ریاضی عمومی ۱

جلسه بیست و دوم ۱۴۰۰/۹/۲۷

انتگرال ناسره نوع دوم: تابع بیکران و بازه انتگرال کران دار

فرض کنید تابع f روی بازه $(a,b]$ تعریف شده و وقتی $x \to a^+$ تابع $f(x)$ بیکران می‌شود و در هر بازه‌ی $[a+\varepsilon, b]$ تابع کران‌دار است. اگر حد زیر وجود داشته باشد، آن را به عنوان انتگرال تابع روی $(a,b]$ در نظر می‌گیریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

به طور مشابه وقتی تابع روی $[a,b)$ تعریف شده و در نقطه $x=b$ بیکران می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

مثال- $f(x)=\frac{1}{x^p}$ روی $(0,1]$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} [\ln 1 - \ln \varepsilon] & p=1 \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-p}\left[1-\varepsilon^{1-p}\right] & p\neq 1 \end{cases}$$

درحالت $p=1$ حد عبارت بالا وجود ندارد و درنتیجه انتگرال واگرا است.

درحالت $p<1$ مقدار حد برابر $\frac{1}{1-p}$ است و درنتیجه انتگرال همگرا و

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$$

و اگر $p>1$ مقدار حد وجود ندارد و انتگرال بیکران است.

مثال -

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} x\ln x - x\Big|_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\right) = -1$$

مثال -

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

این تابع در دو سر بازه بیکران می‌شود.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\underbrace{x-1}_{u})^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u$$

$$\Rightarrow \quad \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \sin^{-1}(x-1)\Big|_\varepsilon^1 = -\sin^{-1}(\varepsilon-1) \longrightarrow \pi/2$$

$$\int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \sin^{-1}(x-1)\Big|_1^{2-\varepsilon} = \sin^{-1}(1-\varepsilon) \longrightarrow \pi/2$$

آزمون مقایسه:

فرض کنید دو تابع f و g در بازه (a,b) که $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ و روی این بازه داریم $|f(x)| \leq g(x)$

اگر انتگرال $\int_a^b g(x)dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^b f(x)dx$ نیز همگرا است.

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

مثال - بررسی همگرایی: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

در بازه $[1,\infty)$ داریم $f(x) = e^{-x^2} \leq e^{-x} = g(x)$ به علاوه

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^\infty = e^{-1}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx < \infty$$

در بازه $[0,1]$ تابع e^{-x^2} پیوسته و کران دار است. در نتیجه انتگرال پذیر است.

مثال- بدون محاسبه و صرفاً به کمک آزمون مقایسه نشان دهید $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ همگرا است.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2x^{1/2}\Big|_0^1 = 2 < \infty$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \le \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \int_1^0 \frac{-du}{\sqrt{u}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2 < \infty$$

نکته- در بعضی مواقع ترکیب هر دو نوع انتگرال ناسره را داریم. هم تابع بی‌کران است و هم دامنه.

به عنوان مثال $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ که به صورت دو انتگرال مجزای $\int_0^1$ و $\int_1^\infty$ تعریف می‌کنیم، در صورتی که هر دو همگرا باشد، انتگرال همگرا است.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p<1 \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p>1$$

در نتیجه $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ هیچ موقع همگرا نیست.

مثال -
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$$

$$\le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} < \infty$$

تذکر - دقت کنید در آزمون مقایسه تنها در صورتی که تابع انتگرال‌پذیر g را پیدا کنیم، همگرایی $\int_a^b f$ نتیجه خواهد شد. پیدا نکردن تابع g دلیل بر واگرایی f نیست. اما در صورتی که تابع f مثبت باشد و

$$0 \le h(x) \le f(x) \qquad x \in (a,b)$$

و می‌دانیم که $\int_a^b h(x)\,dx$ واگرا است. در این صورت می‌توان گفت که $\int_a^b f$ نیز واگرا است.

مثال -
$$\infty = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2}} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x^3}}$$

تقریب انتگرال :

می‌خواهیم تقریبی از مقدار واقعی انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ را پیدا کنیم.

