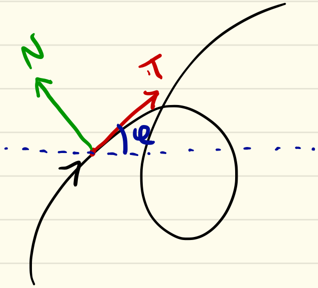
هندسه دیفرانسیل

جلسه ۹۷/۶/۳۱



مرور جلسه پیش :

انحنا : $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ پیمایش برحسب طول

$$\kappa = |\ddot{\gamma}|$$

انحنای علامت‌دار برای خم‌های مسطح :

$$T = |\dot{\gamma}|$$

$N =$ T را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ دوران می‌دهیم

در این صورت $\ddot{\gamma}$ حتماً بر T عمود است و در راستای N خواهد بود. می‌توانیم بنویسیم

$$\ddot{\gamma} = \kappa_s N$$

که κ_s انحنای علامت‌دار نامیده می‌شود.

$\varphi(s) =$ زاویه بردار مماس $T(s)$ با راستای ثابت e_1. در این صورت

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}$$

قضیه: فرض کنید $k_s : I \to \mathbb{R}^2$ تابع هموار باشد. آنگاه $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ وجود دارد که انحنای علامت‌دار آن برابر k_s است. به علاوه این منحنی در کلاس تبدیلات صلب یکتاست یعنی اگر $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ یک منحنی دیگری باشد که انحنای علامت‌دار آن k_s است، آنگاه انتقال $T_a(x) = x + a$ و دوران

$$R_\theta(x) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

وجود دارند که

$$\tilde{\gamma} = (R_\theta \circ T_a)\gamma$$

اثبات قسمت دوم: با یک انتقال و دوران می‌توان فرض کرد که $M = R_\theta \circ T_a$ وجود دارد به طوری که اگر $\bar{\gamma} = M\tilde{\gamma}$ آنگاه

$\gamma(s_0) = \bar{\gamma}(s_0)$ و $\gamma'(s_0) = \bar{\gamma}'(s_0)$

به راحتی می‌توان دید که انحنای علامت‌دار $\bar{\gamma}$ برابر k_s است. (تمرین)

$$\Rightarrow \varphi(s_0) - \bar{\varphi}(s_0) = 2m\pi$$

برای یک عدد صحیح m.

از طرفی

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\bar{\varphi}}{ds} = k_s$$

$$\Longrightarrow \forall s \in I, \quad \varphi(s) - \bar{\varphi}(s) = 2m\pi$$

$$\gamma'(s) = \left(\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)\right)$$

$$= \left(\cos\bar{\varphi}(s), \sin\bar{\varphi}(s)\right) = \bar{\gamma}'(s)$$

با توجه به رابطه $\gamma(s_0) = \bar{\gamma}(s_0)$ نتیجه می‌شود که $\gamma(s) = \bar{\gamma}(s)$.

مثال: $K_s(s)=0$ ← منحنی خط راست است.

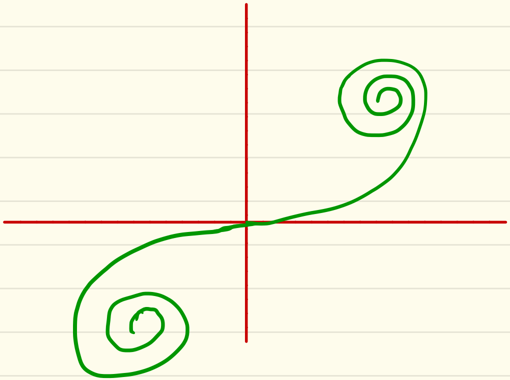
مثال: $K_s=\alpha$ ← منحنی یک دایره به شعاع $\frac{1}{\alpha}$ است.

مثال: $k_s(s)=s$

$$\Rightarrow \varphi(s)=\frac{1}{2}s^2$$

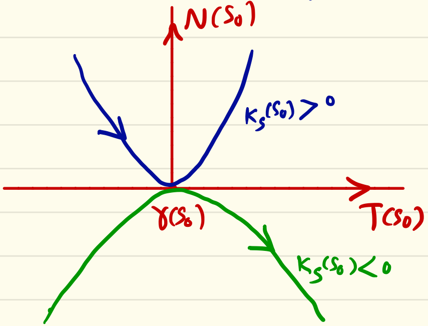
$$\Rightarrow \gamma'(s)=\left(\cos\frac{s^2}{2},\ \sin\frac{s^2}{2}\right)$$

$$\gamma(s)=\left(\int_0^s \cos\frac{t^2}{2}\,dt,\ \int_0^s \sin\frac{t^2}{2}\,dt\right)$$



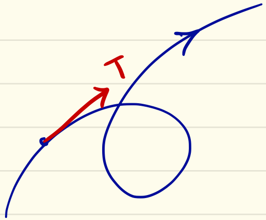
فرم نرمال خم‌های مسطح :

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \underset{T(s_0)}{\cancel{\gamma'(s_0)}}\,(s-s_0) + \frac{1}{2}\,\underset{k_s(s_0)\,N(s_0)}{\cancel{\gamma''(s_0)}}\,(s-s_0)^2 + o\left((s-s_0)^2\right)$$



در دستگاه مختصات $(T(s_0), N(s_0))$ منحنی $\gamma(s)$ تقریباً منطبق

بر نمودار سهمی $y=\frac{1}{2}k_s(s_0)x^2$ است .



خم‌ها در $\mathbb{R}^3$:

$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی با پارش برحسب طول

$$T(s) := \gamma'(s)$$

چون منحنی برحسب طول پارش شده است، همواره داریم $|T(s)| = 1$ و درنتیجه

$$\frac{dT}{ds} \cdot T = 0$$

قرار می‌دهیم

$$N(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \frac{dT}{ds}$$

که $\kappa(s) = \left| \frac{dT}{ds} \right|$ انحنا است.

$$N \cdot T = 0$$

$B := T \times N \implies$ چون T و N بردارهای یکه متعامد هستند

پس $|B| = 1$

تعریف: اگر $\frac{dT}{ds} \neq 0$ منحنی را یک خم فرنه می‌نامیم. که در این صورت $k \neq 0$.

در اینجا فرض می‌کنیم همه خم‌ها فرنه هستند.

$$B' = T' \times N + T \times N'$$

$$= \underbrace{\cancel{kN \times N}}_{0} + T \times N'$$

$|B|=1 \Rightarrow B' \cdot B = 0 \Rightarrow$ B' در صفحه (T,N) قرار دارد.

$|N|=1 \Rightarrow N' \cdot N = 0 \Rightarrow$ N' در صفحه (T,B) قرار دارد.

$\Rightarrow$ B' موازی N است.

$$B' = -\tau N$$

τ را تاب (یا انحنای دوم) می‌نامیم.

دستگاه معادلات فرنه-سره :

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases}$$

$$N' = \alpha T + \beta B$$

$$\alpha = N' \cdot T$$

$$0 = N \cdot T \Rightarrow N' \cdot T + N \cdot T' = 0 \Rightarrow \alpha = N' \cdot T = -\kappa$$

به طور مشابه $\beta = \tau$.

اگر $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ پارامتری برحسب طول نباشد،

$$\kappa = \frac{|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2}$$

$\left(' := \frac{d}{ds} \right)$

$$\tau = -B' \cdot N = -(T \times N)' \cdot N = -(T' \times N + T \times N') \cdot N$$

$$= -(T \times N') \cdot N$$

$$T = \gamma', \Rightarrow \gamma'' = T' = \kappa N \Rightarrow \gamma''' = \kappa' N + \kappa N'$$

$$\tau = -\left(T \times \left(\frac{\gamma''' - \kappa' N}{\kappa}\right)\right) \cdot N = -\frac{1}{\kappa}(T \times \gamma''') \cdot N$$

$$= -\frac{1}{\kappa^2}(\gamma' \times \gamma''') \cdot \gamma''$$

$$(u \times v) \cdot w = (v \times w) \cdot u = (w \times u) \cdot v, \quad u \times v = -v \times u$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$$

$$\dot{\ } := \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|} \qquad \left(\frac{ds}{dt} = |\dot\gamma|\right)$$

$$\gamma'' = \frac{1}{|\dot\gamma|} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\right) = \frac{1}{|\dot\gamma|} \frac{\ddot\gamma |\dot\gamma| - \dot\gamma (\ddot\gamma \cdot \dot\gamma)/|\dot\gamma|}{|\dot\gamma|^2}$$

$$= \frac{\ddot\gamma |\dot\gamma|^2 - \dot\gamma (\ddot\gamma \cdot \dot\gamma)}{|\dot\gamma|^4}$$

$$\gamma' \times \gamma'' = \frac{\dot\gamma \times \ddot\gamma}{|\dot\gamma|^3}$$

$$\gamma'' = \alpha \ddot\gamma + \beta \dot\gamma \Rightarrow \gamma''' = \frac{1}{|\dot\gamma|} \frac{d}{dt}(\gamma'') = \frac{1}{|\dot\gamma|} (\dot\alpha \ddot\gamma + \alpha \dddot\gamma + \dot\beta \dot\gamma + \beta \ddot\gamma)$$

$$(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^3} \cdot \gamma''' = \frac{\alpha}{|\dot{\gamma}|^4} (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}$$

$$= \frac{1}{|\dot{\gamma}|^6} (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}$$

$$\tau = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2} = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2}$$

هندسه دیفرانسیل

جلسه چهار ۹۷/۷/۲

گزاره: منحنی γ در یک صفحه قرار دارد اگر و تنها اگر تاب آن، τ، همه جا صفر باشد.

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N \Rightarrow \left(\tau = 0 \Leftrightarrow B(s) \equiv \text{ثابت} \right)$$

اگر منحنی γ مسطح باشد آنگاه بردار مماس $T(s)$ همواره در آن صفحه قرار می‌گیرد. همچنین $\kappa N = \frac{dT}{ds}$ نیز در آن صفحه واقع خواهد شد. در نتیجه بردار $B = T \times N$ بردار نرمال عمود بر این صفحه است و یک بردار ثابت است.

برعکس اگر $\tau = 0$ باشد، $B(s)$ یک بردار ثابت است و بردارهای T و N در صفحه عمود بر این بردار قرار دارند.

