ریاضی عمومی ۱

۱۴۰۰/۸/۱۷

جلسه یازدهم

تعریف- تابع اولیه تابع f در بازه I تابعی مانند F است که $F'(x) = f(x)$ برای هر $x \in I$.

مثال- برای تابع ثابت $f(x)=1$ تابع اولیه $F(x) = x$ را دارد.

برای تابع $f(x)=x$ تابع اولیه $F(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ را داریم. و همچنین $F(x) = -\cos x$ تابع اولیه $f(x)=\sin x$ است.

تابع اولیه یکتا نیست. بلکه هر دو تابع اولیه برای f تفاضل آنها یک تابع ثابت است. اگر F و G در رابطه $F'(x)=f(x)=G'(x)$ صدق کنند باید $(F-G)'=0$ و در نتیجه $F-G$ تابع ثابت است.

سؤال: آیا هر تابعی مانند f می‌تواند مشتق یک تابع مشتق‌پذیر باشد؟ یا به بیان دیگر هر تابعی باشد f تابع اولیه دارد؟

مثال- لازم نیست مشتق یک تابع حتماً پیوسته باشد.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

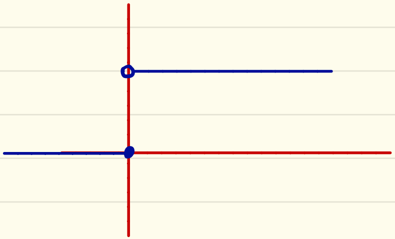
$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = 0$$

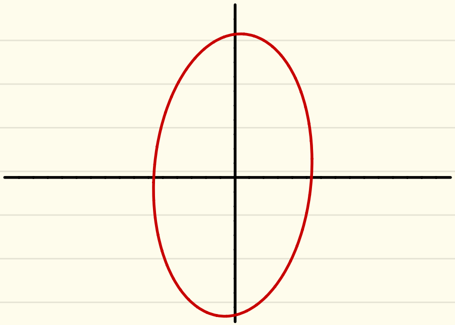
هر تابع پیوسته‌ای تابع اولیه دارد.

قضیه: مشتق هر تابع مشتق‌پذیر دارای خاصیت مقدار میانی است. یعنی اگر $F' = f$ و $f(a) = A < C < B = f(b)$

آنگاه نقطه $c \in (a,b)$ وجود دارد که $f(c) = C$.

مثال- تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ مشتق هیچ تابعی نیست.





مشتق ضمنی

معادله بیضی به صورت $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ را در نظر بگیرید

می‌دانیم که در بازه $-2<x<2$ ، y تابعی از x است.

اگر $y=f(x)$ باشد به دنبال محاسبه تابع $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ هستیم.

$$y=\pm 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

و برای شاخه $y>0$ می‌توانیم قرار دهیم $f(x)=3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

$$f'(x)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-1/2}\left(-\frac{x}{2}\right)$$

در روش مشتق‌گیری ضمنی لازم نیست تابع f را بشناسیم. در این روش از فرمول بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{x}{2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{9}\right)=0 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{2}{9}y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y}$$

مثال- $y\sin x = x^3 + \cos y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\sin x + y\cos x = 3x^2 - \sin y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y\cos x}{\sin x + \sin y}$$

مثلاً در نقطه $x=0$ و $y=\pi/2$ مشتق y برابر است با:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\pi/2$$

$$y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)-\pi/2}{x} \Rightarrow \frac{y(x)-\pi/2}{x} \approx -\pi/2$$

برای مقادیر x نزدیک صفر $\quad y(x) \approx -\pi/2\, x + \pi/2$

توابع نمایی

اگر a یک عدد حقیقی باشد، تعریف می‌کنیم

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{مرتبه } n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a>0$$

به دنبال تعریف a^x هستیم برای هر عدد حقیقی x. یک راه حل این است که عدد حقیقی x را با اعداد گویا تقریب بزنیم و با بالا بردن دقت تقریب عدد حاصل را مقدار a^x تعریف کنیم.

$$a^x := \lim_{\substack{r \to x \\ r \in \mathbb{Q}}} a^r$$

مثلاً اگر بخواهیم 2^{π} را محاسبه کنیم $\pi = 3,141592\cdots$

2^{3} , $2^{3,1}$, $2^{3,14}$, $2^{3,141}$, ...

و حد عبارت بالا را مقدار 2^{π} تعریف می‌کنیم.

سؤال مهم این است که چرا عبارت بالا حد دارد و چرا با انتخاب دنباله‌های مختلف از اعداد گویا به حد یکسانی می‌رسیم.

اگر $r_0 \in \mathbb{Q}$ یک عدد گویا باشد که $x < r_0$ انتظار داریم $a^{x} < a^{r_0}$ به شرط آنکه $1 < a$

$$a^{x} := \sup \{ a^{r} : r \in \mathbb{Q} , \quad r < x \}$$

چون اعضای این مجموعه همگی کوچکتر از a^{r_0} هستند. پس کوچکترین کران بالا برای این مجموعه وجود دارد.

و وقتی $a < 1$ تعریف می‌کنیم

$$a^{x} := \inf \{ a^{r} : r \in \mathbb{Q} , \quad r < x \}$$

a^{r_0} یک کران پایین برای این مجموعه است و در نتیجه بزرگترین کران پایین وجود دارد.

