ریاضی عمومی ۱

جلسه سیزدهم

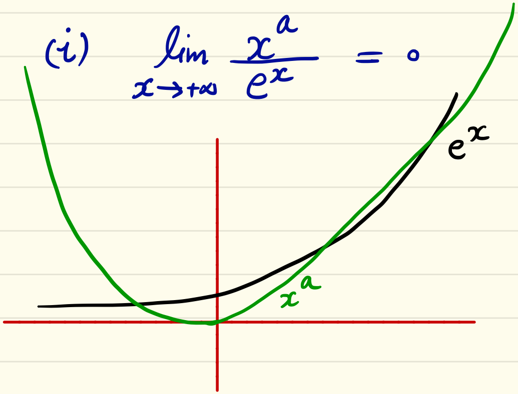
۱۴۰۰/۸/۲۴

رشد توابع نمایی و لگاریتم

اگر $a>0$ یک عدد حقیقی مثبت دلخواه باشد:

(i) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

رشد تابع نمایی سریعتر از هر چندجمله‌ای است



(ii) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

رشد لگاریتم از هر چندجمله‌ای کندتر است. (یا هر چندجمله‌ای ولو با توان خیلی کوچک از لگاریتم رشدش بیشتر است)

(iii) $$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$$

(iv) $$\lim_{x\to0^+} x^a \ln x = 0$$

در نزدیکی نقطه صفر نزول چندجمله‌ای خیلی سریعتر از لگاریتم است.

این چهار رابطه با هم معادل هستند:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^x} = 0 \quad , \quad b = \frac{1}{a}$$

$$x = \ln y \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{y\to\infty} \frac{(\ln y)^b}{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y^a} = 0$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \quad \overset{x=-y}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{y\to-\infty} \frac{|y|^a}{e^{-y}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{y\to-\infty} |y|^a e^y = 0$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad \overset{x=1/y}{\Longleftrightarrow} \quad 0 = \lim_{y\to0^+} \frac{\ln 1/y}{(1/y)^a} = \lim_{y\to0^+} y^a(-\ln y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{y\to0^+} y^a \ln y = 0$$

لم- اگر $x>0$ ، داریم $\ln x \leq x-1$

$$g(x) = \ln x - x + 1 \quad , \quad g(1) = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

برای $x>1$ داریم $g'(x) \leq 0$ و درنتیجه g روی $(1,\infty)$ نزولی است.

$$\Rightarrow \quad g(x) \leq g(1) = 0 \qquad x>1$$

برای $x<1$ داریم، $g'(x) \geq 0$ و درنتیجه g روی $(0,1)$ صعودی است

$$\Rightarrow \quad g(x) \leq g(1) = 0 \qquad 0<x<1$$

اثبات $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$

در نامساوی صفحه قبل بجای x قرار دهید x^s :

$$s\ln x = \ln x^s \leq x^s - 1 < x^s$$

$$\Rightarrow \quad \ln x < \frac{1}{s} x^s \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln x}{x^a} < \frac{1}{s}\frac{x^s}{x^a} = \frac{1}{s\,x^{a-s}}$$

اگر $s<a$ باشد مثلاً $s = a/2$ نتیجه خواهد شد که $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{a-s}} = 0$ و در نتیجه بنابر قضیه ساندویچ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

مدل‌های جمعیتی:

اگر جمعیت یک گونه در زمان n با y_n نشان دهیم. تعداد یک واحد زمانی مقدار جمعیت یک کسری از y_n به آن اضافه یا کم شده است.

$$y_{n+1} = y_n + \alpha y_n = (1+\alpha) y_n$$

نرخ رشد در واحد زمانی

اگر نرخ رشد مستقل از جمعیت باشد، برای هر میزان جمعیت تعداد یک واحد زمانی α برابر آن به جمعیت اضافه (یا کاسته اگر $\alpha<0$) می‌شود.

اگر به عنوان مثال واحد زمانی یک سال باشد، به طور متوسط تغییر جمعیت در هر ماه برابر $\frac{\alpha}{12} y_n$ است.

$$y_{n+\frac{1}{12}} = y_n + \frac{\alpha}{12} y_n = \left(1+\frac{\alpha}{12}\right) y_n$$

$$y_{n+\frac{2}{12}} = \left(1+\frac{\alpha}{12}\right) y_{n+\frac{1}{12}} = \left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^2 y_n$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} = \left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12} y_n$$

در مدل دوم نرخ رشد سالانه برابر

$$\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}-1=\alpha+\binom{12}{2}\left(\frac{\alpha}{12}\right)^{2}+\cdots>\alpha$$

$$(a+b)^{12}=a^{12}+12a^{11}b+\binom{12}{2}a^{10}b^{2}+\cdots$$

اگر بازه زمانی را به k قسمت تقسیم کنیم و بازای هر قسمت تغییر جمعیت با رشد $\frac{\alpha}{k}$ در نظر بگیریم

$$y_{t+\frac{1}{k}}=\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)y_t \Rightarrow y_{n+1}=\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)^{k}y_n$$

$$\Delta t=\frac{1}{k} \Rightarrow y(t+\Delta t)=(1+\alpha\Delta t)\,y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\alpha\, y(t)$$

