ریاضی عمومی ۱

جلسه هشتم

۱۴۰۰/۸/۳

مشتق

آهنگ تغییرات :

اگر $f(t)$ یک کمیت خاص را اندازه بگیرد، سرعت نسبی تغییرات در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ برابر است با

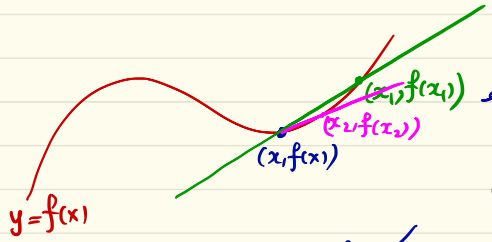
$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

بدین ترتیب می‌توان سرعت لحظه‌ای (آهنگ تغییرات در زمان t) را به صورت زیر اندازه گرفت

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

و با نماد $f'(t)$ نشان می‌دهیم. آن را مشتق تابع f در لحظه t گوییم.

مماس بر نمودار :

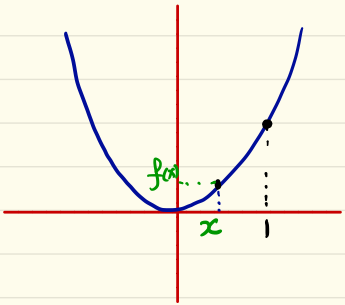


فرض کنید بخواهیم در نقطه (x,y) از نمودار $y=f(x)$ یک خط مماس رسم کنیم، نقطه $(x,f(x))$ را به نقطه $(x_1,f(x_1))$ وصل می‌کنیم. با نزدیک کردن x_1 به x انتظار داریم خط حاصل به خط مماس نزدیک شود.

$$\text{شیب خط واصل} = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

اگر عبارت بالا وقتی x_1 به x میل می‌کند حد داشته باشد، مقدار حدی عبارت شیب خط مماس را می‌دهد.

این عدد همان مشتق تابع f در نقطه x است.



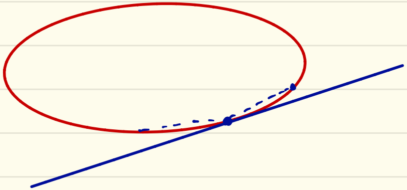
مثال- $f(x)=x^2$ خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $(1,1)$ را به دست می‌آوریم.

$$\text{تقریب شیب خط مماس} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

وقتی $x \to 1$ ، مقدار بالا به 2 همگراست و شیب خط مماس باید 2 باشد.

خط مماس از نقطه $(1,1)$ می‌گذرد با شیب 2 در نتیجه معادله آن به صورت زیر است:

$$y-1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x-1$$



مثال- مماس بر بیضی $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ در نقطه $(2,-\frac{3\sqrt{3}}{2})$
را بدست آورید.

$$y=-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$$

ترکیب شیب خط مماس $=\dfrac{-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x-2}=\dfrac{-\frac{9}{16}(16-x^2)+\frac{27}{4}}{(x-2)\left(\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$

$$=\frac{\frac{9}{16}x^2-\frac{9}{4}}{(x-2)(\cdots)}=\frac{\frac{9}{16}(x+2)}{\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}\longrightarrow\frac{9}{12\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$y+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$$

مماس قائم: خط $x=x_0$ مماس قائم بر نمودار تابع $y=f(x)$ است هرگاه مشتق تابع در نقطه x_0 بی‌نهایت شود یا

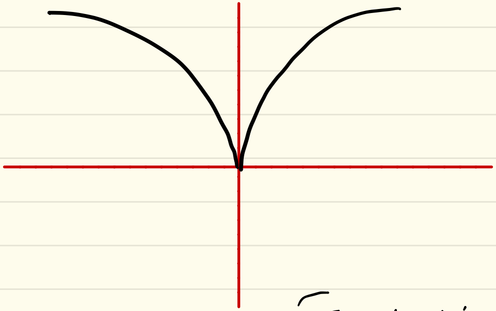
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$$

مثال- در مثال قبل (بیضی) مماس بر بیضی در نقطه $x=4$ قائم است. البته قابل تذکر است که در آن نقطه تابع $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$
مشتق تعریف نشده است، بلکه تنها حد از سمت چپ تعریف می‌شود. برای همین به آن مشتق چپ گوییم.

