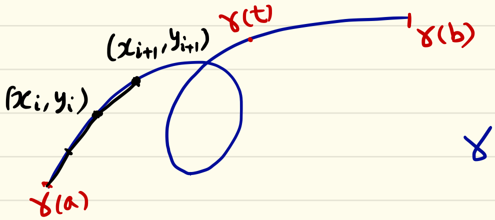
ریاضی عمومی ۱

جلسه بیست و چهارم ۱۴۰۰/۱۰/۴



کاربردهای انتگرال (طول خم)

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

برای محاسبه طول افراز $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b$ در نظر بگیرید،

$$\gamma(t_i) = (x_i, y_i)$$

طول منحنی متناظر با بازه (t_i, t_{i+1}) تقریباً برابر است با طول پاره خط واصل بین دو نقطه (x_i, y_i) و (x_{i+1}, y_{i+1})

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i$$

و مجموع این عبارات یک تقریب برای طول منحنی ارائه می‌کند. درحالتی که این منحنی نمودار یک تابع باشد، یعنی $y=f(x)$ ، و

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

در این صورت طول نمودار برابر است با :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i$$

از طرفی

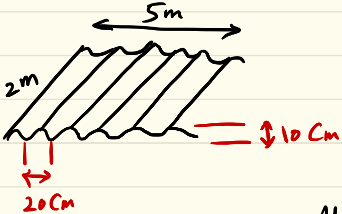
$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = f'(x_i^*)$$

که $x_i^* \in (x_i , x_{i+1})$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+\left(f'(x_i^*)\right)^2}\ \Delta x_i \simeq \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

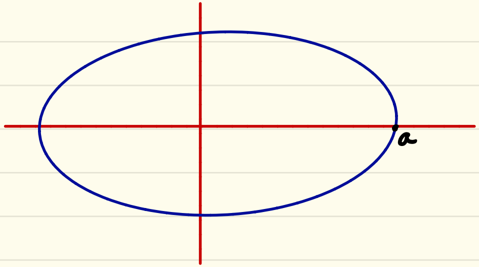
مثال ـ می‌خواهیم یک سقف شیروانی به صورت شکل روبرو درست کنیم .

مساحت ورقی که احتیاج داریم چقدر است.



$$y = \frac{1}{20}\sin(10\pi x)$$

$$\text{طول سقف} = \int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\cos(10\pi x)\right)^2}\ dx$$



مثال ـ محیط بیضی $\quad a \geq b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\text{محیط بیضی} = 4 \times \int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \times \frac{x^2}{a^2-x^2}} = \frac{4}{a}\int_0^a \left(\frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}\right)^{1/2} dx$$

$x = a\sin t$

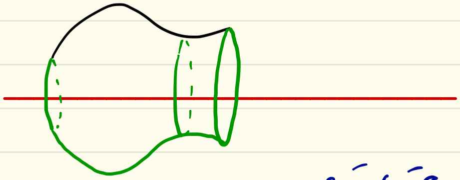
$$= \frac{4}{a}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{a^2 - (a^2-b^2)\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^{1/2} a\cos t\, dt$$

$$= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \underbrace{\frac{a^2-b^2}{a^2}}_{0 \leq \varepsilon^2 < 1} \sin^2 t}\quad dt$$

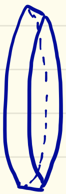
$$= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\quad dt$$

وقتی $\varepsilon > 0$ انتگرال بالا به صورت توابع کلاسیک قابل نمایش نیست. وقتی $\varepsilon = 0$ عبارت بالا $2\pi a$ است که محیط دایره به شعاع $a=b$ است.

مساحت سطح دوران یافته :



نمودار $y=f(x)$ را حول محور x دوران داده‌ایم، مساحت رویه به دست آمده چقدر است؟



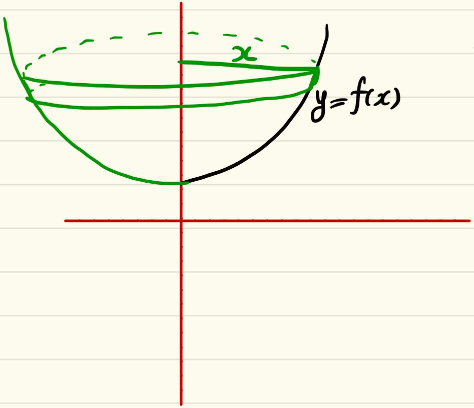
اگر یک افراز بگیریم و مساحت رویه را در قسمت بین $x_i \le x \le x_{i+1}$ محاسبه کنیم

$$2\pi f(x_i) \times \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \approx 2\pi f(x_i) \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \quad \text{مساحت} = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

مثال- سطح کره به شعاع R که از دوران نیم‌دایره $y=\sqrt{R^2-x^2}$ به دست می‌آید.

$$\int_{-R}^{R} 2\pi \sqrt{R^2-x^2} \times \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-R}^{R} 2\pi R\, dx = 4\pi R^2$$



اگر منحنی $y=f(x)$ را حول محور y ها دوران دهیم، آنگاه مساحت

$$\int_a^b 2\pi x \times \sqrt{1+(f'(x))^2}\;dx$$

مثال- $y=x^2$ برای $0 \le x \le 1$ حول محور y دوران دهید.

