ریاضی عمومی ۱

جلسه بیست و پنجم

۱۴۰۰/۱۰/۶

سری‌های عددی

جمع ناشناهی عدد را می‌خواهیم تعریف کنیم. دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی (مختلط) در نظر بگیرید.

هدف این است که ببینیم چگونه می‌توان به صورت بدون ابهام مجموع همه این اعداد را تعریف کرد.

ساده‌ترین راه این است که دنباله

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

را در نظر بگیرید که به آن مجموع‌های جزئی گفته می‌شود. اگر این دنباله S_n به عددی همگرا شد، می‌گوییم سری

عددی $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا است.

$$S_n \longrightarrow A \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$$

و اگر دنباله S_n واگرا باشد، سری را واگرا گوییم. استفاده از این مفهوم برای جمع ناشناهی عدد $\{a_n\}$ دارای ابهاماتی است

من جمله اینکه جابجایی در جمع می‌تواند مقدار مجموع را تغییر دهد.

در محاسبه مجموع اعداد به تعبیر بالا مجاز نیستیم که ترتیب اعضای دنباله را به هم بزنیم.

مثال- $\quad -1, 1, -1, 1, \dots \qquad a_n = (-1)^n$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ واگرا است. $\Rightarrow$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ -1 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

اگر ترتیب جمع را تغییر دهیم مثلاً

$$a_1, a_3, a_5, a_2, a_4, a_6, a_7, a_9, a_{11}, a_8, a_{10}, a_{12}, \dots$$

$$-1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, \dots$$

$$S_n = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{cases}$$

مثال- $a_n = \frac{1}{2^n}$ ، $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$

می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ که به معنای این است که $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

مثال- $0 \le c_n \le 9$ و $a_n = \frac{c_n}{10^n}$

$$S_n = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} = 0/c_1c_2\cdots c_n$$

بنابر اصل تمامیت می‌دانیم که $S_n \longrightarrow 0/c_1c_2c_3\cdots$ در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}$ همگرا است

مثال- $a_n = \frac{1}{n}$ دنباله مجموعهای جزئی $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ یک دنباله صعودی است.

$$\underbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{\text{جمله } 2^k} > \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{\text{جمله } 2^k} = \frac{1}{2}$$

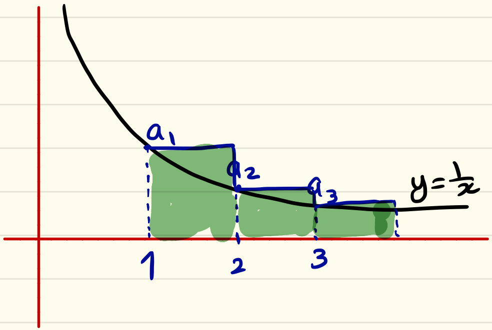
$$S_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2}\right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \cdots + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots + \left(\cdots \frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{\text{k جمله}} = 1 + \frac{k}{2}$$

چون S_n صعودی است اگر $n > 2^k$ آنگاه $S_n > 1 + \frac{k}{2}$ درنتیجه $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است.

اثبات دیگری برای واگرایی:



$$S_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

گزاره: اگر سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $a_n \to 0$.

اثبات ـ اگر سری همگرا باشد باید

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n \longrightarrow A$$

$$\Rightarrow \quad a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow A - A = 0$$

نکته ـ برعکس گزاره فوق درست نیست. به عنوان مثال سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است هرچند اعضای دنباله به صفر میل می‌کنند.

مثال ـ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2$$

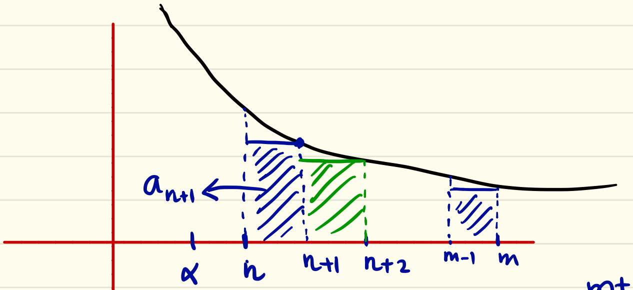
$$2 \leq k \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

S_n دنباله صعودی و کران‌دار است. بنابر قضیه قبل‌تر دنباله S_n همگرا است.

