cdot \sigma_v = 0 \qquad \vec{N}_u \cdot \sigma_u = -L$$

$$\vec{N}_v \cdot \sigma_u = 0 \qquad \vec{N}_u \cdot \sigma_v = 0$$

در نتیجه $\vec{N}_v = 0$ و $\vec{N}_u = \frac{-L}{E}\sigma_u$ بنابراین

$$T \cdot \vec{N} = 0 \implies \partial_v T \cdot \vec{N} = -T \cdot \vec{N}_v = 0$$

$$|T| = 1 \implies \partial_v T \cdot T = 0 \implies \partial_v T \cdot \sigma_v = 0$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = 0 \implies T \cdot \vec{N}_u = 0 \implies \partial_v T \cdot \vec{N}_u = -T \cdot \underbrace{\cancel{\vec{N}_{uv}}}_{0} = 0 \implies \partial_v T \cdot \sigma_u = 0$$

$$\implies \partial_v T = 0$$

برای اثبات گزاره ۲ حکم کلی‌تر زیر را اثبات می‌کنیم:

گزاره ۳: فرض کنید $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ یک نقشه برای رویه S باشد و بردارهای مماس

$$e_1(\tilde{u},\tilde{v}) = a(\tilde{u},\tilde{v})\,\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + b(\tilde{u},\tilde{v})\,\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$$

$$e_2(\tilde{u},\tilde{v}) = c(\tilde{u},\tilde{v})\,\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + d(\tilde{u},\tilde{v})\,\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$$

را در نظر بگیرید که ضرایب a، b، c و d توابعی هموار هستند. اگر e_1 و e_2 در نقطه $(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$ مستقل خطی باشند، در این صورت در یک همسایگی $\tilde{\sigma}(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$ نقشه σ وجود دارد که σ_u و σ_v موازی e_1 و e_2 هستند.

اثبات گزاره ۲: نقشه دلخواه $\tilde{\sigma}$ را برای S در نظر بگیرید و e_1 و e_2 را بردارهای اصلی متناظر انحناهای اصلی K_1 و K_2 قرار دهید. (از آنجا که p نقطه نافی نیست این بردارها به صورت یکتا و مستقل از نقشه تعیین می‌شوند.)
در نتیجه بنابر گزاره ۳ نقشه σ وجود دارد که σ_u و σ_v موازی e_1 و e_2 باشند. اما چون بردارهای اصلی بر هم عمود هستند، نتیجه می‌شود

$\sigma_u \cdot \sigma_v = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow$ فرم اساسی نوع اول به صورت $E\,du^2 + G\,dv^2$ است

از آنجا که e_1 و e_2 بردارهای اصلی هستند، نتیجه می‌شود σ_u و σ_v بردارهای ویژه ماتریس $\underbrace{\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1}}_{I^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}_{II}$ متناظر K_1 و K_2 هستند.

$$I_1^{-1} II_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad I_1^{-1} II_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad I_1^{-1} II_2 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad II_2 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 E & 0 \\ 0 & k_2 G \end{pmatrix}$$

اثبات گزاره ۳ : به دنبال نگاشت گذار (تغییر پارامتر) $\Phi : U \to \tilde{U}$ هستیم که اگر $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \Phi$

$$\sigma_u = \lambda e_1 \quad , \quad \sigma_v = \mu e_2$$

$$[\lambda e_1, \mu e_2] = D\sigma = D\tilde{\sigma} \cdot D\Phi$$

درحقیقت معادل این است که تابع Φ را پیدا کنیم به طوری که

$$D\Phi = \begin{bmatrix} \lambda a & \mu c \\ \lambda b & \mu d \end{bmatrix}$$

و توابع a، b، c، d داده شده‌اند با شرط $\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0$. برای اینکه Φ نگاشت تغییر مختصات باشد باید

$$0 \neq \det D\Phi = \lambda\mu \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

که معادل این است که $\lambda\mu \neq 0$.