تمرینِ - اگر x عدد گویا باشد، تعریفِ بالا با تعریفِ قبلی سازگار است.

<u>خواص توان:</u>

(i) $a^0 = 1$

(ii) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(iv) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

(v) $(a^x)^y = a^{xy}$

(vi) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

وقتی $a>1$، آنگاه $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

و برای $a<1$، $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

اثبات (۷) برای سادگی فرض کنید $a>1$ و $x, y>0$.

$$b=a^{x}=\operatorname{Sup}\{a^{r}: x>r \in \mathbb{Q}\}$$

$$(a^{x})^{y}=b^{y}=\operatorname{Sup}\{b^{r}: y>r \in \mathbb{Q}\}=A$$

ابتدا نشان می‌دهیم A کران بالای مجموعه زیر است:

$$\{a^{r}: xy>r \in \mathbb{Q}\}$$

اگر $r_0<xy$ دلخواه باشد، عدد گویای s را پیدا کنید به طوری که $\frac{r_0}{x}<s<y$. در نتیجه باید

$$b^{s} \leq \operatorname{Sup}\{b^{r}: y>r \in \mathbb{Q}\}=A$$

همچنین چون $\mathbb{Q} \ni \frac{r_0}{s}<x$ در نتیجه

$$a^{\frac{r_0}{s}} \leq \operatorname{Sup}\{a^{r}: x>r \in \mathbb{Q}\}=b$$

$$\Rightarrow \quad a^{r_0}=(a^{r_0/s})^{s} \leq b^{s} \leq A$$

برای اینکه نشان دهیم A کوچکترین کران بالای $\{a^r : xy > r \in \mathbb{Q}\}$ است ، B را کران بالای دیگری این مجموعه

می‌گیریم و اثبات می‌کنیم $A \leq B$. برای این مطلب کافی است نشان دهیم B کران بالای مجموعه زیر است :

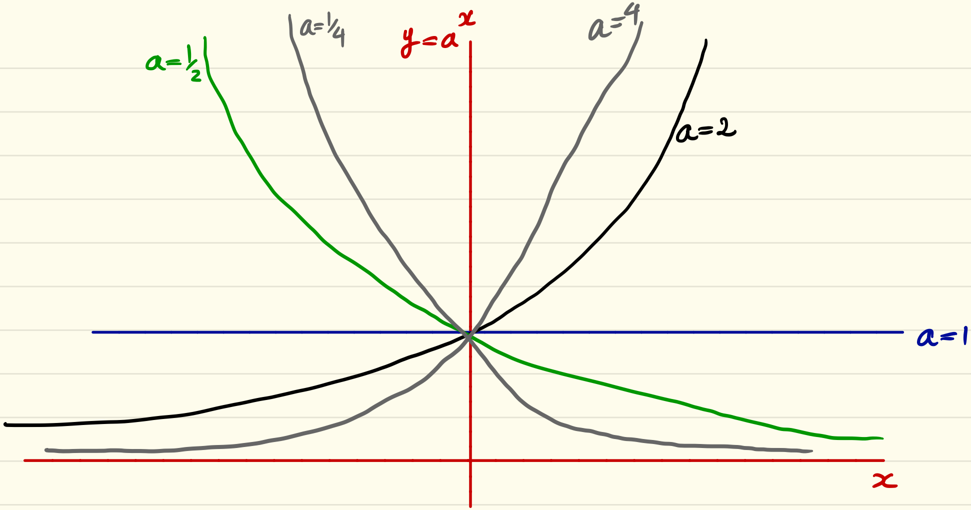
$$\{b^r : y > r \in \mathbb{Q}\}$$

فرض کنید چنین نباشد و $b^{r_1} > B$ برای لااقل یک عدد گویای $y > r_1$. عدد b' را طوری بگیرید که $B^{\frac{1}{r_1}} < b' < b$

چون $b' < b = \sup\{a^r : x > r \in \mathbb{Q}\}$ بنابراین عدد گویای $x > r_2$ وجود دارد که $b' < a^{r_2}$

$$\Rightarrow \quad B < (b')^{r_1} < a^{r_1 r_2}$$

داریم $r_1 r_2 < xy$ و این مطلب تناقض دارد با اینکه B کران بالای $\{a^r : xy > r \in \mathbb{Q}\}$ است.



برای $a>1$ تابع $f(x)=a^x$ یک تابع صعودی است و برای $a<1$ نزولی .

تعریف - تابع نمایی $f(x)=a^x$ یک تابع یکنوا است و در نتیجه وارون‌پذیر. وارون آن را لگاریتم در مبنای a تعریف می‌کنیم.

$$y=\log_a x \iff a^y = x$$

خواص زیر به طور طبیعی از توابع نمایی به ارث برده می‌شود.

(i) $\log_a 1 = 0$

(ii) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

(iii) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

(iv) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(v) $\log_a (x^y) = y \log_a x$

(vi) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

(ii) $a^{\log_a xy} = xy \quad , \quad a^{\log_a x} = x \quad , \quad a^{\log_a y} = y$

از خاصیت (iii) توابع نمایی می‌دانیم

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$\Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

(vi) $a^{\log_a x} = x \quad , \quad b^{\log_b x} = x \quad , \quad b^{\log_b a} = a$

$$\Rightarrow x = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = b^{\log_b a \cdot \log_a x} \Rightarrow \log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

خاصیت (v) توابع نمایی