



۱. فرض کنید $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ خمی با سرعت واحد باشد. نشان دهید تابع منحصر به فرد هموار $\phi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوریکه

$$\dot{\gamma}(s) = (\cos \phi(s), \sin \phi(s)),$$

و شرط اولیه $\phi(s_0) = \phi_0$ به ازای $s_0 \in (\alpha, \beta)$ و مقدار مناسب ϕ_0 برقرار باشد.

۲. ثابت کنید یک دیفیئومورفیسم موضعی $f : S_1 \rightarrow S_2$ همدیس است اگر و فقط اگر تابع $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $p \in S_1$

$$f^* \langle v, w \rangle_p = \lambda(p) \langle v, w \rangle_p, \quad v, w \in T_p S_1.$$

۳. اگر صفحه‌ای یک رویه هموار را فقط در یک نقطه قطع کند، ثابت کنید که موازی فضای مماس رویه در آن نقطه است.

۴. نشان دهید با فرض اینکه تاب یک خم در همه نقاط ناصفر است، بردار قائم N ، آن خم را در حد کلاس ایزومتري (یک حرکت صلب) تعیین می‌کند.

۵. نشان دهید نوار موبیوس که تصویر نگاشت $\sigma : (-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه زیر است، یک رویه جهت‌ناپذیر است.

$$\sigma(t, \theta) = \left(\left(1 - t \sin \frac{\theta}{p}\right) \cos \theta, \left(1 - t \sin \frac{\theta}{p}\right) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{p} \right)$$

موفق باشید.