در نتیجه $\gamma(s) - \gamma(s_0) = \int_{s_0}^{s} T(\theta)\, d\theta$ نیز در این صفحه واقع است.

تعریف- صفحه تولید شده توسط بردارهای (T, N) را <u>صفحه بوسان</u> گویند.

بردار نرمال این صفحه بردار B است و در نتیجه میزان تغییرات صفحه بوسان متناسب با τ است.

$$B(s) = B(s_0) - (s - s_0)\,\tau(s_0)\,N(s_0) + o(s - s_0)$$

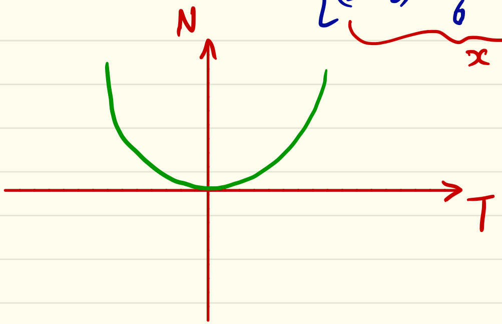
فرم نرمال خم‌های فضایی در $\mathbb{R}^3$:

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s-s_0)\gamma'(s_0) + \frac{1}{2}(s-s_0)^2\gamma''(s_0) + \frac{1}{6}(s-s_0)^3\gamma'''(s_0) + o\left((s-s_0)^3\right)$$

$$\gamma(s) - \gamma(s_0) \approx (s-s_0)T + \frac{1}{2}(s-s_0)^2 \kappa N + \frac{1}{6}(s-s_0)^3\left[\kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)\right]$$

تصویر خم در همسایگی s_0 در صفحه بوسان بصورت

$$\Big[\underbrace{(s-s_0) - \frac{\kappa^2}{6}(s-s_0)^3}_{x}\Big]T + \Big[\underbrace{\frac{\kappa}{2}(s-s_0)^2 + \frac{\kappa'}{6}(s-s_0)^3}_{y}\Big]N$$

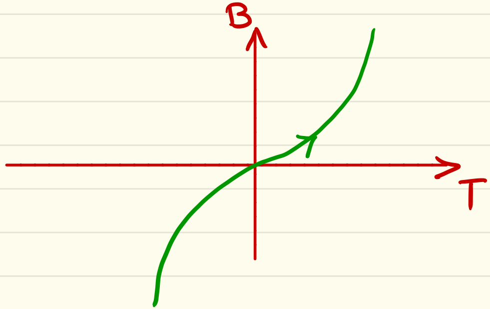


$$y \approx \frac{\kappa}{2}x^2$$

تصویر خم در صفحه (T, B) به صورت

$$\left[\underbrace{(s-s_0) - \frac{\kappa^2}{6}(s-s_0)^3}_{x}\right] T + \underbrace{\frac{\tau}{6}(s-s_0)^3}_{y} B$$

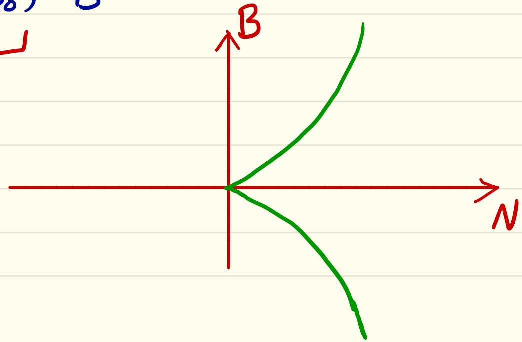
$$y \approx \frac{\tau}{6} x^3$$



تصویر خم در صفحه (N, B)

$$\left[\underbrace{\frac{\kappa}{2}(s-s_0)^2 + \frac{\kappa'}{6}(s-s_0)^3}_{x}\right] N + \underbrace{\frac{\tau}{6}(s-s_0)^3}_{y} B$$

$$y \approx \alpha x^{3/2}$$



قضیه: اگر توابع هموار κ و τ داده شده باشند که $\kappa>0$، آنگاه خم $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ وجود دارد که انحنا و تاب آن برابر κ و τ است.

اثبات- یک پایه متعامد یکه راستگرد (T_0, N_0, B_0) را در نظر بگیرید. دستگاه معادله دیفرانسیل خطی زیر با شرط اولیه $T(s_0)=T_0$، $N(s_0)=N_0$ و $B(s_0)=B_0$ جواب دارد.

$$\begin{cases} \dot{T} = \kappa N \\ \dot{N} = -\kappa T + \tau B \\ \dot{B} = -\tau N \end{cases}$$

قرار دهید

$$(*)\quad \gamma(s) = \int_{s_0}^{s} T(\theta)\, d\theta$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $(T(s), N(s), B(s))$ به ازای هر s، پایه متعامد یکه راستگرد است. قرار دهید

$$X = \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

رابطه $XX^t = I$ معادل این است که این سه بردار متعامد یکه هستند و $\det X = 1$ تضمین می‌کند که این پایه راستگرد است.

$$\dot{X} = AX, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{ds}(X^t X) = \dot{X}^t X + X^t \dot{X} = (AX)^t X + X^t AX$$
$$= X^t A^t X + X^t AX$$

$$A^t = -A \Longrightarrow \quad = 0$$

$X(s_0) = \begin{bmatrix} T(s_0) \\ N(s_0) \\ B(s_0) \end{bmatrix}$ ماتریس متعامد است بنابراین $X^{-1}(s_0) = X^t(s_0)$ در نتیجه

$$X^t(s)X(s) = X^t(s_0)X(s_0) = I$$

$$\Rightarrow X(s)^{-1} = X^t(s)$$

و $X(s)$ ماتریس متعامد است.

حال اگر از رابطه (*) مشتق بگیریم خواهیم داشت : $\gamma'(s) = T(s)$

و چون T بردار یکه است پس κ برحسب طول γ است و

$$\text{انحنای } \gamma = \left|\frac{dT}{ds}\right| \underset{\text{از روی دستگاه معادلات صفحه قبل}}{=} |\kappa N| \underset{|N|=1}{=} |\kappa| \underset{\kappa>0}{=} \kappa$$

به علاوه از رابطه بالا نتیجه می‌شود که N (جواب معادله دیفرانسیل مختلف) بردار قائم اول γ است.

$$\text{بردار قائم دوم } \gamma = T \times N$$

چون (T,N,B) پایه‌ی متعامد یکه راستگرد هستند بنابراین قائم دوم آن B است. و به راحتی از دستگاه معادله دیفرانسیل نتیجه می‌شود که تاب γ برابر τ است.

قضیه (بنیادی): اگر γ و $\tilde{\gamma}$ دو خم با پارامتر طول باشند که انحناهای هر دو برابر $\kappa > 0$ و تاب هر دو τ باشد، آنگاه تحت یک ایزومتری γ به $\tilde{\gamma}$ تبدیل می‌شود.

نکته: تبدیل ایزومتری $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تبدیلی است که حافظ طول است یعنی $|x| = |Mx|$ و به راحتی می‌توان دید که هر تبدیل ایزومتری به صورت $Mx = Ax + b$ است که $b \in \mathbb{R}^3$ یک بردار ثابت است و A ماتریس متعامد است، $A^t A = I$.

اثبات قضیه: (T,N,B) را کنج فرنه خم γ می‌گیریم و $(\tilde{T},\tilde{N},\tilde{B})$ کنج فرنه متناظر $\tilde{\gamma}$.

یک تبدیل متعامد مثل A وجود دارد که

$$\begin{cases} A\,T(s_0)=\tilde{T}(s_0) \\ A\,N(s_0)=\tilde{N}(s_0) \\ A\,B(s_0)=\tilde{B}(s_0) \end{cases}$$

$$b:=\tilde{\gamma}(s_0)-\gamma(s_0)$$

تحت تبدیل $Mx=Ax+b$ ، خم γ را تصویر کنید

$$\bar{\gamma}=M\gamma$$

(تمرین: انحنا و تاب $\bar{\gamma}$ برابر با انحنا و تاب γ است)

$$\bar{\gamma}(s_0)=\tilde{\gamma}(s_0)$$

و کنج‌های فرنه $\bar{\gamma}$ و $\tilde{\gamma}$ در نقطه s_0 بر هم منطبق هستند.

$$f(s)=\bar{T}(s)\cdot\tilde{T}(s)+\bar{N}(s)\cdot\tilde{N}(s)+\bar{B}(s)\cdot\tilde{B}(s)$$

$$f'(s)\equiv 0$$

مشتق بگیرید

بنابراین f یک تابع ثابت است. از طرفی $f(s_0) = 3$. بنابراین

$$f(s) \equiv 3$$

اما از رابطه کوشی شوارتز نتیجه می‌شود که

$$\bar{T} \cdot \tilde{T} \le |\bar{T}||\tilde{T}| = 1$$

پس عبارت سمت راست در تعریف $f(s)$ حداکثر 3 می‌تواند باشد و این بدان معناست که

$$\bar{T} \cdot \tilde{T} = \bar{N} \cdot \tilde{N} = \bar{B} \cdot \tilde{B} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \bar{T} = \tilde{T}, \quad \bar{N} = \tilde{N}, \quad \bar{B} = \tilde{B}$$

$$\bar{\gamma}(s) = \bar{\gamma}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \bar{T}(\theta)\,d\theta = \tilde{\gamma}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \bar{T}(\theta)\,d\theta = \tilde{\gamma}(s)$$

خم ها در $\mathbb{R}^n$:

خم $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را خم فرنه گوییم هرگاه $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$ برای هر t مستقل خطی باشند.

به روش گرام اشمیت بردارهای متعامد یکه $e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)$ را از بردارهای $\gamma', \dots, \gamma^{(n-1)}$ می سازیم.

$$e_i \in \langle \gamma', \dots, \gamma^{(i)} \rangle$$

و بردار $e_n(t)$ را بردار یکه ای انتخاب می کنیم که $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ یک پایه متعامد یکه راستگرد برای $\mathbb{R}^n$ باشد.

$$\det \left[e_1(t) \,|\, \dots \,|\, e_n(t) \right] = 1$$

$$|e_1| = 1 \Rightarrow e_1' \cdot e_1 = 0$$

$$e_1 \in \langle \gamma' \rangle \Rightarrow e_1' \in \langle \gamma'' \rangle$$

$$\Rightarrow e_1' \in \langle e_1, e_2 \rangle$$

چون $e_1'\cdot e_1=0$ در نتیجه $e_1'=k_1 e_2$.