می‌توان در حالت تقریبی سمت چپ را $y'(t)$ در نظر گرفت.

$$y'(t) = \alpha y(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t} y(t)\right) = \left(\frac{d}{dt} e^{-\alpha t}\right) y(t) + e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} y(t)$$

$$= -\alpha e^{-\alpha t} y(t) + e^{-\alpha t} \alpha y(t) = 0$$

$\Rightarrow$ ثابت است $e^{-\alpha t} y(t)$ $\Rightarrow$ $e^{-\alpha t} y(t) = y(0)$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\alpha t} y(0)$$

گزاره ـ $$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)^k = e^{\alpha}$$

اثبات ـ معادل این است که

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)^k = \alpha$$

$$\parallel$$

$$\lim_{k\to\infty} k \ln\left(1+\underbrace{\frac{\alpha}{k}}_{h}\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\alpha}{h}\left[\ln(1+h)-\ln 1\right]$$

$$= \alpha \left.\frac{d}{dt}\ln(t)\right|_{t=1} = \alpha$$

تذکر ـ در مدل‌های دقیق‌تر نرخ رشد را می‌توان وابسته به جمعیت در نظر گرفت. در این مدل‌ها نرخ رشد α، تابعی از جمعیت در لحظه t است.

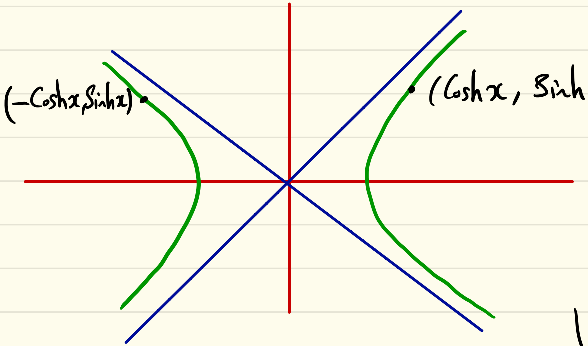
$$y'(t) = \alpha(y(t))\, y(t)$$

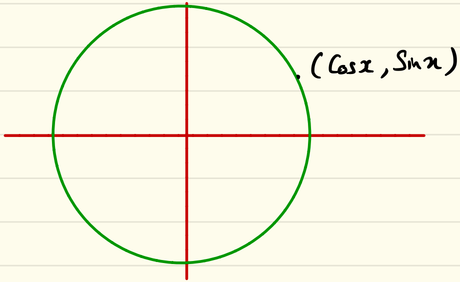
مثلاً در مدل لجستیک α تابعی خطی و نزولی نسبت به y است. یعنی $\alpha(y) = M - Ky$. با حل این معادله می‌توان دید که $0 \le y(t) \le \frac{M}{K}$ است به شرط آنکه $y(0)$ در این بازه باشد.

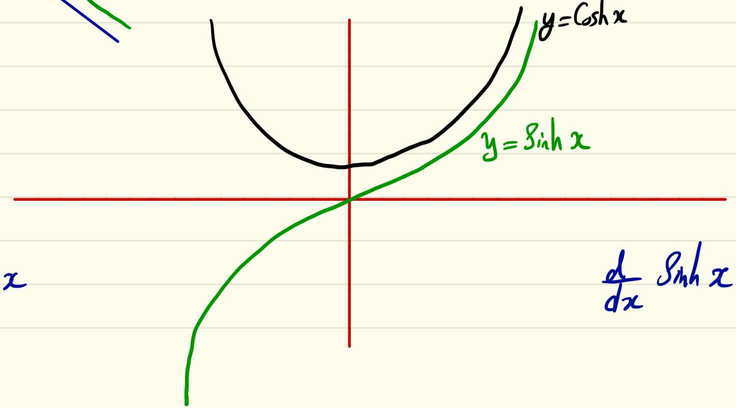
توابع هذلولوی

$$\cosh x := \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \qquad\qquad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$







$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \qquad\qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

تمرین -

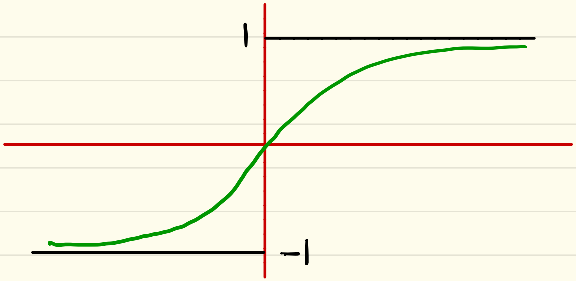
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh 2x = (\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 = 2(\cosh x)^2 - 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2} > 0$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$y = \sinh^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x = \sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2y} - 2x e^{y} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{y} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

چون e^y همیشه مثبت است نمی‌توان علامت منفی را در تساوی بالا در نظر گرفت.

$$e^{y} = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sinh(\sinh^{-1} x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

تمرین - $\cosh^{-1} x$ ، $\tanh^{-1} x$ ، $\coth^{-1} x$ و مشتقات آنها را محاسبه کنید.