قبلاً دیدیم که اگر $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ و $c_i\in(x_{i-1},x_i)$

$$R(f,P,c)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

برای سادگی همیشه با افراز زیر کار می‌کنیم :

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$x_i=a+ih \quad , \quad \Delta x_i=h$$

بازه (a,b) را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.

$$y_i=f(x_i)$$

تقریب چپ:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i = h\left(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right)$$

تقریب راست:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = h\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right)$$

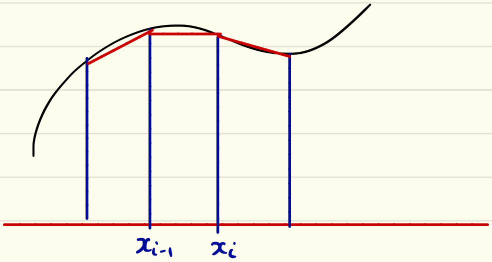
تقریب میانی:

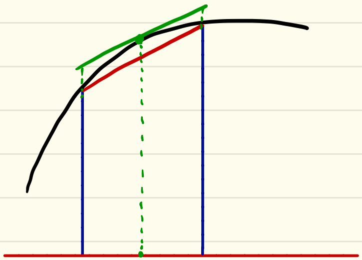
$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x_i = h\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f\left(a+\frac{h}{2}+h\right) + \cdots + f\left(a+\frac{h}{2}+(n-1)h\right)\right]$$

تقریب ذوزنقه:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\,\Delta x_i = \frac{L_n + R_n}{2}$$

$$= h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$





مقایسه تقریب میانی و تقریب ذوزنقه

اگر $f'' < 0$

$$T_n \leq \int_a^b f \leq M_n$$

و برعکس اگر $f'' > 0$

$$M_n \leq \int_a^b f \leq T_n$$

محاسبه خطای تقریب :

$$E_n = \int_a^b f(t)\,dt - L_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(t) - f(x_{i-1})\right) dt$$

بنا بر قضیه مقدار میانگین به ازای هر t داریم:

$$f(t) - f(x_{i-1}) = f'(c)\,(t - x_{i-1})$$

که $x_{i-1} \le c \le t$ است.

اگر بدانیم $|f'(x)| \le K_1$ آنگاه داریم:

$$|f(t) - f(x_{i-1})| \le K_1\,(t - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow |E_n| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) - f(x_{i-1})\, dt \right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t) - f(x_{i-1})|\, dt \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K_1\,(t - x_{i-1})\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{K_1}{2} (x_i - x_{i-1})^2 = \frac{K_1 h^2}{2} \cdot n = K_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$$

مثال - برای محاسبه $\ln 2$ از ترتیب انتگرال $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ استفاده می‌کنیم. برای اینکه مقدار واقعی با خطای 10^{-2} بدست بیاید، از روش ترتیب چپ با چه افرازی این مقدار بدست می‌آید.

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow K_1 = \max_{1 \le x \le 2} |f'(x)| = 1$$

$$\Rightarrow E_n \le \frac{1}{2n} \le 10^{-2}$$

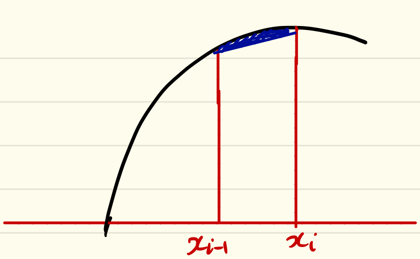
$$\Rightarrow \left| L_{50} - \int_1^2 \frac{dx}{x} \right| \le 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \ln 2 \cong L_{50} = \frac{1}{50} \sum_{i=0}^{49} \frac{1}{1+ih} = \sum_{i=0}^{49} \frac{1}{50+i}$$

$$= \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \cdots + \frac{1}{99}$$

ریاضی عمومی ۱

جلسه بیست و سوم ۱۴۰۰/۹/۲۹



$y = f(x)$

خطای تقریب ذوزنقه :

$$E_n = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \Delta x_i \times \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right|$$

در بازه (x_{i-1}, x_i) مقدار خطا برابر مساحت ناحیه آبی رنگ است.