اگر $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$ باید $\nabla\Phi_1=(\lambda a,\mu c)$, $\nabla\Phi_2=(\lambda b,\mu d)$

برای آنکه نگاشت‌های Φ_1 و Φ_2 وجود داشته باشند لازم و کافی است که

$$\begin{cases}(\lambda a)_v=(\mu c)_u\\(\lambda b)_v=(\mu d)_u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\lambda_v-c\mu_u=\mu c_u-\lambda a_v\\b\lambda_v-d\mu_u=\mu d_u-\lambda b_v\end{cases}$$

بنابر قضایای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای این دستگاه خطی مرتبه اول جواب دارد اگر و تنها اگر $0\neq\det\begin{pmatrix}a&-c\\b&-d\end{pmatrix}$

هندسه دیفرانسیل

جلسه بیست و یک   ۹۷/۹/۵

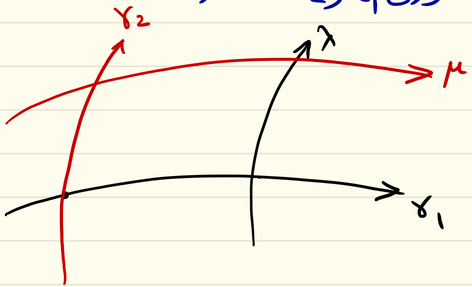
گزاره ۳ : فرض کنید $\tilde\sigma : \tilde U \to \mathbb{R}^3$ یک نقشه برای رویه S باشد و بردارهای مماس

$$e_1(\tilde u,\tilde v) = a(\tilde u,\tilde v)\,\tilde\sigma_{\tilde u} + b(\tilde u,\tilde v)\,\tilde\sigma_{\tilde v}$$

$$e_2(\tilde u,\tilde v) = c(\tilde u,\tilde v)\,\tilde\sigma_{\tilde u} + d(\tilde u,\tilde v)\,\tilde\sigma_{\tilde v}$$

را در نظر بگیرید که ضرایب a، b، c و d توابعی هموار هستند. اگر e_1 و e_2 در نقطه $(\tilde u_0,\tilde v_0)$ مستقل خطی باشند،

در این صورت در یک همسایگی $\tilde\sigma(\tilde u_0,\tilde v_0)$ نقشه σ وجود دارد که σ_u و σ_v موازی e_1 و e_2 هستند.



ایده اثبات : از نقطه $\tilde\sigma(\tilde u_0,\tilde v_0)$ ابتدا خم γ_1 را پیدا می‌کنیم که

$$\dot\gamma_1 = e_1$$

از نقطه $\gamma_1(s_1)$ خم $\lambda(s_1;\cdot)$ را پیدا می‌کنیم $\quad \dot\lambda = e_2$

نشان خواهیم داد $\lambda(s_1;s_2)$ یک در همسایگی $\tilde\sigma(\tilde u_0,\tilde v_0)$ ارائه می‌کند. به وضوح خواهیم داشت $\frac{\partial}{\partial s_2}\lambda = e_2$ ولی تساوی $\frac{\partial}{\partial s_1}\lambda = e_1$ لزوماً برقرار نیست.

به طور مشابه خم‌های γ_2 و μ را می‌سازیم که $\dot\gamma_2 = e_2$ و $\dot\mu = e_1$. در این صورت $\mu(t_1;t_2)$ نیز نقشه دیگری برای رویه است که $\frac{\partial}{\partial t_1}\mu = e_1$ در همه نقاط.

اگر $\sigma(u,v)$ را نقطه تلاقی $\lambda(u;\cdot)$ و $\mu(\cdot;v)$ این دو خم بگیریم، خواهیم دید که σ ویژگی مورد نظر را دارد.

جزئیات اثبات ـ اگر $e = A\,\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + B\,\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$ یک میدان برداری روی رویه باشد، آنگاه همیشه خم γ وجود دارد که $\dot{\gamma} = e$.