راه حل اول. $$\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+4x^2}\;dx$$

راه حل دوم $$x=\sqrt{y} \Rightarrow \int_0^1 2\pi\sqrt{y} \times \sqrt{1+\frac{1}{4y}}\;dy$$

دنباله ها

منظور از یک دنباله در مجموعه E تابعی $a: \{k, k+1, k+2, \dots\} \longrightarrow E$ است که باشد

$$a(k) = a_k$$

نمایش داده می‌شود. کل دنباله را با $(a_n)_{n\geq k}$ یا $\{a_n\}_{n\geq k}$ نشان می‌دهیم.

معمولاً مجموعه E اعداد حقیقی یا اعداد مختلط است. k نقطه شروع دنباله است که معمولاً $k=0$ یا $k=1$ است.

مثال - دنباله ثابت $a_n = c$ یعنی برای هر اندیس مقدار دنباله یک عدد ثابت است.

مثال - $a_n = (i)^n$ یک دنباله در مجموعه اعداد مختلط است.

تعریف- دنباله $\{a_n\}_{n\geq k}$ به a^* همگراست اگر برای هر $\varepsilon>0$ مقدار N وجود دارد که

$$\forall \varepsilon\ \exists N \text{ sth. } n\geq N \Rightarrow |a_n - a^*| < \varepsilon$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^* \\ a_n \longrightarrow a^* \end{cases}$$

این تعریف شبیه تعریف همگرایی تابع در بی‌نهایت است. برای تابع f اگر قرار دهیم $a_n = f(n)$ آنگاه

درصورتی که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ آنگاه دنباله a_n نیز به A همگراست.

برعکس آن درست نیست. مثلا $f(x) = \sin(\pi x)$

مثال- $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

$$\forall \varepsilon\ \exists N \text{ sth. } n\geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ کافی است

مثال - $a_n = i^n$ واگرا است. $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \dots$

<u>خواص ابتدایی حد دنباله‌ها</u>: $\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$ ، $\lim_{n\to\infty} b_n = b^*$

① $c_n := a_n + b_n$ آنگاه $c_n \longrightarrow a^* + b^*$

② $d_n = a_n \cdot b_n$ آنگاه $d_n \longrightarrow a^* \cdot b^*$

③ $e_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ اگر $b^* \neq 0$ آنگاه e_n از جایی به بعد (برای n از یک تعداد بزرگتر) تعریف می‌شود و

$$e_n \longrightarrow \frac{a_*}{b_*}$$

تذکر - $\lim b_n = b^* > 0$ آنگاه N وجود دارد که اگر $n \geq N$ آنگاه $b_n > 0$.

④ اگر $z_n = |a_n|$ آنگاه $z_n \longrightarrow |a^*|$

نکته ـ اگر $|a_n|$ همگرا باشد، لزومی ندارد که دنباله a_n همگرا باشد. مثلاً $a_n = (-1)^n$.

اما اگر $|a_n| \longrightarrow 0$ آنگاه $a_n \to 0$ (اثبات: تمرین)

⑤ اگر $a_n \le w_n \le b_n$ و $a^* = b^*$ آنگاه $w_n \longrightarrow a^*$

⑥ هر دنباله همگرا، کران دار است. یعنی مقدار $M > 0$ وجود دارد که $|a_n| \le M$

برعکس این مطلب درست نیست. مثلاً $a_n = (-1)^n$ کران دار است ولی همگرا نیست.

اثبات ـ $a_n \to a^* \Rightarrow \varepsilon = 1 \ \exists N \text{ sth. } n \ge N, \ |a_n - a^*| < \varepsilon = 1$

$$\Rightarrow |a_n| < 1 + |a^*|$$

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a^*|\}$$

7. اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله صعودی از اعداد حقیقی و کراندار باشد، همگرا است.

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq M$$

کاندید حد: $x^* = \sup\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

برای اینکه نشان دهیم $x_n \to x^*$ باید ثابت کنیم

$\forall \varepsilon\ \exists N$ s.th. $n \geq N \Rightarrow |x_n - x^*| < \varepsilon$ یا $x^* - \varepsilon < x_n < x^* + \varepsilon$

چون x^* کوچکترین کران بالای مجموعه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ است نامساوی $x_n < x^* + \varepsilon$ همیشه برقرار است.

اما برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه $x^* - \varepsilon$ نمی‌تواند کران بالای این مجموعه باشد، در نتیجه باید لااقل یک عضو دنباله است مانند x_N

که $x^* - \varepsilon < x_N$. حال صعودی بودن دنباله نتیجه می‌دهد که

$$x^* - \varepsilon < x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq \cdots$$

یا به عبارتی برای $N \leq n$ باید $x^* - \varepsilon < x_n$.