ابتدا معادله خطی که دو نقطه $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ و $(x_i, f(x_i))$ را به هم وصل می‌کند را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{y - f(x_{i-1})}{x - x_{i-1}} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \Rightarrow y = Ax + B$$

مساحت قسمت آبی رنگ $= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{f(x) - (Ax+B)}_{g(x)} \, dx$

$$g(x_{i-1}) = g(x_i) = 0$$

$$g''(x) = f''(x)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2}(x-x_{i-1})(x-x_i)\,g''(x)\,dx$$

تمرین- با توجه به خاصیت $g(x_{i-1})=g(x_i)=0$ با دوبار انتگرالگیری جزء به جزء رابطه بالا را ثابت کنید.

درنتیجه اگر $|f''(x)| \le K_2$ باشد، آنگاه

$$E_n \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{K_2}{2} \left|(x-x_{i-1})(x-x_i)\right| dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-x_{i-1})^3}{12} K_2$$

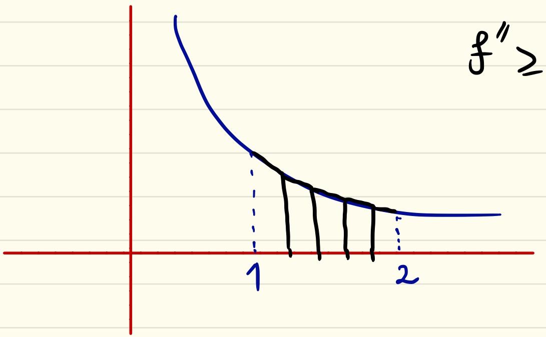
$$= \frac{nh^3}{12} K_2 = \frac{(b-a)^3 K_2}{12 n^2}$$

مثال- $\ln 2$ را با ترتیب ذوزنقه با خطا حداکثر 10^{-2} محاسبه کنید.

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \qquad f(x) = 1/x \ , \quad f''(x) = 2x^{-3} \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad E_n \leq \frac{2}{12n^2} \leq 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad 5 \leq n$$

$$T_5 = \frac{L_5 + R_5}{2} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1+1/5} + \frac{2}{1+2/5} + \frac{2}{1+3/5} + \frac{2}{1+4/5} + \frac{1}{2}\right)$$



$$f'' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad T_5 \geq \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$$

خطای تقریب میانی :

$$E_n=\int_a^b f(x)\,dx - M_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(m_i)\cdot\Delta x_i\right]$$

$$m_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$$

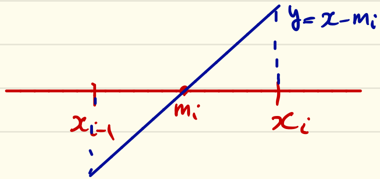
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(x)-f(m_i)\big)\,dx$$

به کمک تقریب خطی f در نقطه m_i داریم :

$$f(x)-\left[f(m_i)+f'(m_i)(x-m_i)\right]=\frac{1}{2}f''(x_i^*)\,(x-m_i)^2$$

که x_i^* یک نقطه بین x و m_i است. اگر $|f''(x)|\le K_2$ آنگاه

$$\left|f(x)-f(m_i)-f'(m_i)(x-m_i)\right|\le\frac{K_2}{2}(x-m_i)^2$$



دقت کنید $\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-m_i)\,dx=0$

$$\Rightarrow \quad E_n \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(m_i)\, dx \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(m_i) - f'(m_i)(x-m_i)\, dx \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| f(x) - f(m_i) - f'(m_i)(x-m_i) \right| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{K_2}{2} (x-m_i)^2\, dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_2}{6} (x-m_i)^3 \Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i}$$

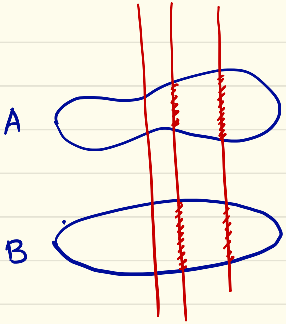
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{K_2}{24} (\Delta x_i)^3 = \frac{K_2}{24} \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