در حالت کلی اگر $e=[e_1|\cdots|e_n]$

$$e'=[e_1'|\cdots|e_n']=We$$

تمرین: نشان دهید

$$W=\begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots \\ & -k_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & k_{n-1} \\ & & & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

هندسه دیفرانسیل

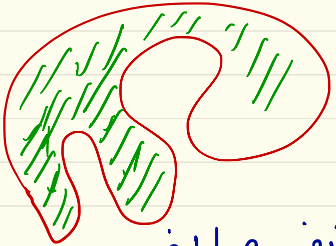
جلسه پنج ٩٧/٧/٧

خواص سرتاسری خمها :

تعریف- خم $\gamma : I=[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را خم ساده بسته گوییم هرگاه بسته باشد یعنی $\gamma(a)=\gamma(b)$ و خودش را قطع نکند، یعنی اگر

$$t<s\in[a,b]\ ,\ \gamma(t)=\gamma(s) \implies t=a\ ,\ s=b$$

می توان دید که هر خم ساده بسته، صفحه را به دو قسمت همبند تقسیم می کند که یکی از آنها کراندار است و داخل خم نامیده می شود و قسمت دیگر بیکران است و بیرون خم می نامیم.



سه ویژگی زیر را برای خمهای ساده بسته بررسی خواهیم کرد:

(۱) نامساوی هم محیطی $A \le \frac{1}{4\pi} \ell^2$ ، A مساحت داخل خم و ℓ طول خم

(۲) قضیه چهار رأس: حداقل چهار نقطه روی خم وجود دارد که $\frac{dk}{ds}=0$.

(۳) میزان چرخش بردار مماس خم وقتی یک دور کامل روی یک منحنی ساده بسته حرکت می کنیم، $\pm 2\pi$ است. $\theta(b)-\theta(a)=\pm 2\pi$

(۱) نامساوی هم محیطی (Isoperimetric)

قضیه گرین: اگر $f(x,y)$ و $g(x,y)$ توابعی هموار باشند و γ خم ساده بسته با جهت مثبت (مثلثاتی)، در این صورت

$$\int_{\mathrm{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\gamma} f\,dx + g\,dy$$

تذکر: اگر بردار N (که از دوران $\pi/2$ بردار T به دست می‌آید) به سمت داخل خم γ باشد، جهت γ را مثبت گوییم.

نکته- $f(x,y) = -\frac{1}{2}y$ و $g(x,y) = \frac{1}{2}x$ در نتیجه

$$(\text{مساحت داخل } \gamma)\ A = \frac{1}{2}\int_{\gamma} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} (x\dot{y} - y\dot{x})\,ds$$

که $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ پارامتریش برحسب طول منحنی است.

قضیه: اگر γ یک خم بسته ساده با طول l و مساحت درون A باشد، آنگاه

$$A \leq \frac{1}{4\pi} l^2$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که γ یک دایره باشد.

اثبات ـ اگر γ دایره به شعاع R باشد، $A = \pi R^2$ و $l = 2\pi R$ و به وضوح تساوی برقرار است.

برای اثبات نامساوی باید نشان دهیم:

$$\frac{1}{2}\int_0^l (x\dot{y} - y\dot{x})\,ds \leq \frac{1}{4\pi} l^2$$

با قرار دادن $t = \frac{\pi s}{l}$، پرمایش جدیدی برای خم به دست می‌آوریم که دوره تناوب آن π است.

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \times \frac{\pi}{l} \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \times \pi/l$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (xy' - yx') \times \frac{\pi}{l} \times \frac{l}{\pi}\,dt \leq \frac{1}{4\pi} l^2$$

$$|\gamma'(t)|^2 = (x')^2 + (y')^2 = \frac{\ell^2}{\pi^2}\Big[\underbrace{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}_{=1}\Big] = \frac{\ell^2}{\pi^2}$$

چون پارامتری سازی برحسب طول است.

کافیست نشان دهیم :

$$(*) \qquad \frac{1}{2}\int_0^\pi (xy' - yx')\,dt \le \frac{1}{4}\int_0^\pi (x')^2 + (y')^2\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{\ell^2}{\pi}$$

قرار دهید $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dr}\times\frac{dr}{dt} + \frac{dx}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt} = (\cos\theta)r' - (r\sin\theta)\theta'$$

$$\frac{dy}{dt} = (\sin\theta)r' + (r\cos\theta)\theta'$$

رابطه $(*)$ را برحسب r و θ بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \cancel{rr'\sin\theta\cos\theta} + (r\cos\theta)^2\theta' \cancel{- rr'\sin\theta\cos\theta} + (r\sin\theta)^2\theta'\,dt \le \frac{1}{4}\int_0^\pi (r')^2 + r^2(\theta')^2\,dt$$

کافیست اثبات کنیم:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi} (r')^2 + r^2(\theta')^2\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\theta'\,dt \geq 0$$

$$\Vert$$

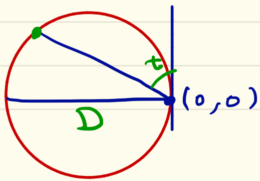
$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \underbrace{r^2(\theta'-1)^2}_{1} + \underbrace{\left[(r')^2 - r^2\right]}_{2}\,dt$$

جمله ① به وضوح مثبت است. تنها کافیست نشان دهیم جمله ② مثبت است که به کمک لم زیر اثبات می‌گردد.
اگر از ابتدا با یک انتقال به مبدأ فرض کنیم که $\gamma(0)=(0,0)$ است. در نتیجه $r(0)=r(\pi)=0$ خواهد بود و لم زیر نشان می‌دهد که
عبارت ② مثبت است.

حالت تساوی: $\theta' \equiv 1$ ، $r(t) = D\sin t \Rightarrow \theta(t) = t + c$

$$x(t) = D\sin t\cos(t+c) = \frac{D}{2}\left[\sin(2t+c) - \sin c\right], \quad y(t) = D\sin t\sin(t+c) = \frac{D}{2}\left[\cos c - \cos(2t+c)\right]$$

$$\left(x(t) + \frac{D}{2}\sin c\right)^2 + \left(y(t) - \frac{D}{2}\cos c\right)^2 = \frac{D^2}{4}$$



لم: فرض کنید $F:[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع هموار باشد که $F(0)=F(\pi)=0$ در این صورت

$$\int_0^{\pi} (F')^2 \, dt \geq \int_0^{\pi} F^2 \, dt$$

و تساوی فقط و فقط وقتی اتفاق می‌افتد که $F(t) = D \sin t$ برای یک ثابت دلخواه D.

اثبات ـ $G(t) = \dfrac{F(t)}{\sin t}$ یک تابع هموار در $[0,\pi]$ است. (دقت کنید $\sin t$ در نقاط $t=0,\pi$ ریشه مرتبه اول دارد و در این نقاط $F(0)=F(\pi)=0$ است.) باید نشان دهیم

$$\int_0^{\pi} (G' \sin t + G \cos t)^2 \, dt \geq \int_0^{\pi} G^2 \sin^2 t \, dt$$

$$(*) \quad \int_0^{\pi} (G')^2 \sin^2 t + G^2 (\cos^2 t - \sin^2 t) + 2GG' \sin t \cos t \, dt \geq 0$$

برای محاسبه عبارت سوم انتگرال می‌نویسیم:

$$\int_0^\pi 2GG'\sin t\cos t\,dt = \underbrace{\cancel{G^2\sin t\cos t}\Big|_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi G^2(\cos^2 t-\sin^2 t)\,dt$$

در نتیجه رابطه (*) به عبارت

$$\int_0^\pi (G')^2\sin^2 t\,dt \geq 0$$

تبدیل می‌شود که به وضوح برقرار است. و شرط تساوی این است که $G'\equiv 0$ یا اینکه تابع

G تابع ثابت باشد. به عبارتی $F(t)=D\sin t$.

قضیه چهار رأس:

تعریف - یک نقطه از خم γ را رأس گوییم هرگاه در آن نقطه $\frac{dk_s}{dt}=0$ که k_s انحنای علامت‌دار γ است.

تعریف فوق مستقل از انتخاب پارامتر است.

مثال - در بیضی $\gamma(t)=(p\cos t, q\sin t)$ داریم:

$$k_s(t)=\frac{pq}{(p^2\sin^2 t+q^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

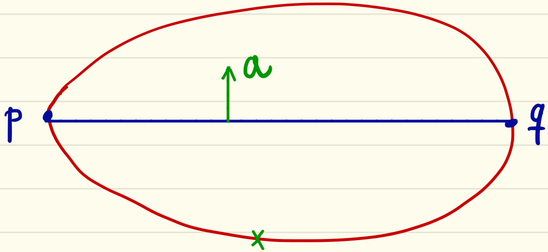
$$\frac{dk_s}{dt}=\frac{3pq(q^2-p^2)\sin t\cos t}{(p^2\sin^2 t+q^2\cos^2 t)^{5/2}}$$

نقاط رأس برای نقاط $t=0,\pi/2,\pi,3\pi/2$ به دست می‌آید.

قضیه: هر خم ساده بسته محدب دارای حداقل چهار رأس است.

(تعریف - خم α را محدب گوییم هرگاه هر دو نقطه آن را که به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل در درون α قرار بگیرد.)

اثبات - واضح است که هر خم ساده بسته حداقل دو رأس دارد. نقاطی که K_s در آن ماکسیمم و مینیمم می‌شود را نشانه کنید. در این نقاط $\frac{dk_s}{dt}=0$ است. این دو نقطه را p و q بگیرید. پاره‌خط واصل بین p و q خم را به دو قسمت تقسیم می‌کند که



اگر این خم دارای چهار رأس نباشد، $\frac{dk_s}{dt}$ روی یک قسمت مثبت و روی دیگری منفی است. (اگر رأس سوم نیز وجود داشته باشد، منحنی به سه قسمت تقسیم می‌شود که علامت $\frac{dk_s}{dt}$ روی هر قسمت ثابت است و می‌توان منحنی را در هر حالت به دو قسمت تقسیم کرد که خاصیت بالا برقرار باشد.)