آزمون‌های همگرایی :

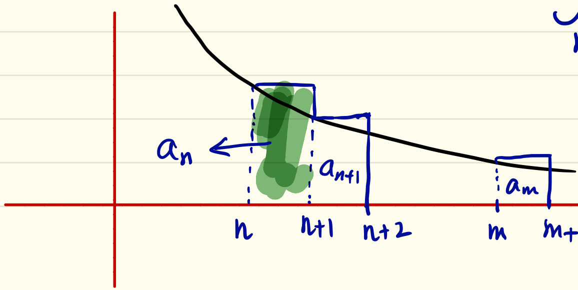
① آزمون انتگرال : $f:[\alpha,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته، نزولی و مثبت بگیرید.

اگر داشته باشیم $a_n=f(n)$ برای $\alpha\le n$ ، در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد.



$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m\le\int_n^m f(x)\,dx$$

$$\int_n^{m+1} f(x)\,dx\le a_n+a_{n+1}+\cdots+a_m$$



$$\sum_{\alpha+1\le n\le m} a_n\le\int_{\alpha}^{m} f(x)\,dx\le\sum_{\alpha\le n\le m-1} a_n$$

مثال - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\Leftarrow$ $f(x)=\frac{1}{x^2}$ چون $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}=1$ همگرا است پس سری $\sum \frac{1}{n^2}$ نیز همگرا است.

مثال - $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ معادل است با همگرایی $\int_{1}^{\infty} \frac{x^2}{e^x}\,dx$

مثال - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ معادل است با همگرایی انتگرال $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^u\,du}{e^u\,u} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u} = +\infty$$

بنابراین این سری واگرا است.

مثال - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ برای $p>1$ همگرا است.

نکته - اگر $a_n = f(n)$ که f شرایط آزمون انتگرال را داشته باشد، S_n مجموعه‌ی جزیی سری $\sum a_n$

که به مقدار A همگراست ($\lim S_n = A$) آنگاه

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \le \underbrace{A - S_n}_{a_{n+1}+a_{n+2}+\dots} \le \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$$

مثال- اگر در محاسبه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ بخواهیم مقدار سری را با خطای 10^{-2} محاسبه کنیم، تا چند جمله را باید جمع بزنیم

$$\frac{1}{n} = \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < 10^{-2} \Rightarrow 100 < n$$

$$\frac{1}{n+1} \le A - S_n \le \frac{1}{n}$$

② آزمون مقایسه

فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد نامنفی باشند که از یک اندیس به بعد داشته باشیم $0 \le a_n \le K b_n$ آنگاه

الف) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

ب) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگرا است.

مثال - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ با مقایسه با سری $\sum \frac{1}{2^n}$ نتیجه می‌شود که همگرا است.

$$a_n = \frac{1}{2^n+1} \le \frac{1}{2^n} = b_n$$

مثال - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$

$$a_n = \frac{3n+1}{n^3+1} < \frac{4}{n^2} \iff 3n^3+n^2 < 4n^3+4$$

$$\Updownarrow$$

$$n^2 < n^3+4$$

$$b_n = \frac{1}{n^2}, \quad K=4$$

آزمون مقایسه به بیانِ دیگر : اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

الف) اگر $L<\infty$ و $\sum b_n$ سری همگرا بود، آنگاه سری $\sum a_n$ نیز همگرا است.

ب) اگر $L>0$ و $\sum b_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز واگرا است.

