

ریاضی عمومی ۱

۱۴۰۱/۸/۲۹

جلسه چهاردهم

کاربردهای مشتق : یافتن ریشه (روش نیوتن)

هدف : پیدا کردن جواب معادله $f(x) = 0$

اگر x_0 یک تقریب از این ریشه باشد، تقریب خطی تابع f در نزدیکی نقطه x_0 را جایگزین f در معادله بالا می‌کنیم

$$0 = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

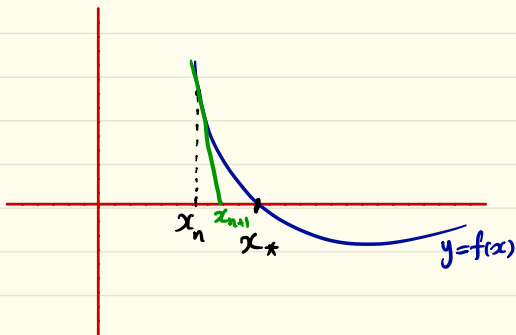
باطل این معادله مقدار x را پیدا می‌کنیم

$$\Rightarrow x - x_0 = - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بدین ترتیب تقریب بهتری برای ریشه $f(x) = 0$ به دست می‌آید :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

با تکرار این روش دنباله نقاط $x_0, x_1, x_2, \dots$ می‌دهیم شود که به این ریشه همگرا است.



$$x_0, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

اگر به نمودار تابع f نگاه کنیم، مانتدین است
که مماس بر نمودار در نقطه $(x_n, f(x_n))$ را رسم کرده
و محل تلاقی آن با محور x را نقطه x_{n+1} بگیریم

قضیه - اگر توابع f, f', f'' در بازه I پیوسته باشند و بازه I شامل نقطه $x=r$ از ریشه $f(x)=0$ باشد.

بعده و ثابتی K و L وجود داشته باشند که

$$|f''(x)| \leq K \quad (i)$$

$$|f'(x)| \geq L \quad (ii)$$

اگر دنباله بازگشتی x_n به روش نیوتن ساخته شود، آنگاه

$$(a) \quad |x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_{n+1} - x_n|^2$$

$$(b) \quad |x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_n - r|^2$$

$$x^3 = x + 1 \quad - \text{مسئله}$$

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

$$f(1) = -1, \quad f(2) = 5$$

به دنبال یک ریشه این معادله در بازه $I = [1, 2]$ هستیم.

$$x_0 = 1.5, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1}$$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.5	0.875
1	1.34782	0.100682...
2	1.3252...	0.002058...
3	1.324718	0.000000924...
4	1.324717	0.000000000000...

نکته - زمان توقف الگوریتم بر حسب تویب در دلتا در $f(x_n)$ است. مثلاً برای تویب $\epsilon = 10^{-10}$ دنباله بازگشتی را تا زمانی ادامه می‌دهیم که $|f(x_n)| < \epsilon$ باشد. در مثال قبل x_4 این تویب را برای خطای 10^{-10} ارایه می‌کند.

اگر به سوال قبل - $f'(x) = 3x^2 - 1$ ، $f''(x) = 6x$ در بازه $I = [1, 2]$ داریم

$$|f''(x)| \leq K = 12$$

$$|f'(x)| \geq L = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_{n+1} - r| \leq 3 |x_{n+1} - x_n|^2 \\ |x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_n - r|^2 = 3 |x_n - r|^2 \end{cases}$$

اگر بخواهیم ریشه را با تویب 10^{-5} پیدا کنیم، یعنی $|x_n - r| \leq 10^{-5}$

$$f(5/4) < 0, \quad f(7/4) > 0$$

$$|x_0 - r| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |x_1 - r| \leq 3|x_0 - r|^2 \leq \frac{3}{16}$$

$$|x_2 - r| \leq 3|x_1 - r|^2 \leq 3 \times \left(\frac{3}{16}\right)^2 = \frac{3^3}{2^8}$$

$$|x_3 - r| \leq 3|x_2 - r|^2 \leq 3 \times \frac{3^6}{2^{16}}$$

$$|x_n - r| \leq 3 \times \left(\frac{3}{16}\right)^{2^{n-1}} < 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2^{n-1}} < 10^{-5} \Rightarrow (2^{n-1}) > \frac{5}{\log_{10} 5} > \frac{5}{0.7} > 7$$

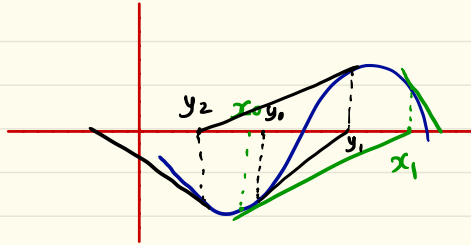
$$\Rightarrow n > 4 \Rightarrow |x_5 - r| < 10^{-5}$$

$$|x_n - r| \leq \frac{2L}{K} \times \left(\frac{K}{2L} \alpha\right)^{2^n}$$

تذکرہ: از قضیہ قبل نتیجه می شود

که $\alpha = |x_0 - r|$. بنابراین برای هر α باید $\frac{K}{2L} \alpha < 1$.

