



۱. تعریف نگاشت وینگارتن را به صورت کامل بیان کنید و ماتریس نمایش آن را در پایه $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ به دست آورید که σ یک نقشه برای رویه است.
۲. ثابت کنید که روی یک رویه فشرده نقطه‌ای وجود دارد که در آنجا انحنای گاوسی مثبت است.
۳. اگر انحنای گاوسی در یک نقطه منفی باشد، نشان دهید که اشتراک رویه با صفحه مماس در آن نقطه دو خم متقاطع است. به علاوه انحنای قائم هر دو خم در آن نقطه صفر است.
۴. اگر تمام نقاط یک رویه نافه (umbilic) باشد، نشان دهید که زیرمجموعه‌ای از صفحه یا کره است.
۵. اگر اشتراک دو رویه S_1 و S_2 منحنی γ باشد. اگر γ روی هر دو رویه ژئودزیک بوده و انحنایش همه‌جا ناصفر باشد، ثابت کنید که S_1 و S_2 در امتداد γ بر هم مماس هستند.
۶. یک رویه دارای فرم‌های اساسی نوع اول و دوم زیر است:

$$\cos^2 v du^2 + dv^2, \quad -\cos^2 v du^2 - dv^2.$$

- نشان دهید که این رویه یک زیرمجموعه از یک کره به شعاع واحد است.
۷. اگر S رویه مینیمال (با انحنای میانگین صفر) باشد و انحنای گاوسی آن ناصفر. ثابت کنید که نگاشت گاوس $\mathcal{G}: S \rightarrow S^2$ یک هم‌دیس است.

موفق باشید.