به عنوان تمرین نشان دهید مشتق چپ در نقطه $x=4$ بی‌نهایت می‌شود.

مثال- $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در نقطه $x=0$ مماس قائم دارد.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}}=+\infty$$



مثال - $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ مشتق راست $+\infty$ و مشتق چپ $-\infty$ است.

مثال - نمودار $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نظر بگیرید و $(8,2)$ خط عمود بر نمودار را بدست آورید.

$$\text{شیب خط مماس بر نمودار} = f'(8) = \lim_{x\to 8}\frac{f(x)-f(8)}{x-8} = \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$

$$=\frac{1}{12}$$

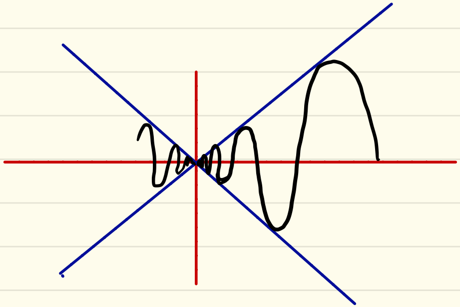
$\Rightarrow$ شیب خط عمود $=-12$ $\Longrightarrow$ $y-2=-12(x-8)$

معادله خط عمود

مثال - $f(x)=|x|$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & \text{حد راست}\\ -1 & \text{حد چپ}\end{cases}$$

هر چند مشتق راست و مشتق چپ دارد.



مثال -
$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

حد عبارت بالا وجود ندارد. لذا این تابع در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست.

مثال- $f(x)=\begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست.

محاسبه مشتق تعدادی از توابع:

1) تابع ثابت: $f(x)=c$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0}=0 \Rightarrow f'(x)=0$$

2) تابع $f(x)=ax+b$

$$f'(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a(x+h)+b)-(ax+b)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} a = a \Rightarrow f'(x)=a$$

$$f(x) = x^n \quad 3$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\left((x+h)^{n-1} + \cdots + x^{n-1}\right)}{h}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$= \lim_{h\to 0} (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

④ $f(x)=x^{1/n}$ برای $x>0$ وقتی n زوج است و $x\neq 0$ وقتی n فرد است.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left((x+h)^{\frac{n-1}{n}}+\cdots+x^{\frac{n-1}{n}}\right)}=\frac{1}{n\,x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}x^{1/n-1}$$

در اتحاد صفحه قبل قرار دهید

$a=\sqrt[n]{x+h}$, $b=\sqrt[n]{x}$

⑤ $f(x)=x^{m/n} \Rightarrow f'(x)=\frac{m}{n}x^{m/n-1}$ (تمرین)

نکته- در جلسات بعد تابع x^r برای هر مقدار حقیقی r تعریف خواهد شد. مشتق این تابع برابر است با $r\,x^{r-1}$

تذکر- نمادگذاری لایب نیتس برای مشتق $y = f(x)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

به جای $f'(x)$ می‌توانیم بنویسیم $\frac{df}{dx}$ یا وقتی متغیر y تابعی از x در نظر بگیریم، $\frac{dy}{dx}$ مشتق آن تابع است.

همچنین در بعضی مواقع از نمادهای زیر استفاده می‌شوند

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = D_x f = Df$$

به عنوان مثال می‌توان نوشت

$$\frac{d}{dx} x^{2} = 2 x^{2-1}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$ (6)

$$\frac{d}{dx}x^{-1} = (-1)\,x^{-2}$$

به طور مشابه وقتی $r<0$ داریم

$$\frac{d}{dx}x^{r} = r\,x^{r-1}$$

(7) مشتق $f(x)=\sin x$ در جلسات قبل نشان دادیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow\quad f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\sin x\Big|_{x=0} = 1$$

$$g(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{-\sin x}{\cos x + 1} = 1 \times 0 = 0$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \times \cos x + \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \times \sin x$$

$$= 1 \times \cos x + 0 \times \sin x = \cos x$$

تمرین – نشان دهید $\quad \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$