# ریاضی عمومی ۱

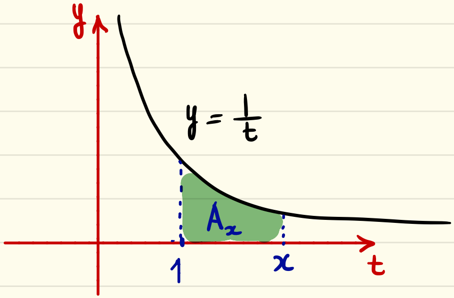
۱۴۰۰/۸/۲۲

جلسه دوازدهم

مثال - $2^x = 3^{x-1} \Leftarrow x-1 = \log_3(2^x) = x\log_3 2$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{1-\log_3 2} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}$$

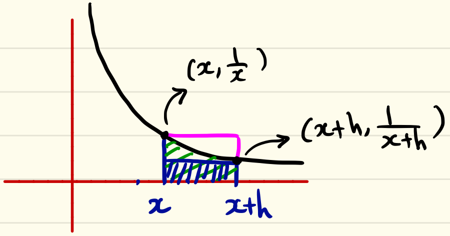
## لگاریتم طبیعی :




$A_x =$ مساحت زیر نمودار تابع $y=\frac{1}{t}$ برای مقادیر t بین یک و $x$

$$\ln x = \begin{cases} A_x & x \geq 1 \\ -A_x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

قضیه- $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$




برای $0<h$

مساحت هاشور خورده $= \ln(x+h) - \ln x$

این ناحیه بزرگتر از مستطیل $[x, x+h] \times [0, \frac{1}{x+h}]$

و کوچکتر از مستطیل $[x, x+h] \times [0, \frac{1}{x}]$

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{x+h} \leq \ln(x+h) - \ln x \leq \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x+h} \leq \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \leq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

تمرین - نشان دهید

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

قضیه - $x, y > 0$

(i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(ii) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

(iii) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

(iv) $\ln x^r = r \ln x \qquad r \in \mathbb{Q}$

اثبات - برای یک مقدار ثابت $y > 0$ ، تعریف کنید

$$f(x) := \ln xy - \ln x$$

$$f(1) = \ln y - \ln 1 = \ln y$$

$$f'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$$

در نتیجه $f$ یک تابع ثابت است و

$$f(x) = f(1) = \ln y$$

(ii) و (iii) به راحتی از (i) نتیجه می‌شوند.

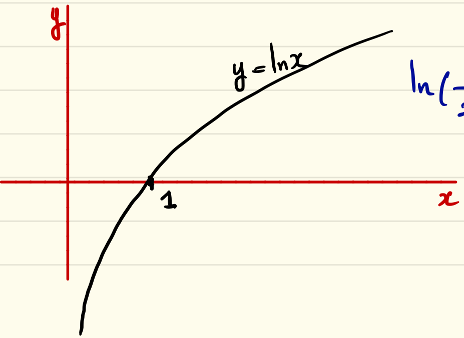
وقتی $r \in \mathbb{Q}$ رابطه (iv) نیز از (i) نتیجه می‌شود ولی حکم به (i) می‌توان اثبات جداگانه ارائه داد.

$$g(x) = \ln x^r - r \ln x \, , \qquad g(1) = \ln 1 - r \ln 1 = 0$$

$$g'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^r)}{x^r} - r \times \frac{1}{x} = \frac{r x^{r-1}}{x^r} - \frac{r}{x} = 0$$

نکته- واضح است که تابع $\ln x$ یک تابع صعودی است و از رابطه (iv) می‌توان دید که

$$\ln 2^n = n \ln 2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$$




$$\ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = -\ln 2^n \longrightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

نکته - دامنه تابع ln بازه $(0,\infty)$ است. برای توسیع این دامنه به مجموعه اعداد حقیقی تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$\ln|x| \quad , \quad x\neq 0$$

و به راحتی می‌توان دید که $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ و در نتیجه $\ln|x|$ یک تابع اولیه برای تابع $\frac{1}{x}$ است.

مثال -

$$\frac{d}{dx}\ln|\cos x| = \frac{1}{\cos x}\times\frac{d}{dx}\cos x = -\tan x$$

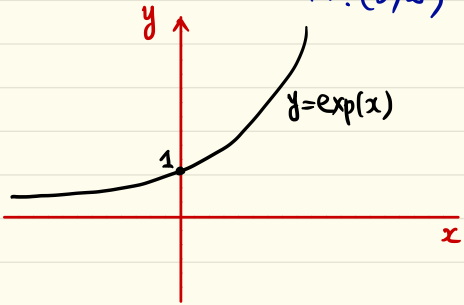
$$x \longrightarrow y=\cos x \longrightarrow z=\ln|y|$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\times\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\times(-\sin x)$$