بردار $\vec{a}$ عمود بر پاره خط pq را در نظر بگیرید دو طرف پاره خط pq با علامت $\gamma \cdot \vec{a}$ مشخص می‌شود.

بنابراین علامت $\frac{dk_s}{dt} \cdot (\gamma \cdot \vec{a})$ روی کل خم ثابت است. (چرا؟) در نتیجه

$$\int_0^l \frac{dk_s}{dt} (\gamma \cdot \vec{a}) \, dt \neq 0$$

از طرفی به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$= \cancel{k_s (\gamma \cdot \vec{a}) \Big|_0^l}^{\,0} - \int_0^l k_s \left(\frac{d\gamma}{dt} \cdot \vec{a} \right) dt$$

زیرا $k_s(\gamma \cdot \vec{a})$ متناوب است.

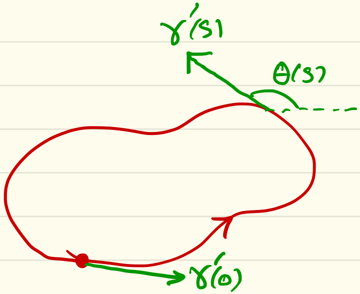
از طرفی $\dot{N} = -k_s T$ و بنابراین

$$= \int_0^l \dot{N} \cdot \vec{a} \, dt = N(l) \cdot \vec{a} - N(0) \cdot \vec{a} = 0$$

هندسه دیفرانسیل

جلسه شش ۹۷/۷/۹

یادآوری: اگر $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ یک منحنی با پارامتر برحسب طول باشد، تابع هموار $\theta : I \to \mathbb{R}$ وجود دارد که



$$\gamma'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

به علاوه $\frac{d\theta}{ds} = k_s$ یا به عبارتی

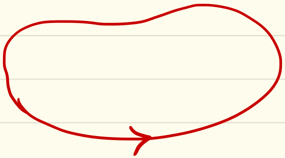
$$\theta(s) = \theta(0) + \int_0^s k_s(t)\, dt$$

تعریف: اگر γ خم ساده بسته به طول l باشد، $\theta(l) - \theta(0)$ یک مضرب صحیح از 2π است.

(دقت کنید $\gamma'(0) = \gamma'(l)$) این مضرب صحیح را عدد چرخش خم می‌نامیم.

$$i_\gamma := \frac{\theta(l) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^l k_s(t)\, dt$$

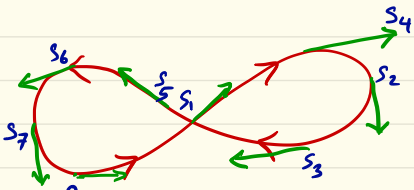
عدد چرخش میزان چرخش بردار مماس روی دایره است. ($\gamma'(s)$ یک بردار به طول واحد است و یک نقطه دایره را نشان می‌دهد)



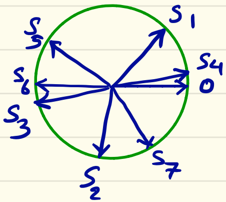
$i_\gamma = +1$

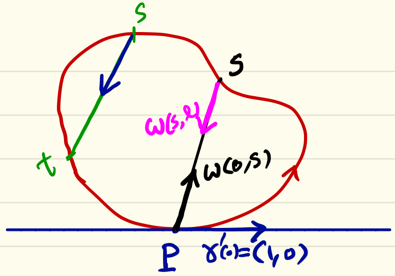
$i_\gamma = -1$

$i_\gamma = +2$



$i_\gamma = 0$

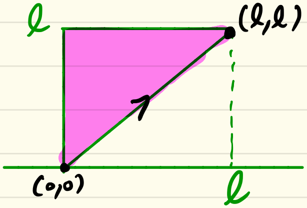




قضیه: عدد چرخش هر خم ساده به ±1 است.

اثبات- ابتدا یک خط موازی محور افقی در دورترین نقطه بکشید. آن را انتقال دهید تا اولین نقطه‌ای که خم را قطع می‌کند. آن نقطه را P بنامید.

می‌توان پارامتریزه خم را تغییر داد به گونه‌ای که $\gamma(0)=P$. در نتیجه $\gamma'(0)$ روی خط مماس بر نقطه P است. فرض کنیم که



$$\gamma'(0)=(1,0)$$

قرار دهید: $D=\{(s,t) : 0\le s\le t\le l\}$ و

$$\omega : D \longrightarrow S^1$$

$$\omega(s,t)=\begin{cases} \gamma'(s) & t=s \\ -\gamma'(0) & s=0,\ t=l \\ \dfrac{\gamma(t)-\gamma(s)}{|\gamma(t)-\gamma(s)|} & \text{در بقیه نقاط} \end{cases}$$

تابع ω روی D پیوسته است (چرا؟) به علاوه تابع $\theta: D \to \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\omega(s,t) = \left(\cos\theta(s,t) \,,\, \sin\theta(s,t)\right) \,,\quad \theta(0,0)=0$$

(لم - اگر X ناحیه همبند ساده باشد و $f: X \to S^1$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $\theta: X \to \mathbb{R}$ وجود دارد که نمودار زیر جابجایی باشد، یعنی $f = g \circ \theta$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "g(t)=(\cos t,\sin t)"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\theta"] \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

)

عدد چرخش γ عبارت است از:

$$i_\gamma = \frac{1}{2\pi}\left(\theta(l,l) - \theta(0,0)\right)$$

دقت کنید که $\theta(s,s)$ زاویه بردار مماس $\gamma'(s)$ را با محور افقی نشان می‌دهد و در حقیقت

$$\theta(s,s) = \int_0^s \kappa_\gamma(t)\,dt$$

$$(*) \qquad \theta(s,l) - \theta(0,s) = (2n+1)\pi \qquad 0 \le s \le l$$

زیرا بردارهای $\omega(s,l)$ و $\omega(0,s)$ عکس همدیگر هستند. به علاوه سمت چپ تساوی یک تابع پیوسته است در نتیجه مقدار صحیح n به ازای همه s ها یک عدد ثابت است.

$$s=l \Rightarrow \theta(l,l) = (2n+1)\pi + \theta(0,l)$$

$$s=0 \Rightarrow \theta(0,l) = (2n+1)\pi + \theta(0,0)$$

$$\Rightarrow i_\gamma = \frac{1}{2\pi}\theta(l,l) = (2n+1)$$

از طرفی از آنجا که منحنی در نیم صفحه بالا قرار گرفته است بردار $\omega(0,t)$ همیشه در نیم صفحه بالا قرار دارد، در نتیجه

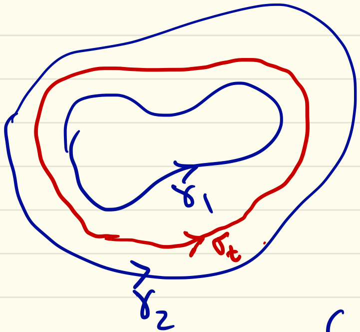
$$0 \le \theta(0,t) \le \pi \qquad 0 \le t \le l$$

در رابطه $(*)$ قرار دهید $s=0$، در نتیجه

$$0 \le (2n+1)\pi = \theta(0,l) - \theta(0,0) \le \pi \Rightarrow n=0 \Rightarrow i_\gamma = +1$$

تعریف: دو منحنی هموار $\gamma_1,\gamma_2:[0,\ell]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. این دو را به طور هموار هموتوپ

گوییم هرگاه تابع



$$\sigma:[0,1]\times[0,\ell]\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

$$\left(\sigma_t(s):=\sigma(t,s)\right)$$

وجود داشته باشد که

(i) $\sigma(0,s)=\gamma_1(s)$ ، $\sigma(1,s)=\gamma_2(s)$

(ii) $\frac{d}{ds}\sigma(t,s)\neq 0$ به ازای هر t و s . (خم σ_t هموار هست)

(iii) تابع $\sigma(t,s)$ و $\frac{d}{ds}\sigma(t,s)$ نسبت به t و s پیوسته است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای اینکه دو خم بسته γ_1 و γ_2 به طور هموار هموتوپ باشند این است که عدد چرخش هر دو برابر باشد.

نتیجه: هر خم ساده بسته به طور هموار با دایره هموتوپ است.

اثبات قضیه - شرط لازم:

$$i_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{l} k_s(u)\,du$$

$$i_{\gamma_t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{l(t)} k_s(t,u)\,du$$

$k_s(t,u)$ انحنای خم γ_t است و یک تابع پیوسته نسبت به t و u است. در نتیجه i_{γ_t} یک عدد صحیح ثابت است.

شرط کافی: عدد چرخش γ_1 و γ_2 را m می‌گیریم. θ_1 و θ_2 را زاویه بردارهای مماس γ_1 و γ_2 با محور افقی بگیرید.

به علاوه فرض کنید $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0,0)$. در ضمن با یک تجانس روی این صفحه می‌توان فرض کرد که طول هر دو برابر یک است.

$$\theta_i(s)=\int_0^s \kappa_i(u)\,du$$

$$\gamma_i(s)=\int_0^s\big(\cos\theta_i(u),\ \sin\theta_i(u)\big)\,du$$

$\gamma_i(1)=\gamma_i(0)=(0,0)$ طول خم‌ها برابر یک است.

تعریف کنید: $\varphi_t(s):=(1-t)\,\theta_1(s)+t\,\theta_2(s)$ برای $0\le t\le 1$

$$v_t(s):=\big(\cos\varphi_t(s),\ \sin\varphi_t(s)\big)$$

$$\tilde{v}_t(s)=v_t(s)-\int_0^1 v_t(u)\,du$$

$$\sigma_t(s):=\int_0^s \tilde{v}_t(u)\,du$$

داریم $\sigma_t(0)=\sigma_t(1)=(0,0)$ و در نتیجه $\sigma_t(s)$ یک خم بسته است.

به سادگی می‌توان دید که $\sigma_0 = \gamma_1$ و $\sigma_1 = \gamma_2$.