تذکر - انتخاب نقطه شروع در الگوریتم نیوتن ضعیف است. به عنوان مثال روبرو را ببینید:

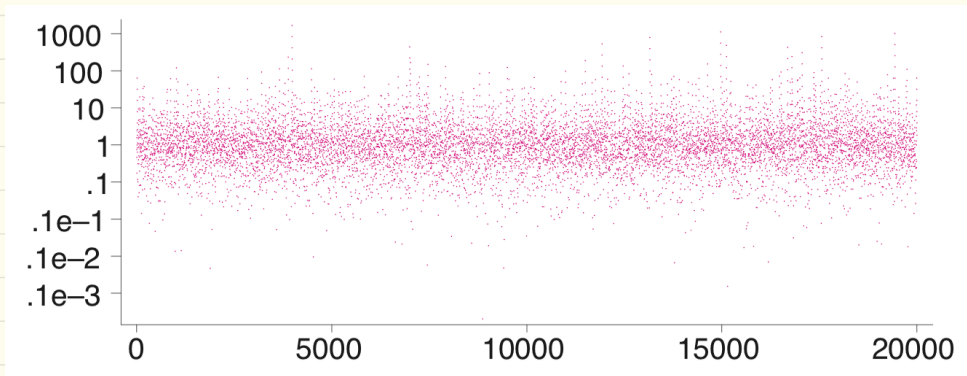


از نقطه آغازین مناسب انتخاب نشود، دنباله سافت نشود.
مکن است کلاً نابینا یا اینکه به ریشه دیگری همگرا شود.

تذکر - برای استفاده از روش نیوتن ضعیف است که مطمئن باشیم تابع ریشه دارد و یک بازه تقب اولیه داشته باشیم.

$$\begin{aligned} \text{مثال - } f(x) &= x^2 + 1 \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 + 1}{2x_n} = \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} \end{aligned}$$

(دنباله x_n با 20000 مرتبه تکرار با نقطه آغازین $x_0 = 2$ در نمودار صفحه بعد ترسیم شده است)



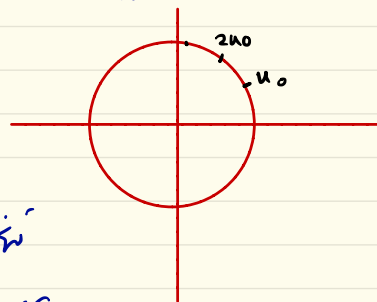
در شکل بالا محدوده n را نشان می‌دهد. همانطور که می‌بینید x_n نسبتاً همگراست بلکه پراکندگی نقاط آن بسیار زیاد است.
اگر تغییر متغیر زیر را در نظر بگیریم

$$y_n = \frac{1}{1+x_n^2} \Rightarrow y_{n+1} = 4y_n(1-y_n)$$

$$y_n = (\sin u_n)^2 \Rightarrow \sin u_{n+1} = \sin 2u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 2u_n \Rightarrow u_n = 2^n u_0$$

$$y_n = (\sin(2^n u_0))^2$$



نمونه‌ی کلی است که $u_0 = \frac{\pi}{2^k}$ باشد. در غیر این صورت دنباله جزء اعشاری $\{\frac{u_n}{2\pi}\}$ درجه‌ها بازه $(0, 2\pi)$ حلال خواهد بود. به طور مثال دنباله x_n را به بهترین می‌تواند یا اینکه

به طور مثال تکرار شود.

این مثلثان در حد که اگر $f(x) = 0$ می‌نماید، دنباله بازگشتی که از روش نیوتن می‌سازیم ممکن است وضعیت آشوبناک داشته باشد.

تذکره - روش نیوتن را می‌توان به گونه‌ای اصلاح کرد که برای ریشه‌های مختلط نیز کار کند. در حقیقت دنباله

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

را در مجموعه اعداد مختلط تعریف کنیم و نقطه شروع باید در مجموعه اعداد مختلط نزدیک ریشه باشد.

نماین - $z_n = a_n + ib_n$ و دنباله‌ها بازگشتی a_{n+1} و b_{n+1} را برای معادله $x^2 + 1 = 0$ بنویسید.