در واقع اگر $\gamma(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ باید $\dot{\tilde{u}} = A$ ، $\dot{\tilde{v}} = B$ که یک معادله دیفرانسیل عادی است و برای هر نقطه شروع جواب یکتا دارد.

ابتدا خم γ_1 را پیدا می‌کنیم که $\gamma_1(0) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ و $\dot{\gamma}_1 = e_1$ و به ازای هر مقدار s_1 نزدیک صفر

خم $\lambda(s_1;\cdot)$ را پیدا می‌کنیم که $\dot{\lambda} = e_2$ و $\lambda(s_1;0) = \gamma_1(s_1)$. ادعا می‌کنیم که $\lambda(s_1;s_2)$ یک نقشه در همسایگی $\tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ است.

یعنی باید ثابت کنیم به ازای هر $(\tilde{u}, \tilde{v})$ نزدیک $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ معادله زیر به ازای $(s_1;s_2)$ جواب یکتا دارد. در ضمن $(s_1;s_2)$

تابع هموار نسبت به $(\tilde{u}, \tilde{v})$ است.

$$\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \lambda(s_1;s_2)$$

برای اثبات این ادعا تنها کافیست به کمک قضیه تابع وارون نشان دهیم که $\dfrac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(s_1, s_2)}$ وارون‌پذیر است.

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \cdot \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial s_1} + \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \cdot \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial s_1} = \dfrac{\partial \lambda}{\partial s_1} \\ \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \cdot \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial s_2} + \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \cdot \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial s_2} = \dfrac{\partial \lambda}{\partial s_2} = e_2 \end{cases}$$

هرچند لزوماً تساوی $\dfrac{\partial \lambda}{\partial s_1} = e_1$ در همه نقاط برقرار نیست ولی در نقطه $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ داریم

$$\left.\frac{\partial \lambda}{\partial s_1}\right|_{s_1=s_2=0} = \left.\frac{\partial}{\partial s_1} \gamma_1(s_1)\right|_{s_1=0} = e_1$$

درنتیجه بنابر استقلال خطی $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}$ و $\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$ خواهیم داشت

$$\left.\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(s_1, s_2)}\right|_{s_1=s_2=0} = \left.\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right|_{(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)}$$

که یک ماتریس وارون‌پذیر است.

مشابه بالا خم‌های $\gamma_2(t_2)$ و $\mu(t_1; t_2)$ وجود دارند که

$$\begin{cases} \gamma_2(0) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \\ \dot{\gamma}_2 = e_2 \end{cases}$$

$$\mu(t_1; 0) = \gamma_2(t_1), \quad \frac{\partial}{\partial t_1} \mu(t_1; t_2) = e_1$$

و $\mu(t_1;t_2)$ یک نقشه درهمسایگی $(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$ $\tilde{\sigma}$ ارائه می‌کند.

حال نقطه $\sigma(u,v)$ را محل تلاقی دو خم $s_2 \mapsto \lambda(u;s_2)$ و $t_1 \mapsto \mu(t_1;v)$ قرار دهید

اگر
$$\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v}) = \lambda(u;s_2) = \mu(t_1;v) = \sigma(u,v)$$

برای اینکه $\sigma(u,v)$ یک نقشه باشد، مشابه قبل کافی است نشان دهیم که $\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}$ در نقطه $u=v=0$ وارون پذیر است. از محاسبات قبلی می‌دانیم که

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} = a, & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} = b \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} = c, & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} = d \end{cases}$$

حال نشان می‌دهیم σ همان نقشه مورد نظر است.

از تساوی $\sigma(u,v) = \lambda(u;s_2)$ نسبت به v مشتق بگیرید

$$\sigma_v = \frac{\partial \lambda}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial v} = \frac{\partial s_2}{\partial v}\, e_2$$

به طور مشابه
$$\sigma_u = \frac{\partial t_1}{\partial u} \cdot e_1 .$$

قضیه: اگر S رویه‌ی فشرده باشد، آنگاه نقطه‌ای روی S وجود دارد که در آنجا انحنای گاوسی مثبت است.