اگر $L<\infty \Leftarrow \frac{a_n}{b_n} < L+1$ برای اندیسهای n از جایی به بعد

اگر $0<L \Leftarrow \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n}$

مثال- $\sum \frac{2n^3-n+3}{n^4+1}$ (a_n) $\qquad b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$

$\sum \frac{1}{n}$ واگرا است $\Rightarrow \sum a_n = +\infty$

مثال- $\sum \frac{1}{n} < \sum \frac{1}{\ln n} \Rightarrow$ واگرا است.

③ آزمون نسبت: $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت است.

الف) اگر عدد $p<1$ وجود داشته باشد که $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq p$ برای اندیس‌های n از یکجا به بعد، آنگاه سری $\sum a_n$ همگرا است.

ب) اگر برای اندیس‌های از یکی به بعد داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ آنگاه سری واگرا است.

اگر برای $n \geq k$ درست باشد، $a_{n+k} \leq a_k \cdot p^n = (a_k p^{-k}) p^{n+k}$

برای $n \geq k$ $\quad a_n \leq (a_k p^{-k})\, b_n \quad \Rightarrow \quad b_n = p^n$

بیان دیگر: اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$ وجود داشت، (الف) اگر $p<1$ سری همگرا است.

ب) اگر $1<p\leq\infty$ سری واگرا است.

پ) اگر $p=1$ درخصوص همگرایی یا واگرایی نمی‌توان اظهار نظر کرد.

مثال - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ که x یک عدد ثابت دلخواه است.

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0$$

در نتیجه سری همگرا است.

مثال - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

مثال- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ به کمک آزمون انتگرال همگرا است اگر و تنها اگر $1<p$. اگر بخواهیم آزمون نسبت را استفاده کنیم

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} \longrightarrow 1$$

که حالت $p=1$ است.

④ آزمون ریشه:

الف) اگر $p<1$ وجود داشته باشد که $\sqrt[n]{a_n} \le p$ از یک جا به بعد. آنگاه سری همگرا است

ب) اگر برای بی‌نهایت اندیس n داشته باشیم $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ آنگاه سری واگرا است.

در یک حالت ساده اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$ در حالت $p<1$ سری همگرا است.

$p>1$ سری واگرا است.

$p=1$ اظهار نظر نمی‌توان کرد. سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

مثال - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ برای یک x دلخواه

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{n} \longrightarrow 0$$

در نتیجه سری همگرا است.

مثال- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} \longrightarrow 1$$

در اینجا نمی‌توان راجع به همگرایی یا واگرایی سری اظهار نظری کرد. همان‌طور که دیدیم برای $p \leq 1$ واگرا
و برای $1 < p$ همگرا است.

ریاضی عمومی ۱

جلسه بیست و ششم　　　۱۴۰۰/۱۰/۱۱

تعریف- سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

گزاره- اگر سری $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه همگرا است.

$$\sum_n |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_n a_n \text{ همگرا است.}$$

اثبات-

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

چون سری $\sum 2|a_n|$ همگرا است بنابر آزمون مقایسه باید سری $\sum a_n+|a_n|$ نیز همگرا باشد.

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{m} a_n+|a_n|}_{\text{مجموع جزیی که همگرا است}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{m} |a_n|}_{\text{مجموع جزیی سری } \sum|a_n| \text{ که همگرا است}}$$

نکته - وقتی اعضای دنباله $\{a_n\}$ مثبت نباشند، آزمون‌های همگرایی که در جلسه قبل گفتیم قابل استفاده نیستند. ولی می‌توانیم

به کمک آن آزمون‌ها همگرایی مطلق سری $\sum a_n$ را بررسی کنیم و از همگرایی مطلق به همگرایی سری $\sum a_n$ برسیم.

هر چند ممکن است یک سری همگرا باشد، اما همگرایی مطلق نباشد. در این حالت سری همگرای شرطی می‌نامیم

به عنوان مثال سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرای شرطی است. در ادامه خواهیم دید که این سری همگرا است. در جلسه پیش دیدیم که $\sum \frac{1}{n}$ واگرا است.

