ریاضی عمومی ۱

جلسه پانزدهم

۱۴۰۰/۹/۱

کاربردهای مشتق (قاعده هوپیتال)

قضیه- فرض کنید توابع f و g روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر هستند، به علاوه

$$(i) \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$$

$$(ii) \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

در این صورت $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

تذکر- هر چند صورت قضیه حد از راست در نقطه a را بیان کرده که توابع f و g در سمت راست تعریف شده اند، به طور مشابه در حالتی که توابع در سمت چپ نقطه b تعریف شده اند، برای محاسبه $\displaystyle\lim_{x\to b^-}$ نتیجه برقرار است. همچنین در حالتی که توابع f و g در همسایگی نقطه ای مانند $c\in(a,b)$ تعریف شده باشند، نتیجه به ازای $\displaystyle\lim_{x\to c}$ برقرار است.

مثال -

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

شرایط هوپیتال

$$(i) \quad \lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

مثال -

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - 1 - \tan^2 x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} (\cos x)^2 \times \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{-\sin^2 x} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-2\sin x \cos x} = -\frac{1}{2}$$

تذکر- اگر $\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ که حد $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد، باز اگر

شرط دوم هوپیتال یعنی وجود حد $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ برقرار باشد، نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

تذکر- در تمام موارد بالا می‌تواند یک عدد متناهی یا مقدار بی‌نهایت $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.

مثال- $0 < a$

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-a}} \quad \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{a} x^{a} = 0$$

مثال-

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^0 = 1$$

تذکر- در تمام موارد قبل می‌توان قاعده هوپیتال را برای محاسبه حد در بی‌نهایت استفاده کرد.

$$x \to \infty \quad , \quad t = \frac{1}{x} \to 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t) \times -1/t^2}{g'(1/t) \times -1/t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$ حل -

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \sin \tfrac{3}{x}\right)^x = e^3$$ حل -

$$\lim_{x\to\infty} \ln \left(1+\sin \tfrac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\sin \tfrac{3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\sin \tfrac{3}{x}\right)}{\tfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sin 3/x} \cos \tfrac{3}{x} \times \left(-\tfrac{3}{x^2}\right)}{-\tfrac{1}{x^2}} = 3$$

در مثال زیر می‌بینیم که چرا بررسی شرط دوم هوپیتال مهم است.

مثال-

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{\sin x} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 1/x-\cos 1/x}{\cos x} = \text{حد وجود ندارد}$$

چون حد $\frac{f'}{g'}$ وجود ندارد این تساوی برقرار نیست.

به راحتی می‌توان دید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x\sin 1/x = 0$$

کاربردهای مشتق (بهینه سازی)

تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم اگر f پیوسته باشد ماکزیمم و مینیمم خود را در بازه $[a,b]$ می‌گیرد. یعنی نقاط x_m و $x_M \in [a,b]$ وجود دارند که

$$f(x_M) = \max_{a\le x\le b} f(x) \qquad f(x_m) = \min_{a\le x\le b} f(x)$$

به دنبال راه حلی هستیم تا نقاط x_m و x_M را پیدا کنیم.

تعریف- نقطه x_0 را مینیمم موضعی (ماکسیمم موضعی) برای تابع f گوییم هرگاه در یک همسایگی $|x-x_0|<h$ داشته باشیم

$$f(x_0) = \min_{\substack{x_0-h<x<x_0+h \\ x\in[a,b]}} f(x)$$

قبلاً دیدیم که اگر f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد، باید $f'(x_0)=0$.

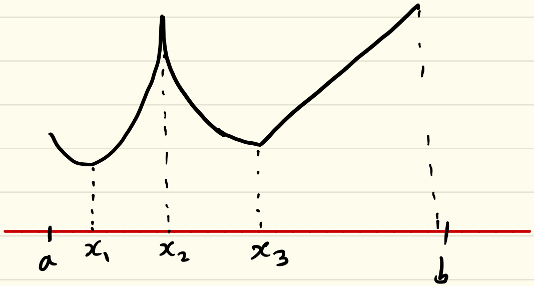
دقت کنید که اگر $f'(x_*)=0$ در نقطه x_* ، لزوماً x_* ماکسیمم یا مینیمم موضعی نیست. همه نقاطی که مشتق در آنجا صفر است را نقطه بحرانی می‌نویسیم.