تنها کافیست که نشان دهیم $\frac{d}{ds}\sigma_t \neq 0$ به ازای هر t, s .

$$\frac{d}{ds}\sigma_t = \tilde{v}_t(s) = v_t(s) - \int_0^1 v_t(u)\,du$$

$$\left|\frac{d}{ds}\sigma_t\right| \geq |v_t(s)| - \left|\int_0^1 v_t(u)\,du\right|$$

$$\geq |v_t(s)| - \int_0^1 \underbrace{|v_t(u)|}_{=1}\,du = \underbrace{|v_t(s)|}_{=1} - 1 = 0$$

اگر به ازای نقطه‌ای $\frac{d}{ds}\sigma_t = 0$ باید نامساوی‌های بالا هر دو به تساوی تبدیل شوند. در نتیجه باید $v_t(u)$ یک بردار ثابت باشد (به ازای یک مقدار مشخص t که $\frac{d}{ds}\sigma_t = 0$ و همه uها) در نتیجه $\varphi_t(u)$ یک عدد ثابت است

$$t\,\theta_1(u) + (1-t)\,\theta_2(u) = \text{عدد ثابت} \qquad (*)$$

به ازای هر $0 \leq u \leq 1$

از طرفی $\theta_2(1) - \theta_2(0) = \theta_1(1) - \theta_1(0) = 2\pi m$

که m عدد چرخش هر دو خم بود. در نتیجه از رابطه $(*)$ نتیجه می‌گیریم که باید $m = 0$.

برای حالت $m=0$، دقت کنید که با دوران هر دو خم، همیشه می‌توان فرض کرد که $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$.

بنابراین سمت راست $(*)$ برابر صفر است و در نتیجه

$$\theta_1(u) = \left(\frac{t-1}{t}\right)\theta_2(u)$$

پیمایش خم γ_1 را تغییر دهید به جای آنکه از نقطه $s=0$ شروع کنیم از نقطه دیگری (مثل s_0) شروع کنید اگر $\tilde{\theta}_1$ زاویه متناسب با پیمایش جدید باشد به گونه‌ای که $\tilde{\theta}_1(0) = 0$،

$$\tilde{\theta}_1(s) = \theta_1(s+s_0) + \alpha$$

اگر فرآیند بالا را برای پیمایش جدید بنویسیم و باز در یک نقطه $\frac{d}{ds}\sigma_t = 0$ شود باید $\tilde{\theta}_1(u) = \left(\frac{t'-1}{t'}\right)\theta_2(u)$

$$\beta_1 \theta_2(u) + \beta_2 \theta_2(u + S_0) = \alpha \qquad \forall\, 0 \le u \le 1$$

در نتیجه باید θ_2 یک تابع ثابت باشد. یعنی γ_2 خط راست است.

هندسه دیفرانسیل

جلسه هفت ۹۷/۷/۱۴

یادآوری

مشتق (به معنای فرشه): نگاشت $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ در نقطه $a \in U$ مشتق‌پذیر به معنای فرشه گوییم

اگر نگاشت خطی $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (به صورت $L(x) = Ax$ که A یک ماتریس $n \times m$ است)

وجود داشته باشد که

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - \left(f(a) + L(h)\right)}{|h|} = 0$$

مشتق تابع f در نقطه a را با $Df(a) = A$ نشان می‌دهیم.

نکته: برای هر تابع مستوی $f(x) = Ax + b$ داریم $Df(a) = A$.

قاعده زنجیری:

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد و g در نقطه $f(a)$، آنگاه $g \circ f$ در نقطه a مشتق‌پذیر است و

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$ ضرب ماتریسی

مشتق جهت‌دار: مشتق $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ در نقطه a و در جهت V عبارت است از مشتق تابع

$$\varphi(t) = f(a+tV) \quad : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

گرفته و با نماد $D_V f(a) = \varphi'(0)$ نشان می‌دهیم.

در صورتی که تابع f مشتق‌پذیر به معنای فرشه باشد، آنگاه

$$D_V f(a) = Df(a)\,V$$

ضرب ماتریس در بردار

در صورتی که مشتقات جهت‌دار در n راستای مستقل خطی وجود داشته و در نقطه a پیوسته باشند، آنگاه f به معنای فرشه در نقطه a مشتق‌پذیر است.

مشتق مرتبه دوم: $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ و $Df: U \subseteq \mathbb{R}^m \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ مشتق مرتبه اول تابع f باشد که $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{mn}$ فضای تبدیلات خطی از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ است، مشتق مرتبه دوم در نقطه a به صورت زیر خواهد بود.

$$D^2 f(a) \in L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$$

درواقع $D^2f(a)$ یک تابع دوخطی است.

$$D^2f(a)(V,W) \in \mathbb{R}^n$$

$(V^tA_1W, V^tA_2W, \ldots, V^tA_nW)$ نسبت به V و W خطی است.

به همین ترتیب مشتق سوم یک تابع سه خطی روی $\mathbb{R}^m$ خواهد بود و به همین ترتیب مشتق مرتبه kام به عنوان یک تابع k-خطی می‌توان توصیف کرد.

فرض کنید $(e_1, \ldots, e_m)$ پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^m$ باشد، آنگاه مشتق جهتی $D_{e_i}f$ با نمادهای $\partial_i f$ یا $\partial_{x_i} f$ یا $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ نشان می‌دهیم که به آن مشتق جزئی یا پاره‌ای گوییم. در حالتی که $n=1$ است، $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

که مشتقات جزئی تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$، مشتقات جزئی مرتبه دوم گفته می‌شود که با $\partial_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ نشان می‌دهیم.

اگر تابع f به معنای فرشه دوبار مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$D^2f(a)(V,W) = V^t \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{1 \le i,j \le m} W$$

تعریف - تابع $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ را در کلاس C^k می‌نامیم هرگاه، به معنای فرشه k بار مشتق پذیر با مشتقات پیوسته داشته باشد.

(در واقع کافیست که مشتقات پاره‌ای f تا مرتبه k-ام وجود داشته و پیوسته باشند.)

<u>قضیه تابع وارون</u>: اگر $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در کلاس C^k باشد و در نقطه $a \in U$، مشتق $Df(a)$ وارون پذیر باشد، آنگاه بازهای V حول a و W حول $f(a)$ وجود دارند که تابع C^k،

$f^{-1}: W \longrightarrow V$ وارون تابع $f: V \to W$ خواهد بود. به علاوه

$$Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1} \qquad \forall x \in V,\ y = f(x)$$

قضیه تابع ضمنی: $f: U \subseteq \underset{x\in}{\mathbb{R}^m} \times \underset{y\in}{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع C^k است که برای $a=(a_1,a_2)\in \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$

داریم $f(a)=0$ و $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(a)\right]_{n\times n}$ وارون پذیر باشد آنگاه همسایگی V_1 حول a_1 در $\mathbb{R}^m$

و V_2 حول a_2 در $\mathbb{R}^n$ و نگاشت C^k، $\varphi: V_1 \longrightarrow V_2$ وجود دارند که $\varphi(a_1)=a_2$

$$\{(x,y)\in V_1\times V_2 \;:\; f(x,y)=0\} = \{(x,\varphi(x)) \;:\; x\in V_1\}$$

درحقیقت $f(x,\varphi(x))=0$

به علاوه:

$$D\varphi(x) = -\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,\varphi(x))\right]^{-1}_{n\times n}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,\varphi(x))\right]_{n\times m}$$

قضیه رتبه : $f: U\subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابع C^k است که در همسایگی $a\in U$ ماتریس مشتق Df دارای رتبه l است. در این صورت همسایگی‌های V حول a و W حول مبدأ در $\mathbb{R}^m$ ، V' حول $f(a)$ و W' حول مبدأ در $\mathbb{R}^n$ و توابع C^k

$\varphi: V \longrightarrow W$ ، $\psi: V' \longrightarrow W'$ وجود دارند که

$$\psi\circ f\circ \varphi^{-1}(x_1,\dots,x_m) = (x_1,\dots,x_l,0,\dots,0)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{f}(x_1,\dots,x_m) = (x_1,\dots,x_l,0,\dots,0)$$

تعریف رویه: زیرمجموعه S از $\mathbb{R}^3$ را یک رویه می‌نامیم هرگاه برای هر نقطه $p \in S$ یک زیرمجموعه باز W از $\mathbb{R}^3$ شامل p و باز U در $\mathbb{R}^2$ و نگاشت همئومورفیسم $\varphi: U \longrightarrow W \cap S$ وجود داشته باشد.

(همئومورفیسم یعنی یک نگاشت پیوسته یک‌به‌یک و پوشا که وارون آن نیز پیوسته است.)

نگاشت φ یک پوشش برای S در همسایگی $S \cap W$ است. همچنین $S \cap W$ را یک کارت رویه‌ای می‌نامیم.

مثال: هر زیرفضای مستوی دوبعدی در $\mathbb{R}^3$ یک رویه است. این زیرفضای مستوی به صورت $a + \langle u, v \rangle$ به ازای

دو بردار مستقل $\{u, v\}$ است $a + \langle u, v \rangle = \{a + tu + sv : t, s \in \mathbb{R}\}$.

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow a + \langle u, v \rangle$$

$$\varphi(t, s) = a + tu + sv$$

به راحتی می‌توان دید که نگاشت φ یک همئومورفیسم است.

مثال: استوانه $x^2+y^2=1$ در $\mathbb{R}^3$ یک رویه است.

$$\varphi : (-\pi,\pi)\times\mathbb{R} \longrightarrow W=\{(x,y,z) : x^2+y^2=1 , x\neq -1\}$$

$$\varphi(\theta,z)=(\cos\theta,\sin\theta,z)$$

$$\varphi^{-1}(x,y,z)=(\tan^{-1} y/x , z)$$

φ یک کارت رویه‌ای (نقشه) برای کل استوانه با حذف خط $(-1,0,z)$ ارائه می‌کند.

برای آنکه نشان دهیم استوانه یک رویه است باید در همسایگی نقاط خط $(-1,0,z)$ نقشه دیگری ارائه کنیم.

به عنوان مثال همان تابع φ با دامنه $(0,2\pi)\times\mathbb{R}$ نقشه متفاوتی برای کل استوانه با حذف خط $(1,0,z)$ ارائه می‌کند.