**تابع نمایی:** چون تابع $\ln x$ یک تابع صعودی است، وارون‌پذیر است و وارون آن را با $\exp$ نشان می‌دهیم.

$$y=\exp(x) \iff x=\ln y$$

$$\ln:(0,\infty)\longrightarrow(-\infty,+\infty)\quad,\quad \exp:(-\infty,+\infty)\longrightarrow(0,\infty)$$




و نمودار تابع $\exp$ قرینهٔ نمودار $\ln$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

به طور طبیعی از ویژگی‌های $\ln$ نتیجه می‌شود که

$(i)\quad \exp(0)=1\quad,\quad (ii)\quad \exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$

$(iii)\quad \exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

$(iv)\quad \exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

$(v)\quad (\exp(x))^r=\exp(rx)\qquad r\in\mathbb{Q}$

$e = \exp(1)$ به عدد نپر معروف است و $e = 2.718281\ldots$

در مطالب بعد خواهیم دید که

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

برای سادگی می‌نویسیم: $\exp(x) = e^x$

دقت کنید از خاصیت (ii) نتیجه می‌شود

$$\exp(2) = \exp(1).\exp(1) = e.e = e^2$$

$$\exp(3) = \exp(2).\exp(1) = e^2.e = e^3$$

به همین ترتیب برای هر عدد طبیعی $n$ داریم $\exp(n) = e^n$ و بنابر خاصیت (iii)

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

و خاصیت (v) نشان می‌دهد که برای هر عدد گویای $r \in \mathbb{Q}$ داریم

$$\exp(r) = e^r$$

بنابراین رابطه $\exp(x) = e^x$ برای اعداد گویای $x \in \mathbb{Q}$ با تعریف تابع نمایی $e^x$ سازگار است.

وقتی $x$ یک عدد گنگ است، مطابق تعریف تابع نمایی داریم:

$$e^x \underset{\text{تعریف تابع نمایی}}{=} \sup\{e^r : x > r \in \mathbb{Q}\} = \sup\{\exp(r) : x > r \in \mathbb{Q}\} \stackrel{?}{=} \exp(x)$$

خاصیت صعودی بودن و پیوستگی تابع exp (که از صعودی بودن و پیوستگی تابع ln به ارث برده می‌شود) نتیجه می‌دهد که کوچکترین کران بالای مجموعه فوق $\exp(x)$ است.

تذکر- از خاصیت پیوستگی تابع exp نتیجه می‌شود که رابطه (۷) برای هر $r \in \mathbb{R}$ دلخواه برقرار است.

$$\begin{gathered}[\exp(x)]^r = \exp(rx) \\ \| \\ \sup\{(\exp(x))^s \mid r > s \in \mathbb{Q}\} = \sup\{\exp(sx) \mid r > s \in \mathbb{Q}\}\end{gathered}$$

$$y = e^{x} \Rightarrow x = \ln y \Rightarrow 1 = \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y = e^{x} \Rightarrow \frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}$$

تمرین - بدون در نظر گرفتن مباحث امروز، تابع $g$ را تابعی در نظر بگیرید که دو خاصیت زیر را دارد:

$$g'(x) = g(x) \quad , \quad g(0) = 1$$

نشان دهید خواص تابع $\exp(x)$ را دارد و تابع وارون $g$ خواص $\ln$ را دارد.

اکنون می‌توانیم مشتق توابع $a^{x}$ و $x^{r}$ را محاسبه کنیم وقتی $a, r \in \mathbb{R}$.

$$a^{x} = [\exp(\ln a)]^{x} = (e^{\ln a})^{x} = e^{x \ln a}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} a^{x} = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \times \frac{d}{dx}(x \ln a) = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \times a^{x}$$

$$\frac{d}{dx}x^r = \frac{d}{dx}e^{r\ln x} = e^{r\ln x}\times\frac{d}{dx}(r\ln x) = e^{r\ln x}\times\frac{r}{x} = \frac{x^r}{x}\times r = r\,x^{r-1}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a^x =$$

$$y = \log_a^x \Longrightarrow x = a^y \Longrightarrow 1 = \frac{d}{dy}a^y\times\frac{dy}{dx} = \ln a\times a^y\times\frac{dy}{dx}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln a} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\log_a^x = \frac{1}{x\ln a}$$

نکته- از رابطه $\exp(x) = e^x$ و اینکه $\ln$ تابع وارون $\exp$ است نتیجه می‌شود که $\ln x = \log_e^x$

در نتیجه رابطه

$$\log_a^x = \frac{\log_e^x}{\log_e^a} = \frac{\ln x}{\ln a} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\log_a^x = \frac{1}{x\ln a}$$

مثال -

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \frac{d}{dx}\, e^{\overbrace{g(x)\ln(f(x))}^{u}}$$

$$= \frac{d}{du} e^{u} \times \frac{du}{dx} = e^{u} \times \left[ g'(x)\ln f(x) + g(x) \times \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

$$= \left(f(x)\right)^{g(x)} \times \left[ g'(x)\ln f(x) + g(x) \times \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$