آزمون لایب‌نیتس (سری متناوب)

a_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی و نزولی در نظر بگیرید که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$$

در این صورت سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگرا است. اگر S_n مجموع‌های جزئی این سری باشد که به S همگرا است،

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}$$

مثال - $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرای شرطی است.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n}$ همگرای شرطی است.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ همگرای مطلق است.

سؤال: اگر $\sum_{1}^{\infty} a_n$ را به معنای جمع بی‌نهایت عدد a_1، a_2، a_3، ... در نظر بگیریم، در چه صورت خواص جمع برآورده می‌شود.

مثلاً آیا جابجایی در جمع داریم؛ به این معنا که اگر ترتیب اعضای دنباله را به هم بزنیم به همان عدد همگرا خواهیم شد؟

پاسخ: درصورتی که سری همگرای مطلق باشد، خاصیت جابجایی در جمع برقرار است.

اگر سری $\sum a_n$ همگرای شرطی باشد، با جابجایی در جمع a_n ها می‌توان به هر عدد دلخواهی میل کرد.

مثال- سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرای شرطی است. نشان می‌دهیم که با جابجایی می‌توان به عدد 12 همگرا شد.

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$$

دو سری $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ و $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ واگرا هستند.

کوچکترین عدد N_1 را انتخاب کنید که

$$12 + \frac{1}{2N_1} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2N_1} > 12$$

$$11 < \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2k} - 1 < 12$$

N_2 کوچکترین عددی که

$$12 + \frac{1}{2N_2} \geq \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2k} - 1 + \frac{1}{2(N_1+1)} + \cdots + \frac{1}{2N_2} > 12$$

(چون سری $\sum \frac{1}{2k}$ واگرا است می‌توان N_2 را انتخاب کرد)

$$11 + \frac{2}{3} < \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2k} - 1 + \sum_{k=N_1+1}^{N_2} \frac{1}{2k} - \frac{1}{3} < 12$$

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

$\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد است. c یک عدد ثابت است. سری فوق را یک سری توانی به مرکز c می‌نامیم. دنباله $\{a_n\}$ را ضرایب این سری توانی گوییم.

مثال - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$ سری توانی به مرکز $c=0$ است. ضرایب این سری همگی $a_n = 1$ هستند.

برای هر x ثابت این سری توانی یک سری هندسی است که وقتی $|x|<1$ باشد همگرا به $\frac{1}{1-x}$ است.

آزمون نسبت و ریشه برای همگرایی مطلق سری توانی:

آزمون نسبت:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x-c| < 1$$

اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ برای مقادیر x که $|x-c| < \frac{1}{\rho}$ باشد، سری توانی همگرا است و برای $|x-c| > \frac{1}{\rho}$ سری همگرای مطلق نیست.

آزمون ریشه :
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \times |x-c| < 1$$

اگر $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ آنگاه برای $|x-c| < \frac{1}{\rho}$ سری توانی همگرا است

به‌علاوه برای $|x-c| > \frac{1}{\rho}$ سری همگرای مطلق نیست.

قضیه- (وجود شعاع همگرایی) برای هر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

(1) سری تنها برای $x=c$ همگرای مطلق است.

(2) به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ سری همگرای مطلق است.

(3) عدد $0 < R < \infty$ وجود دارد که سری برای مقادیر x که $|x-c| < R$ همگرای مطلق و برای $|x-c| > R$ واگرا است.

به عدد R شعاع همگرایی سری گوییم و بازه $c-R < x < c+R$ را بازه همگرایی سری گوییم.

مثال- $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$ به کمک آزمون ریشه و نسبت هر دو داریم $R = \frac{1}{\rho} = 1$

$|x-2| < 1$: بازه همگرایی

مثال- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^p} \Leftarrow \rho = 1$ و $R = \frac{1}{\rho} = 1$ و $|x-1| < 1$ بازه همگرایی

مثال- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ به کمک آزمون نسبت $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = 0 \Leftarrow R = \infty$ بازای هر x همگرا است.