اثبات ـ تابع $f(x)=\|x\|^2$ را روی $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. این تابع روی S ماکسیمم خود را در نقطه‌ی p می‌گیرد. در این صورت S داخل کره به شعاع $\|p\|$ قرار می‌گیرد و این کره در نقطه‌ی p بر رویه مماس است. ایده‌ی اثبات این است که نشان دهیم انحنای گاوسی S در نقطه‌ی حداقل به اندازه‌ی انحنای گاوسی کره یعنی $\frac{1}{\|p\|^2}$ است.

اگر $\gamma(t)$ یک خم روی S باشد که $\gamma(0)=p$. در نتیجه $f(\gamma(t))$ ماکسیمم خود را در $t=0$ می‌گیرد، در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2\Big|_{t=0}=0 \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2}\|\gamma(t)\|^2\Big|_{t=0}\leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\gamma}(0)\cdot p=0 \quad , \quad |\dot{\gamma}(0)|^2+\ddot{\gamma}\cdot p\leq 0$$

اگر $\gamma(t)$ یک خم با سرعت واحد بگیریم یعنی $|\dot{\gamma}|=1$، باید $\ddot{\gamma}\cdot p\leq -1$.

از طرفی تساوی $0=\dot{\gamma}(0)\cdot p$ نشان می‌دهد که T_pS صفحه مماس کره در نقطه p است یا به عبارتی صفحه عمود بر بردار p.

در نتیجه بردار عمود بر رویه در نقطه p موازی بردار p است، یعنی $\vec{N} = \pm \frac{p}{\|p\|}$

$$\ddot{\gamma} \cdot p \le -1 \quad \Longrightarrow \quad \pm \ddot{\gamma} \cdot \vec{N} \le -\frac{1}{\|p\|}$$

بنابر مطالب جلسه شانزده، انحنای قائم γ برابر است با $k_n = \ddot{\gamma} \cdot \vec{N} = II_p\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$

$$\Longrightarrow \quad \pm k_n \le -\frac{1}{\|p\|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\|p\|} \le |k_n|$$

از طرفی $k_1 \le k_n \le k_2$ که k_1 و k_2 انحناهای اصلی S هستند. درنتیجه هم علامت k_1 و k_2 یکسان هست هم اینکه

$$\frac{1}{\|p\|^2} \le k_1 k_2 = K$$

رویه‌های با انحنای میانگینِ ثابت

تعریف: اگر S یک رویه‌ی جهت‌دار باشد و $\lambda \in \mathbb{R}$، رویه‌ی S^{λ} را موازی رویه‌ی S می‌نامیم که

$$S^{\lambda} = \{ p + \lambda \vec{N}_p \ : \ p \in S \}$$

که $\vec{N}_p$ بردار عمود رویه‌ی S در نقطه‌ی p است.

گزاره: اگر k_1 و k_2 انحناهای اصلی رویه‌ی جهت‌دار S باشند و S^{λ} رویه‌ی موازی S. به علاوه اگر در نقطه‌ای که هیچ یک از k_1 و k_2 برابر $\frac{1}{\lambda}$ نباشد، آنگاه

(i) S^{λ} رویه‌ی جهت‌دار است که قائم آن در نقطه‌ی $p+\lambda N_p$ برابر εN_p است که ε علامت $(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)$ است.

(ii) $\frac{\varepsilon k_1}{1-\lambda k_1}$ و $\frac{\varepsilon k_2}{1-\lambda k_2}$ انحناهای اصلی S^{λ} هستند و بردارهای اصلی وابسته به آنها همان بردارهای اصلی S وابسته به k_1 و k_2 هستند.