مثال- تقریب $\ln 2$ با روش میانی برای خطای حداکثر 10^{-2} تنها $n \geq 3$ حجم کافی است.

$$T_5 \geq \ln 2 \geq M_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{7} + \frac{6}{9} + \frac{6}{11}\right)$$

کاربردهای انتگرال

① مساحت زیر نمودار

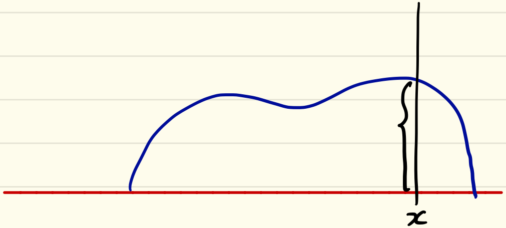


② حجم : **اصل کاوالیری** :

اگر A و B دو ناحیه در صفحه باشند به طوری که

هر خط عمودی دارای این ویژگی باشه که طول اشتراک این خط با هر دو شکل برابر است.

در این حالت مساحت A و B برابر است.

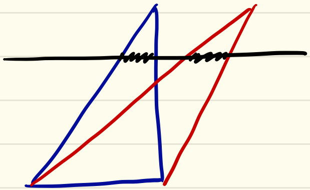


لزومی ندارد که خطوط حتماً عمودی باشند، بلکه اگر یک خانواده موازی

با یک راستای ثابت داشته باشیم با ویژگی بالا مساحت A و B برابر هستند.

در واقع اگر طول اشتراک خطی که از نقطه x می‌گذرد با شکل A برابر $f(x)$ باشه، آنگاه

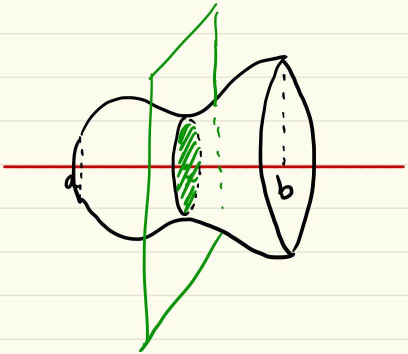
A مساحت $= \int f(x)\, dx$



به طور مشابه برای حجم دو ناحیه A و B می‌توان گفت در صورتی که مساحت اشتراک صفحات موازی با دو ناحیه برابر باشد، حجم دو ناحیه برابر است.

$$\text{حجم} = \int A(x)\,dx$$

که $A(x) =$ مساحت اشتراک صفحه گذرا از نقطه x با ناحیه مورد نظر

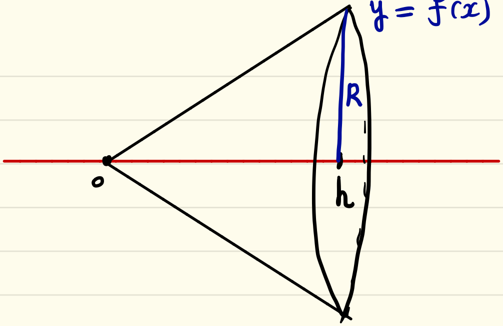


حجم دوران نمودار $y=f(x)$ حول محور xها

اگر از نقطه x صفحه عمود بر محور xها را در نظر بگیریم، اشتراکش با ناحیه مورد نظر یک دایره به شعاع $f(x)$ است. $\Leftarrow A(x)=\pi(f(x))^2$

$$\Rightarrow \quad \text{حجم} = \int_a^b \pi (f(x))^2\,dx$$

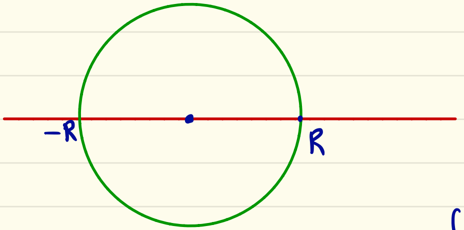
مثال- حجم مخروط



$y = f(x) = \frac{Rx}{h}$

$$\int_0^h \pi\left(\frac{Rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \times \frac{1}{3}h^3 = \frac{\pi}{3}R^2 h$$