مثال- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n} \Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(n^2+1)} (x+5/2)^n$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n(n^2+1)}} = \lim 2/3 \times \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} = 2/3 \Rightarrow \text{شعاع همگرایی } R = 3/2$$

$|x+5/2| < 3/2$ بازه همگرایی است.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

فرض کنید R شعاع همگرایی این سری توانی باشد. بنابراین تابع f در بازه $(c-R, c+R)$ تعریف شده است.

قضیه- تابع $f: (c-R, c+R) \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

برای هر $|x-c|<R$.

به علاوه f انتگرال‌پذیر است و برای $x \in (c-R, c+R)$ داریم:

$$\int_c^x f(t)\,dt = a_0(x-c) + \frac{a_1}{2}(x-c)^2 + \frac{a_2}{3}(x-c)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$

مثال – $f(x) = 1+x+x^2+\cdots$ می‌دانیم $f(x)=\frac{1}{1-x}$ که برای $|x|<1$ تعریف شده است.

قضیه آبل: اگر سری توانی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ با شعاع همگرایی R در نقطه $x=c+R$ همگرا باشد (یعنی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ همگرا باشد) آنگاه

$$\lim_{x \to (c+R)^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

به طور مشابه برای نقطه $x=c-R$ اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ همگرا باشد، آنگاه f در $x=c-R$ پیوسته است و

$$\lim_{x \to (c-R)^+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

مثال-
$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$-\ln(1-x) = \int_0^x f(t)\,dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad -1 < x < 1$$

برای $x = 1$ سری بالا واگرا است، اما در $x = -1$ به سری تناوبی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ بنابر آزمون لایب نیتس همگرا است.

بنابر قضیه آبل داریم:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

مثال -

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots \qquad |t|<1$$

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

برای $|x|<1$ برقرار است. برای $x=1$ بنابر آزمون لایبنیتس سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ همگرا است.

بنابر قضیه آبل داریم:

$$\pi/4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$$

نتیجه- اگر بازه همگرایی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ بازه $|x-c|<R$ باشد،

آنگاه تابع f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-c) + \cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\, a_n (x-c)^{n-k}$$

درنتیجه

$$f^{(k)}(c) = k!\, a_k$$

سری تیلور - مک لورن: اگر تابع f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، متناظر آن سری زیر را می‌توان تعریف کرد

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \cdots$$

یادآوری: چندجمله‌ای تیلور یک تابع شبیه همین سری تعریف می‌شد که تا جمله مثلاً m می‌نوشتیم و چندجمله‌ای تیلور مرتبه m را داشتیم.

تعریف - اگر سری تیلور تابع f به مرکز نقطه c در یک همسایگی این نقطه به $f(x)$ همگرا شود، تابع f را در نقطه c تحلیلی گوییم.

مثال - $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

$$\Rightarrow e^x \text{ سری تیلور } = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = g(x)$$

که شعاع همگرایی آن بی‌نهایت است.

$$g'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = g(x)$$

بنابر قضیه باقیمانده لاگرانژ:

$$\left| e^x - \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!}}_{\text{چندجمله‌ای تیلور مرتبه } m} \right| = \left| \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} x^{m+1} \right|$$

$$= \left| \frac{e^c}{(m+1)!} x^{m+1} \right| \qquad 0 < c < x$$

$$\leq \left| \frac{e^x x^{m+1}}{(m+1)!} \right| \longrightarrow 0$$

وقتی $m \to \infty$

تمرین -

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

مثال- تابعی که بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است اما تحلیلی نیست.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \end{cases}$$

به راحتی می‌توان دید که $f^{(k)}(0)=0$.

$$f'(x)=+\frac{1}{x^2}e^{-1/x} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$$

$$f''(x)=(-2x^{-3}+x^{-4})e^{-1/x}$$

بنابراین سری تیلور f در نقطه $x=0$ برابر است

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}0\times x^k=0\neq f(x)$$