در حقیقت نمی‌توان کل استوانه را با یک نقشه پوشاند. (چرا؟)

هندسه دیفرانسیل

جلسه هشت ۹۷/۷/۱۶

مثال - کره: $S^2=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\}$

$$\varphi(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

$$\varphi:(-\pi/2,\pi/2)\times(0,2\pi)\longrightarrow S^2-\underbrace{\{(x,0,z) : x\geq 0, x^2+z^2=1\}}_{\text{نیم دایره}}$$

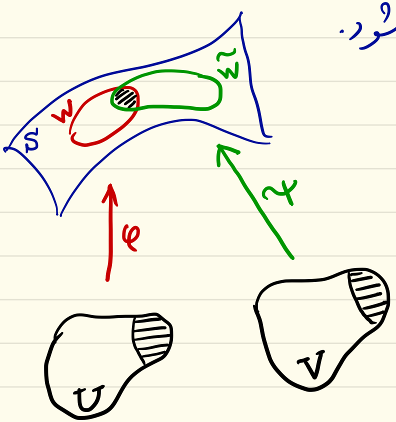
$$\varphi^{-1}(x,y,z)=\left(\sin^{-1}z, \cot^{-1}\frac{x}{y}\right)$$

نگاشت φ یک پرمایش برای کارت رویه‌ی فوق که از حذف یک نیم‌دایره از کره بدست می‌آید ارائه می‌کند.

اگر دامنه‌ی تعریف φ را تغییر دهیم و روی بازه $(\pi/2, 3\pi/2)\times(0,2\pi)$ در نظر بگیریم نقشه دیگری برای نقاط کره با حذف نیم‌دایره $\{(x,0,z) : x\leq 0, x^2+z^2=1\}$ ارائه می‌کند. این دو نقشه همه نقاط کره به‌غیر از دو نقطه $(0,0,\pm1)$ را می‌پوشاند.

اگر پرمایش $\tilde{\varphi}(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta, \cos\theta\sin\varphi)$ یک نقشه برای همسایگی دو نقطه $(0,0,\pm1)$ ارائه می‌دهد.

نمی‌توان کل کره را با یک نقشه پوشاند.



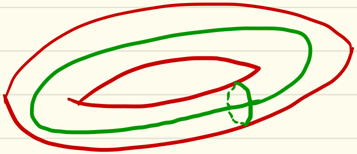
تعریف- مجموعه همه نقشه‌هایی که با آن رویه S را می‌پوشانیم، یک اطلس برای S نامیده می‌شود.

$$\psi^{-1}\circ\varphi : \varphi^{-1}(W\cap\tilde{W}) \longrightarrow \psi^{-1}(W\cap\tilde{W})$$

نگاشت فوق یک همیومورفیسم است که نگاشت گذر (transition map) نامیده می‌شود.

مثال: چنبره. دوران دایره $(x-a)^2+z^2=b^2$ که $0<b<a$ حول محور z .

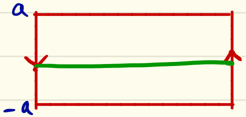
$$\varphi(u,v) = \big((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u\big)$$



$$\varphi : (0,2\pi)\times(0,2\pi) \longrightarrow T$$

یک همیومورفیسم با چنبره بعد از حذف دو دایره (مشابه شکل) ارائه می‌کند.

مثال: نوار موبیوس.

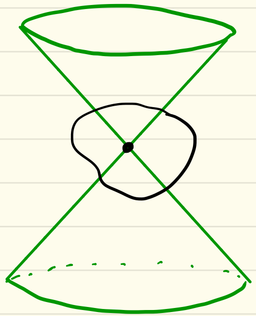


$$\varphi(u,v) = \left(\left(a+v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u, \left(a+v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u, \ v\cos\frac{u}{2}\right)$$

$$\varphi : (0,2\pi) \times \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \longrightarrow M$$

اطلس نوار موبیوس حداقل شامل دو نقشه است.

مثال: مخروط

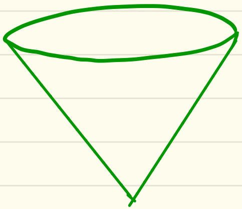


$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = z^2\} \setminus \{(0,0,0)\}$$

$$\varphi(r,\theta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2} r\sin\theta, r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\varphi : (\mathbb{R}-\{0\}) \times (0,2\pi) \longrightarrow S - \{(x,0,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$$

مخروط کامل $\{(x,y,z) : x^2+y^2=z^2\}$ یک رویه نیست. چون هیچ نقشه‌ای حول نقطهٔ $(0,0,0)$ وجود ندارد. زیرا هر همسایگی مبدأ روی مخروط با حذف مبدأ ناهمبند می‌شود و در نتیجه با هیچ بازی در $\mathbb{R}^2$ همیومورف نیست.



نیم مخروط $S^+=\{(x,y,z): x^2+y^2=z^2, z\geq 0\}$ یک رویه است

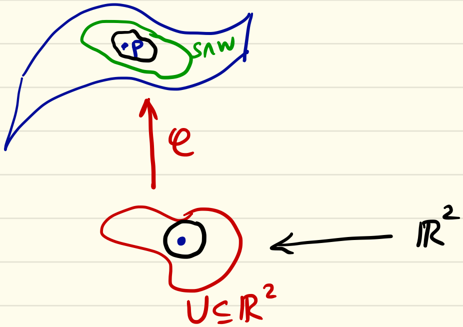
$$\varphi(u,v)=(u,v,\sqrt{u^2+v^2})$$

$$\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow S^+$$

یک همیومورفیسم است.

توجه: اگر S یک رویه و $\varphi: U\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S\cap W$ یک پارامتریش برای کارت رویه‌ای $S\cap W$ باشد و $\theta: V\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow U$ یک همیومورفیسم باشد، واضح است که $\varphi\circ\theta: V\longrightarrow S\cap W$ یک نقشه جدید است. نگاشت θ را تغییر پارامتر یا پارامتریش گوییم.

نکته: با تغییر پارامتر می‌توان برای هر رویه اطلسی ساخت که دامنه نقشه‌های آن کل $\mathbb{R}^2$ باشد. یعنی به ازای هر نقطه روی یک همسایگی در اطلس وجود داشته باشد که با $\mathbb{R}^2$ همیومورف است.



$S\cap W$ را یک کارت رویه‌ای شامل نقطه دلخواه p در نظر بگیرید که باشد

$$\varphi: U\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S\cap W$$

همیومورف با U است. قرار دهید $q=\varphi^{-1}(p)$

گوی باز $B_r(q)\subseteq U$ به شعاع r را انتخاب کنید.

$\varphi(B_r(q))$ یک همسایگی p در S است که با $B_r(q)$ همیومورف است. اکنون با تغییر پارامتر $B_r(q)$ را به $\mathbb{R}^2$ تبدیل می‌کنیم.

$$\theta(x,y)=\left(x\tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right),\ y\tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$$

$$\theta: B_1(0)\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

تعریف: رویه S را هموار گوییم هرگاه برای هر نقطه $p\in S$ یک کارت رویه‌ای $\varphi: U\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S\cap W$ وجود داشته باشد که همئومورفیسم باشد، به علاوه φ یک نگاشت هموار بوده و $D\varphi(a)$ به ازای هر $a\in U$ رتبه دو داشته باشد.

$$D\varphi(a)=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \partial_x\varphi_1 & \partial_y\varphi_1 \\ \partial_x\varphi_2 & \partial_y\varphi_2 \\ \partial_x\varphi_3 & \partial_y\varphi_3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \partial_x\varphi=\varphi_x & \partial_y\varphi=\varphi_y \end{array} \end{array}$$

به طور معادل باید φ_x و φ_y مستقل خطی باشند یا اینکه $\varphi_x\times\varphi_y\neq 0$ در هر نقاط.

بنابر قضیه رتبه نگاشتهای θ_1 و θ_2 وجود دارند که:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] & S\cap W \\ \tilde{U} \arrow[u, "\theta_1"] \arrow[r, "\theta_2^{-1}\circ\varphi\circ\theta_1"] & \tilde{W} \arrow[u, "\theta_2"'] \end{tikzcd}$$

$$\theta_2^{-1}\circ\varphi\circ\theta_1\,(x,y)=(x,y,0)$$

این مطلب نشان می‌دهد که در حقیقت هر رویه هموار به طور موضعی نمودار یک تابع هموار است.

هندسه دیفرانسیل

جلسه نهم ۹۷/۷/۲۱

تعریف- کارت رویه‌ای $\varphi: U \longrightarrow S \cap W$ را منظم گوییم هرگاه همیومورفیسم φ هموار بوده و φ_u و φ_v مستقل خطی باشند.

مثال- زیرفضای دوبعدی $a + \langle u, v \rangle$ با کارت رویه‌ای $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(t,s) = a + tu + sv$$

$$\varphi_t(t,s) = u \quad , \quad \varphi_s(t,s) = v$$

واضح است که φ_t و φ_s در همه نقاط مستقل خطی هستند. در نتیجه کارت رویه‌ای فوق منظم است و زیرفضای $a + \langle u, v \rangle$ یک رویه هموار است.

مثال- استوانه $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$ ، $\varphi: (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow S$

$$\varphi(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

واضح است که دو بردار $\varphi_z = (0,0,1)$ ، $\varphi_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ در همه نقاط مستقل خطی هستند. در نتیجه φ یک کارت رویه‌ای هموار برای استوانه است.

مثال - کره

$$\sigma:(-\pi/2,\pi/2)\times(0,2\pi)\longrightarrow S^2 \qquad S^2=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\}$$

$$\sigma(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta)$$

$$\sigma_\theta=(-\sin\theta\cos\varphi,\ -\sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

$$\sigma_\varphi=(-\cos\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$\cos\theta\neq 0$ در نتیجه این دو بردار مستقل هستند

مثال - نوار موبیوس:

$$\varphi(u,v)=\left(\left(a+v\sin\tfrac{u}{2}\right)\cos u,\ \left(a+v\sin\tfrac{u}{2}\right)\sin u,\ v\cos\tfrac{u}{2}\right)$$

$$\varphi:(0,2\pi)\times(-a/2,a/2)\longrightarrow R^3$$

$$\varphi_u=\left(-\left(a+v\sin\tfrac{u}{2}\right)\sin u+\tfrac{v}{2}\cos\tfrac{u}{2}\cos u,\ \left(a+v\sin\tfrac{u}{2}\right)\cos u+\tfrac{v}{2}\cos\tfrac{u}{2}\sin u,\ -\tfrac{v}{2}\sin\tfrac{u}{2}\right)$$

$$\varphi_v=\left(\sin\tfrac{u}{2}\cos u,\ \sin\tfrac{u}{2}\sin u,\ \cos\tfrac{u}{2}\right)$$

$\varphi_u\times\varphi_v=\left(-\cos u\cos\tfrac{u}{2},\ -\sin u\cos\tfrac{u}{2},\ -\sin\tfrac{u}{2}\right)\neq 0$ در نتیجه φ یک نقشه هموار برای نوار موبیوس است.

