ریاضی عمومی ۱

جلسه نهم

۱۰/۸/۱۴۰۰

قواعد مشتق :

① اگر f در نقطه x مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه پیوسته است.

پیوستگی در نقطه x :
$$\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$$

مشتق‌پذیری در نقطه x :
$$\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x)$$

بنابر خواص حدی داریم :

$$\lim_{y\to x} \big(f(y)-f(x)\big) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \times (y-x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \times \lim_{y\to x} (y-x)$$

$$= f'(x) \times 0 = 0$$

نکته - برعکس این گزاره درست نیست مثلاً $f(x)=|x|$ در نقطه $x=0$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

② اگر f و g در نقطه x مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع $f+g$ نیز در نقطه x مشتق‌پذیر است و

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

اثبات ـ تمرین

نکته ـ
$$(f_1 + \cdots + f_n)' = f_1' + \cdots + f_n'$$

مثال ـ اگر $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ یک چندجمله‌ای باشد، مشتق‌پذیر است و

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

③ قاعده لایب‌نیتس :
$$(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))\, g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \times \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

نکته : $(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 \cdots f_{n-1} f_n'$

4 اگر $g(x_0)\neq 0$ و توابع f و g در x_0 مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $\frac{f}{g}$ در نقطه x_0 مشتق‌پذیر است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

ابتدا نشان می‌دهیم

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

قاعده لایب‌نیتس را برای $g \times \frac{1}{g} = 1$ استفاده کنید.

$$0 = g' \times \frac{1}{g} + g \times \left(\frac{1}{g}\right)' \Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)' = -\, g'/g^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = f' \times \frac{1}{g} + f \times \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

مثال -

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = ?$$

۵ قاعده زنجیری :

$$x \xrightarrow{f} y=f(x) \xrightarrow{g} z=g(y)$$

اگر f در نقطه x مشتق‌پذیر و g در نقطه $y=f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $g\circ f$ در نقطه x مشتق‌پذیر است و

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

به بیان نمادهای لایب‌نیتس :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$$

مثل -

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}$$

$$y = x^2+1 \quad , \quad z=\sqrt{y} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 2x \;,\; \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2}\, y^{-1/2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx} = 2x \times \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال -

$$\frac{d}{dx}|x^2-1|$$

$$y = x^2-1 \quad , \quad z = |y| \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx} = Sgn(y) \times 2x = Sgn(x^2-1) \times 2x$$

در $y \neq 0$ مشتق وجود دارد.

به شرط آنکه $x \neq \pm 1$

مثال -

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n$$

$$g(y) = y^n \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = (f(x))^n \quad , \quad g'(y) = n y^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

مثال - $\frac{d}{dx} f(\alpha x)$

$$g(x)=\alpha x \Rightarrow \frac{d}{dx}(f\circ g)(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \alpha f'(\alpha x)$$

مثال - f^{-1} تابع وارون f می‌گیریم که $f^{-1}\circ f(x) = f\circ f^{-1}(x) = x$ ، در این صورت اگر از

رابطه قبل نسبت به x مشتق بگیریم، بنابر قاعده زنجیره‌ای داریم

$$x = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow 1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

بنابر قاعده لایب‌نیتس $\frac{dy}{dx}$ مشتق y نسبت به x را نشان می‌دهد وقتی $y=f(x)$ تابعی از x باشد. وقتی f وارون‌پذیر باشد،

x هم تابعی از y است $x=f^{-1}(y)$ و $\frac{dx}{dy}$ مشتق تابع f^{-1} را نشان می‌دهد.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

مثال -

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\theta})}$$

$$\sin\theta = x \implies \cos\theta = \pm\sqrt{1-x^2}$$

از $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ ، آنگاه $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ ، و درنتیجه

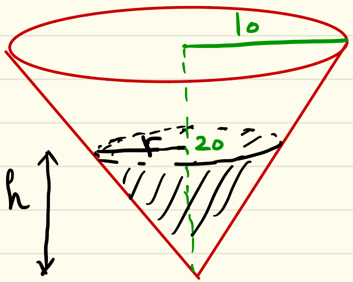
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

تمرین - $(\arccos x)'$ ، $(\arctan x)'$ را محاسبه کنید.

مثال - ظرفی بصورت مخروطی شکل در نظر بگیرید، مشابه شکل روبرو.

با سرعت $20\ m^3/s$ آب درون ظرف ریخته می‌شود. آهنگ افزایش

ارتفاع آب وقتی آب در ارتفاع $6m$ است را بیابید.



$$r = \frac{h}{2}$$

اگر V حجم آب داخل ظرف باشد، می‌دانیم

$$\frac{dV}{dt} = 20$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\,\frac{h^3}{4}$$

بنابر قاعده زنجیری:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \times \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{\frac{\pi h^2}{4}} = \frac{80}{\pi h^2} = \frac{80}{\pi \times 6^2}$$

⑥ اگر $f'(x_0)>0$ تابع f در نقطه x_0 صعودی است در یک همسایگی x_0 ، یعنی

$$f(x_0) < f(y) \qquad x_0 < y < x_0+\delta \text{ وقتی}$$

$$f(y) < f(x_0) \qquad x_0-\delta < y < x_0 \text{ وقتی}$$

$$0 < f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow$$ تابع $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ برای $|h|<\delta$ مثبت است

می‌دانیم اگر $\lim_{x\to y} g(x) = L$ که L عددی مثبت است آنگاه در یک همسایگی از y داریم

$$0 < \frac{L}{2} < g(x) \qquad 0<|x-y|<\delta$$

زیرا بنا بر تعریف حد برای $\epsilon = \frac{L}{2}$ می‌دانیم δ وجود دارد که

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-L| < \epsilon = \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} < g(x) < \frac{3L}{2}$$

اگر در سرتاسر یک بازه تابعی مشتق‌پذیر باشد و مشتق آن مثبت، آنگاه تابع اکیداً صعودی است.

بعنوان مثال تابع $f(x) = x + x^2 \sin\frac{1}{x}$ که $f(0) = 0$

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 + x\sin\frac{1}{x}\right) = 1$$

هرچند در نقطه $x=0$ تابع صعودی است ولی در هیچ بازه‌ای حول نقطه $x=0$ تابع صعودی نیست.

تذکر: نکات بالا برای توابع نزولی به طور مشابه برقرار است با این تفاوت که باید علامت مشتق منفی باشد.