مثال- حجم کره



$y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{x=-R}^{R}$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

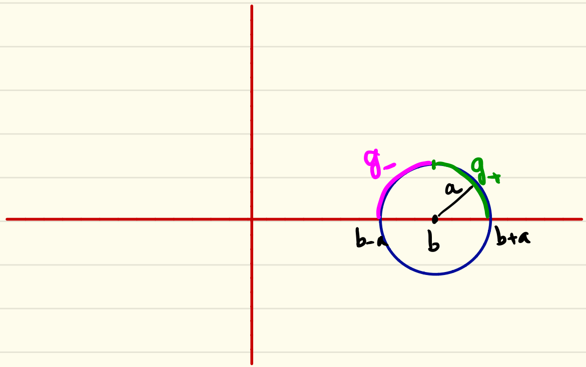
حجم ناحیه به دست آمده از دوران $y=f(x)$ حول محور y ها

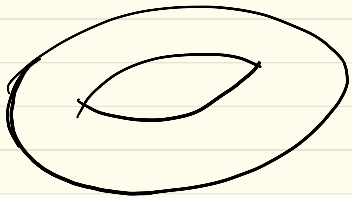
راه حل اول: اگر تابع f وارون پذیر باشد، $g=f^{-1}$ ، نمودار $x=g(y)$ را حول محور y ها دوران داده ایم

حجم آن ش به آنچه در قبل گفتیم برابر

$$\int \pi (g(y))^2 \, dy$$

مثل -



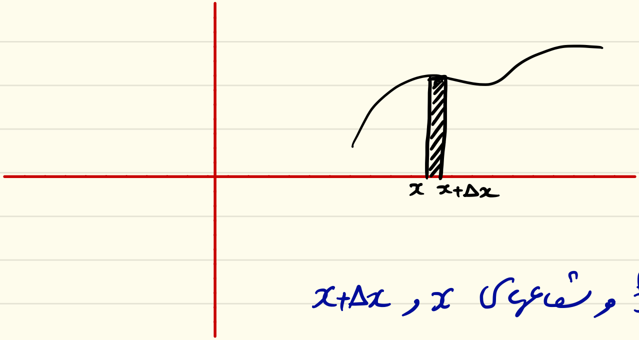


$$(x-b)^2+y^2=a^2 \Rightarrow y=\sqrt{a^2-(x-b)^2}$$

$$x=b\pm\sqrt{a^2-y^2} \begin{cases} g_+(y) \\ g_-(y) \end{cases}$$

$$\int \pi\left[(g_+(y))^2-(g_-(y))^2\right] = \int_0^a \pi \times 2b \times 2\sqrt{a^2-y^2}\, dy = \int_0^{\pi/2} 4b\pi a^2 \sqrt{1-(\sin\theta)^2}\cos\theta \, d\theta$$

$$= a^2 b \pi^2$$



راه حل دوم:

مستطیل به اضلاع $[x, x+\Delta x]$ و ارتفاع $f(x)$ را حول محور y دوران دهیم، ناحیه بین دو استوانه به ارتفاع $f(x)$ و شعاع‌های x و $x+\Delta x$ خواهد بود. حجم این ناحیه برابر است با

$$\pi\left[(x+\Delta x)^2 - x^2\right] \times f(x) = \pi \Delta x (2x+\Delta x) \times f(x)$$

$$= 2\pi x f(x) \Delta x + \pi f(x) (\Delta x)^2$$

$$\cong 2\pi x f(x) \Delta x \qquad \text{برای } \Delta x \text{ خیلی کوچک}$$

$$\text{حجم کل ناحیه} = 2\pi \int x f(x)\, dx$$

مثال چنبره:

$$\text{حجم چنبره} = 2\int_{b-a}^{b+a} 2\pi x \sqrt{a^2-(x-b)^2}\, dx = 2\int_{-a}^{a} 2\pi (u+b) \sqrt{a^2-u^2}\, du$$

$$= 2a^2 b \pi^2$$