مثال- نیم‌مخروط $S^+ = \{(x,y,z) : x^2+y^2=z^2, z \geq 0\}$ یک رویهٔ هموار نیست.

نقشه $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$ که در جلسه قبل ارائه شد، نگاشت مشتق‌پذیر

نیست. (φ در نقطه $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست).

گزاره: اگر $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک کارت رویه‌ای منظم باشد، و اگر $\Phi : V \longrightarrow U$ یک تابع هموار دوسویی با وارون

هموار $\Phi^{-1} : V \longrightarrow U$ باشد آنگاه $\sigma \circ \Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ نیز یک کارت رویه‌ای منظم خواهد بود.

اثبات - Φ وارون هموار دارد در نتیجه ماتریس مشتق $D\Phi$ در همه نقاط وارون‌پذیر است از طرفی بنابر تعریف کارت رویه‌ای منظم

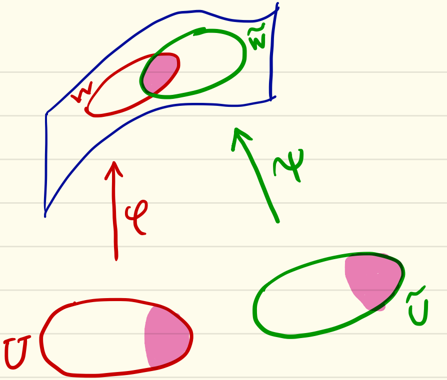
ماتریس $D\sigma$ رتبه دو دارد در نتیجه رتبه ماتریس

$$D(\sigma \circ \Phi) = D\sigma \cdot D\Phi$$

باید برابر دو باشد.

نکته - هر تابع هموار دوسویی وارون‌پذیر با وارون هموار را دیفئومورفیسم گوییم. گزاره فوق نگاشتهای تغییر پارامتر برای رویه‌های هموار

باید دیفئومورفیسم باشند.



یادآوری: تعریف نگاشت گذر

$$\psi^{-1}\circ\varphi : \varphi^{-1}(W\cap\tilde W) \longrightarrow \psi^{-1}(W\cap\tilde W)$$

گزاره: نگاشت گذرِ دو نقشه هموار یک دیفئومورفیسم است.

اثبات. چون φ و ψ نگاشت‌های دوسویی هستند پس $\psi^{-1}\circ\varphi$ نیز به وضوح دوسویی است. تنها کافیست ثابت کنیم که $\psi^{-1}\circ\varphi$ هموار است. (به طور مشابه می‌توان نشان داد که $\varphi^{-1}\circ\psi$ نیز هموار است)

(تذکر: هرچند φ یک نگاشت هموار است ولی ψ^{-1} یک نگاشت هموار نیست. زیرا دامنه تعریف آن یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^3$ نیست)

اگر بتوانیم توسیعی هموار برای ψ^{-1} در یک همسایگی باز پیدا کنیم آنگاه به وضوح $\psi^{-1}\circ\varphi$ ترکیب دو تابع هموار خواهد بود.

بنابر قضیه رتبه نگاشت‌های دیفئومورفیسم $\theta_1 : U_* \to \tilde U$ و $\theta_2 : W_* \to \tilde W$ وجود دارند که

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U} \arrow[r, "\psi"] & \bar{W} \\
U_* \arrow[u, "\theta_1"] \arrow[r] & W_* \arrow[u, "\theta_2"']
\end{tikzcd}$$

$$\theta_2^{-1} \circ \psi \circ \theta_1 (x, y) = (x, y, 0)$$

قرار دهید $\pi : W_* \longrightarrow U_*$ نگاشت تصویر

$$\pi(x, y, z) = (x, y)$$

باشد آنگاه $\theta_1 \circ \pi \circ \theta_2^{-1}$ یک ترسیم هموار برای نگاشت $\psi^{-1} : \tilde{W} \to \tilde{U}$

است.

نگاشت‌های هموار روی رویه‌ها :

فرض کنید S_1 و S_2 دو رویه‌ی هموار باشند، نگاشت $f: S_1 \longrightarrow S_2$ را در نقطه $p \in S_1$ هموار گوییم هرگاه

$\sigma_1 : U_1 \longrightarrow S_1$ و $\sigma_2 : U_2 \longrightarrow S_2$ نقشه‌های حول نقاط p و $f(p)$ باشند، آنگاه $\sigma_2^{-1}\circ f\circ \sigma_1 : U_1 \longrightarrow U_2$

در نقطه $\sigma_1^{-1}(p)$ هموار باشد.

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, "f"] & S_2 \\
U_1 \arrow[u, "\sigma_1"] \arrow[r, "\sigma_2^{-1}\circ f\circ\sigma_1"] & U_2 \arrow[u, "\sigma_2"']
\end{tikzcd}$$

این تعریف مستقل از انتخاب نقشه‌های σ_1 و σ_2 است. اگر $\tilde\sigma_1 : \tilde U_1 \longrightarrow S_1$ و $\tilde\sigma_2 : \tilde U_2 \longrightarrow S_2$ دو نقشه دیگر

حول نقاط p و $f(p)$ باشند، بنابر گزاره قبل نگاشت‌های گذر هموار هستند یعنی

$$\sigma_1^{-1}\circ\tilde\sigma_1 : \tilde U_1 \longrightarrow U_1 \quad \text{و} \quad \tilde\sigma_2^{-1}\circ\sigma_2 : U_2 \longrightarrow \tilde U_2$$

هموار هستند. از همواری $\sigma_2^{-1}\circ f\circ\sigma_1$ و قاعده زنجیره‌ای نتیجه می‌گیریم که نگاشت زیر نیز هموار است.

$$(\tilde\sigma_2^{-1}\circ\sigma_2)\circ(\sigma_2^{-1}\circ f\circ\sigma_1)\circ(\sigma_1^{-1}\circ\tilde\sigma_1) = \tilde\sigma_2^{-1}\circ f\circ\tilde\sigma_1$$

تعریفِ فضای مماس رویه:

اگر S رویهٔ هموار باشد و $p \in S$ که $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ یک کارت رویهٔ هموار در همسایگیِ p ارائه کند که

$$\sigma(x_0) = p$$

می‌دانیم $D\sigma(x_0)$ یک ماتریس با رتبهٔ ۲ است در نتیجه $D\sigma(x_0)(\mathbb{R}^2)$ یک زیرفضای دوبعدی $\mathbb{R}^3$ است.

این زیرفضا توسط بردارهای σ_u و σ_v تولید می‌شود. فضای مماس بر رویه در نقطهٔ p را که با T_pS نشان می‌دهیم برابر این زیرفضا تعریف می‌کنیم.

این تعریف مستقل از انتخاب نقشه است.

$$\begin{tikzcd}
 & S & \\
U \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\tilde{\sigma}^{-1}\circ\sigma"] & & \tilde{U} \arrow[ul, "\tilde{\sigma}"']
\end{tikzcd}$$

بنابر گزارهٔ قبل نگاشت گذر $\tilde{\sigma}^{-1}\circ\sigma$ یک دیفئومورفیسم است

و در نتیجه ماتریس مشتق آن، $D(\tilde{\sigma}^{-1}\circ\sigma)$ وارون‌پذیر است. از طرفی

$$\sigma = \underbrace{\tilde{\sigma}}_{\text{هموار از } \mathbb{R}^2 \text{ به } \mathbb{R}^3} \circ \underbrace{(\tilde{\sigma}^{-1}\circ\sigma)}_{\text{نگاشت هموار از } \mathbb{R}^2 \text{ به } \mathbb{R}^2}$$

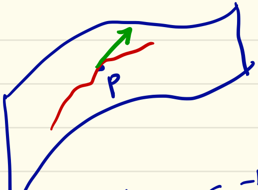
بنابراین

$$D\sigma = D\tilde{\sigma} \cdot D(\tilde{\sigma}^{-1}\circ\sigma)$$

و در نتیجه زیرفضای ستونی ماتریس‌های $D\sigma$ و $D\tilde{\sigma}$ برابر هستند.

تعریفِ جدیدِ فضای مماس: خم هموار $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow S$ را در نظر بگیرید که $\gamma(0) = p$.

فضای مماس شامل همه بردارهای $\gamma'(0)$ است برای همه انتخاب‌های γ.



اگر $\sigma : U \longrightarrow S$ یک تکه حول نقطهٔ p باشد، باید $\sigma^{-1}\circ\gamma : I \to U$ هموار باشد زیرا σ^{-1} توسیع هموار دارد.

$$\tilde{\gamma} = \sigma^{-1}\circ\gamma : I \longrightarrow U$$

$$\gamma = \sigma\circ\tilde{\gamma} \Rightarrow \gamma'(0) = D\sigma \cdot \tilde{\gamma}'(0) \Rightarrow$$

در نتیجه $\gamma'(0)$ در فضای ستونی ماتریسِ $D\sigma$ است که همان T_pS است که در صفحه قبل تعریف کردیم.

برعکس به ازای هر بردار در T_pS می‌توان خم $\tilde{\gamma}$ را پیدا کرد که $D\sigma \cdot \tilde{\gamma}'(0)$ برابر آن بردار شود (چرا؟)

در واقع تعریف فوق معادل همان تعریفِ صفحه قبل است.