درنتیجه برای پیدا کردن نقاط اکسترمم (مینیمم یا ماکسیمم موضعی) تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ کاندیدهای زیر را در نظر بگیریم:

(i) نقاط بحرانی، نقاطی که $f'(x)=0$

(ii) نقاط مرزی، نقاط a و b. یا نقاطی که تابع در همسایگی آن تعریف شده است.

(iii) نقاط تکین، نقاطی که تابع در آنجا مشتق‌پذیر نیست.



x_3 و x_2 نقاط تکین هستند.

x_1 نقطه بحرانی

مثال ـ $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ در بازه $-2\le x\le 2$ ماکسیمم و مینیمم آن را پیدا کنید.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x=3,-1$$

چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، نقطه تکین نداریم و لذا کاندیداهای مورد نظر برای نقاط اکسترمم

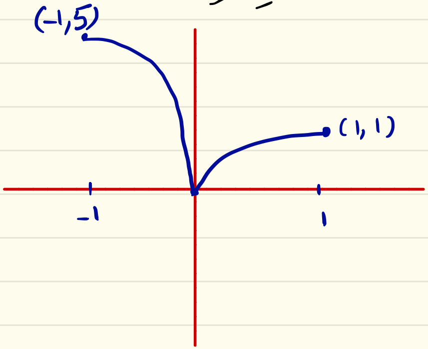
نقاط مرزی: $-2,2 \Rightarrow f(-2)=0\ ,\ f(2)=-20$

نقاط بحرانی: $\cancel{3},-1 \Rightarrow f(-1)=7$

در بازه $[-2,2]$ قرار ندارد.

در نتیجه ماکسیمم تابع در بازه $[-2,2]$ در نقطه -1 و مینیمم در نقطه مرزی 2.

مثال - $g(x) = 3x^{2/3} - 2x$ روی بازه $[-1,1]$ ماکسیمم یا مینیمم مطلق را پیدا کنید.



$$g'(x) = 2x^{-1/3} - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

g در همه جا مشتق‌پذیر است به غیر از $x = 0$.

نقاط تکین: $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

نقاط مرزی: $x = 1, -1$

در نتیجه $x = -1$ نقطه ماکسیمم و $x = 0$ نقطه مینیمم

سؤال: از بین کاندیداهای مختلف چگونه می‌توان فهمید که یک نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی است؟

مثال- $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$

$f(0) = -3, \quad f(\pm 1) = -4$

اگر x_0 یک نقطه تکین یا بحرانی باشد که برای $x_0 - h < x < x_0$، $f' > 0$ (برای یک مقدار h) و برای $x_0 < x < x_0 + h$، $f' < 0$ در این صورت x_0 ماکسیمم موضعی است.

برعکس اگر در سمت راست $f' > 0$ و در سمت چپ نقطه x_0 داشته باشیم $f' < 0$ آنگاه x_0 مینیمم موضعی است.

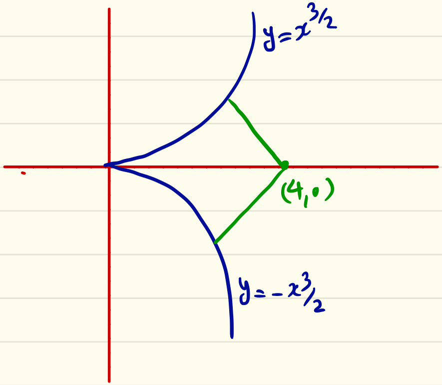
به طور مشابه می‌توان بررسی کرد که نقاط مرزی a و b نیز کدام ماکسیمم و کدام مینیمم موضعی‌اند.

تذکر- اگر تابع روی بازه باز (a,b) پیوسته باشد، در این صورت نقاط a و b را جزو کاندیدهای نقاط اکسترمم در نظر نگیریم و به جای $f(a)$, $f(b)$ مقادیر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

را در نظر می‌گیریم.

همچنین اگر بازه (a,b) از یک طرف یا دو طرف بیکران باشد، حالتهای حدی $x \to \pm\infty$ به عنوان نقاط مرزی باید بررسی شوند.



مثال- نزدیکترین نقطه منحنی $y^2 = x^3$ به $(4,0)$ را پیدا کنید.

باید می‌نیمم تابع $f(x) = (x-4)^2 + y^2 = (x-4)^2 + x^3$ را روی $[0,+\infty)$ پیدا کنیم.

$$f'(x) = 2(x-4) + 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm 5}{3}.$$

تنها نقطه بحرانی $x = 4/3$ است. نقطه تکین نداریم. نقاط مرزی 0 و $+\infty$ است.

$f(0)=16$, $f(\infty)=\infty$

$f(4/3)$