(iii) انحنای میانگین و انحنای گاوسی S^{λ} به ترتیب برابرند با $\frac{\varepsilon(H-\lambda K)}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}$ و $\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}$ که H و K انحناهای گاوسی و میانگین S هستند.

نتیجه: اگر S دارای انحنای گاوسی $\frac{1}{R^2}$ باشد، رویه‌های موازی $S^{\pm R}$ دارای انحنای میانگین $\frac{1}{2R}$ هستند. برعکس اگر S دارای انحنای میانگین $\frac{1}{2R}$ باشد، آنگاه رویه موازی S^R دارای انحنای گاوسی $\frac{1}{R^2}$ است.

اثبات - به راحتی از گزاره قبل نتیجه می‌شود.

<u>اثبات گزاره</u>: اگر $\sigma(u,v)$ یک تکه برای S باشد و $\vec{N}(u,v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ بردار عمود منطبق با جهت رویه S، قرار دهید:

$$\sigma^\lambda(u,v) = \sigma(u,v) + \lambda \vec{N}(u,v)$$

اگر $\vec{N}_u = -a\sigma_u - b\sigma_v$ ، $\vec{N}_v = -c\sigma_u - d\sigma_v$ که $W_\sigma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

آنگاه

$$\sigma_u^\lambda \times \sigma_v^\lambda = \left[1 - \lambda(a+d) + \lambda^2(ad-bc)\right] \sigma_u \times \sigma_v$$

از آنجا که K_1 و K_2 مقادیر ویژه ماتریس W_σ هستند، پس $K_1 + K_2 = (a+d)$ ، $K_1K_2 = ad-bc$ در نتیجه

$$\sigma_u^\lambda \times \sigma_v^\lambda = \left[(1-\lambda K_1)(1-\lambda K_2)\right] \sigma_u \times \sigma_v \Rightarrow$$ قسمت (i) را اثبات می‌کند

برای محاسبه احتمالهای اصلی S^λ ، باید مختصات N_u^λ و N_v^λ را در پایه σ_u^λ و σ_v^λ محاسبه کنیم.

بنابر تبصره (ن) $N^\lambda = \varepsilon N$ در نتیجه:

$$\begin{cases} N_u^\lambda = \varepsilon N_u = -\varepsilon(a\sigma_u + b\sigma_v) \\ N_v^\lambda = \varepsilon N_v = -\varepsilon(c\sigma_u + d\sigma_v) \end{cases} \Rightarrow (N_u^\lambda, N_v^\lambda) = -\varepsilon(\sigma_u, \sigma_v)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

از طرف دیگر همانطور که در صفحه قبل دیدیم:

$$(\sigma_u^\lambda, \sigma_v^\lambda) = (\sigma_u, \sigma_v)\begin{pmatrix} 1-\lambda a & \lambda c \\ \lambda b & 1-\lambda d \end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$W_{\sigma^\lambda} = \varepsilon\begin{pmatrix} 1-\lambda a & \lambda c \\ \lambda b & 1-\lambda d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \varepsilon\,[I - \lambda W_\sigma]^{-1} W_\sigma$$

در نتیجه اگر μ مقدار ویژه W_{σ^λ} و T بردار ویژه آن

$$W_{\sigma^\lambda} T = \mu T \Rightarrow \varepsilon W_\sigma T = \mu(T - \lambda W_\sigma T)$$

$$\Rightarrow W_\sigma T = \frac{\mu}{\varepsilon + \lambda\mu} T \Rightarrow$$ $\frac{\mu}{\varepsilon+\lambda\mu}$ مقدار ویژه W_σ و T بردار ویژه آن است.

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu}{\varepsilon + \lambda\mu} = k_i \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\varepsilon k_i}{1 - \lambda k_i} \qquad i = 1,2$$

$$\Downarrow$$

قسمت (ii)

قسمت (iii) به راحتی از (ii) نتیجه می‌شود.