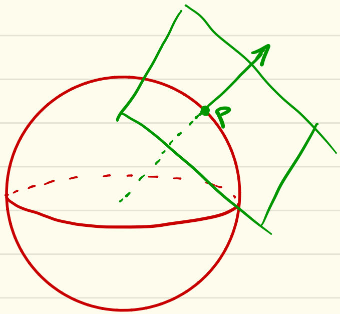
هندسه دیفرانسیل

جلسه ده ۹۷/۷/۲۳

یادآوری فضای مماس: اگر S رویه هموار باشد و $p\in S$. فضای مماس بر S در نقطه p که با T_pS نمایش می‌دهیم زیرفضای برداری تولید شده توسط دو بردار σ_u و σ_v است که $\sigma: U \longrightarrow S$ یک نقشه در همسایگی p است. در نتیجه $\sigma_u \times \sigma_v$ بردار عمود بر صفحه مماس است.

$$T_pS = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) = 0\}$$

مثال- $\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$



$$\sigma_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

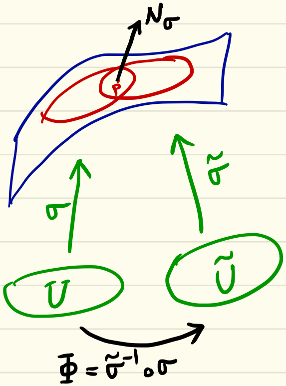
$$\sigma_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2\theta\cos\varphi, -\cos^2\theta\sin\varphi, -\cos\theta\sin\theta) = -\cos\theta\,\sigma(\theta,\varphi)$$

$p = \sigma(\theta,\varphi)$ $\qquad T_pS = \{x : x\cdot p = 0\}$

تعریف: رویه S را جهت‌پذیر گوییم هرگاه بردار یکه $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ وجود داشته باشد که در هر نقطه $x \in S$ ، $N(x)$ عمود بر رویه S (فضای مماس T_xS) باشد.

واضح است که در صورتی که چنین برداری وجود داشته باشد، در هر نقطه تنها دو انتخاب برای N وجود دارد، $\pm \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ که σ یک نقشه است.



قرار دهید: $N_\sigma := \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ اگر $\tilde{\sigma}$ نقشه دیگری باشد، $N_{\tilde{\sigma}} = N_\sigma$ است یا $N_{\tilde{\sigma}} = -N_\sigma$.

$$\sigma_u = D\sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_v = D\sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\sigma}_u = D\tilde{\sigma} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{\sigma}_v = D\tilde{\sigma} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \tilde{\sigma} \circ \Phi \quad \Rightarrow \quad \sigma_u = D\tilde{\sigma}\, D\Phi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_v = D\tilde{\sigma}\, D\Phi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_u \times \sigma_v = \det(D\Phi)\,(\tilde{\sigma}_u \times \tilde{\sigma}_v)$$

درنتیجه $N_{\tilde{\sigma}} = N_\sigma$ هرگاه $\det(D\Phi) > 0$ و برعکس $N_{\tilde{\sigma}} = -N_\sigma$ اگر $\det(D\Phi) < 0$

نکته: در واقع رویه‌ی که جهت پذیر است هرگاه اطلسی برای آن وجود داشته باشد که دترمینان ژاکوبین نگاشت‌های گذر بین هر دو نقشه مثبت باشد.

مثال- کره یک رویه‌ی جهت پذیر است. به ازای هر نقطه $p \in S^2$ بردار $N(p) = p$ برداری یکه عمود بر رویه است. (عمود بودن در شکل قبل دیده شد.)

مثال-
$$\varphi(u,v) = \big((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u\big)$$

$$\varphi_u = (-b\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ b\cos u)$$

$$\varphi_v = (-(a+b\cos u)\sin v,\ (a+b\cos u)\cos v,\ 0)$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \big(-b\cos u\cos v\,(a+b\cos u),\ -b\cos u\sin v\,(a+b\cos u),\ -b\sin u\,(a+b\cos u)\big)$$

$$N_\varphi = -(\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ \sin u)$$

برای اینکه یک اطلس برای چنبره بسازیم تنها کافیست دامنه تعریف φ را تغییر دهیم مثلاً $\varphi:(0,2\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ ، $\varphi:(-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^3$

$\varphi:(-\pi/2,3\pi/2)\times(-\pi/2,3\pi/2)\to\mathbb{R}^3$ یک اطلس برای چنبره است که ژاکوبین نگاشتهای گذر بین هر دو نقشه‌ای که بین هم بخش است

و دترمینانش مثبت است. (تمرین)

مثال: نوار موبیوس جهت ناپذیر است.

$$\varphi(u,v)=\left(\left(1+v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u,\left(1+v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u,\ v\cos\frac{u}{2}\right)$$

$$\varphi:(0,2\pi)\times(-1/2,1/2)\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

$$\varphi_u\times\varphi_v=\left(-\cos u\cos\frac{u}{2},\ -\sin u\cos\frac{u}{2},\ -\sin\frac{u}{2}\right)$$

درضمن نگاشت $\tilde{\varphi}:(-\pi,\pi)\times(-1/2,1/2)\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه مشابه φ به همراه φ یک اطلس برای نوار موبیوس است.

نگاشت گذر بین این دو نقشه عبارتست از

$$\Phi=\tilde{\varphi}^{-1}\circ\varphi:\left[(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)\right]\times(-1/2,1/2)\longrightarrow\left[(-\pi,0)\cup(0,\pi)\right]\times(-1/2,1/2)$$

که $\Phi\big|_{(0,\pi)\times(-1/2,1/2)}$ نگاشت همانی است و

$\Phi(u,v)=(u-2\pi,-v)$ عبارت است از $\Phi:(\pi,2\pi)\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\longrightarrow(-\pi,0)\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

که $\det(D\Phi)=-1$.

چرا نوار موبیوس جهت پذیر نیست؟ اگر بردار عمود یکه N روی نوار موبیوس وجود داشته باشد روی نقاط داخل نقشه φ به وضوح $N=\varphi_u\times\varphi_v$

یا $N=-\varphi_u\times\varphi_v$. اگر N بردار عمود یکه سرتاسر روی آن باشد، بردار $-N$ نیز چنین است پس می‌توان فرض کرد که $N=\varphi_u\times\varphi_v$

داخل نقشه φ. از طرفی نقشه φ تنها با حذف پاره خط l از نوار موبیوس به دست آمده است ولی

حد بردار N روی پاره خط l از یک طرف $\lim_{u\to 0}\varphi_u\times\varphi_v=(-1,0,0)$

حد بردار N روی پاره خط l از طرف دیگر $\lim_{u\to 2\pi}\varphi_u\times\varphi_v=(1,0,0)$

در نتیجه بردار N پیوسته نیست.

مشتق: S_1 و S_2 دو رویه‌ی هموار و $f : S_1 \to S_2$. در جلسه قبل دیدیم که نگاشت در نقطه $p \in S_1$ مشتق‌پذیر است

هرگاه به ازای هر نقشه $\sigma_1 : U_1 \to S_1$ و $\sigma_2 : U_2 \to S_2$ در همسایگی p و $f(p)$، نگاشت $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ مشتق‌پذیر باشد.

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, "f"] & S_2 \\
U_1 \arrow[u, "\sigma_1"] \arrow[r, "\Phi = \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1"] & U_2 \arrow[u, "\sigma_2"']
\end{tikzcd}$$

مشتق f در نقطه p که با $D_p f$ نشان می‌دهیم یک نگاشت خطی بین فضاهای تانژانت است. در واقع

$$\begin{tikzcd}
D_p f : T_p S_1 \arrow[r] \arrow[d, "(D\sigma_1)^{-1}"] & T_{f(p)} S_2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "D(\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1)"] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "D\sigma_2"']
\end{tikzcd}$$

تذکر: هرچند $D\sigma_1$ یک ماتریس 3×2 است ولی یک یکریختی بین $T_p S_1$ و $\mathbb{R}^2$ خواهد بود.

تمرین: نشان دهید تعریف فوق مستقل از انتخاب نقشه است.

اگر $u \in T_pS_1$ باشد، بنابر تعریفِ دوم فضای مماس خم هموار S_1 $\gamma : I \longrightarrow$ وجود دارد که $\gamma'(0) = u$.

دراین صورت $f \circ \gamma : I \longrightarrow S_2$ خم هموار صافی روی S_2 خواهد بود که $(f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(p)}S_2$ است.

درواقع داریم:

$$(D_pf)(u) = (f \circ \gamma)'(0)$$

درواقع برای نقشه‌های σ_1 و σ_2، خم $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow U_1$ وجود دارد که $\sigma_1 \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ درنتیجه

$$D\sigma_1 \cdot \tilde{\gamma}'(0) = \gamma'(0) = u$$

$$D_pf(u) = D\sigma_2 \circ D(\underbrace{\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1}_{=\Phi}) \circ \underbrace{(D\sigma_1)^{-1}(u)}_{\tilde{\gamma}'(0)}$$

ازطرفی $f \circ \gamma = \sigma_2 \circ \Phi \circ \tilde{\gamma}$ درنتیجه

$$(f \circ \gamma)'(0) = D\sigma_2 \circ D\Phi \; \tilde{\gamma}'(0) = D_pf(u)$$

نکته: نحوه تعریف مشتق تضمین می‌کند که همه فضاهای مربوط به مشتق که به صورت موضعی بیان شده‌اند برای مشتق نگاشت بین رویه‌ها برقرار است.

گزاره: اگر $f: S_1 \longrightarrow S_2$ در نقطه p مشتق‌پذیر باشد و $g: S_2 \longrightarrow S_3$ در نقطه $f(p)$ مشتق‌پذیر آنگاه
$g\circ f: S_1 \longrightarrow S_3$ در نقطه p مشتق‌پذیر است و

$$D_p(g\circ f) = D_{f(p)} g \circ D_p f$$

$$\begin{tikzcd}
T_p S_1 \arrow[r, "D_p f"] \arrow[rr, bend right, "D_p(g\circ f)"'] & T_{f(p)} S_2 \arrow[r, "D_{f(p)} g"] & T_{g(f(p))} S_3
\end{tikzcd}$$

گزاره (تابع وارون) اگر $f: S_1 \longrightarrow S_2$ نگاشت هموار که $D_p f: T_p S_1 \longrightarrow T_{f(p)} S_2$ یک یکریختی باشد ($T_p S_1$ و $T_{f(p)} S_2$ دو فضای
دو بعدی هستند) آنگاه در همسایگی p، نگاشت f وارون هموار دارد. در واقع $g: S_2 \cap W_2 \longrightarrow S_1 \cap W_1$ وجود دارد که
W_1 باز حول p و W_2 باز حول $f(p)$ است و $f\circ g = id$. به علاوه $D_{f(p)} g = (D_p f)^{-1}$