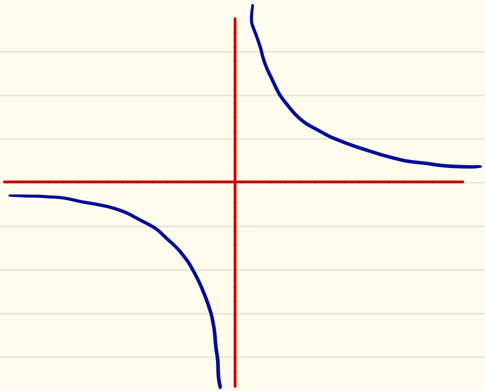
ریاضی عمومی ۱

جلسه ششم

۱۴۰۰/۷/۲۶



حد بی‌نهایت : $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

اگر به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ نگاه کنیم وقتی از راست به نقطه صفر نزدیک می‌شویم مقدار تابع از هر چیزی بزرگتر می‌شود. برای همین می‌گوییم حد f در آنجا بی‌نهایت است.

تعریف دقیق : $\forall M \ \exists \delta>0$ s.th. $0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M$

به طور مشابه بی‌نهایت شدن حد راست و چپ یک تابع در نقطه a را می‌توان تعریف کرد.

وقتی $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ تنها باید به جای $f(x)>M$ قرار داد، $f(x)<-M$ که یعنی در یک همسایگی a مقدار تابع از $-M$ کوچکتر است.

تعریف $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\forall M \ \exists B \ \text{sth.} \quad x > B \implies f(x) > M$$

و به طور مشابه حالت‌های دیگر که به جای $+\infty$، $-\infty$ قرار دهیم.

مثال- نشان می‌دهیم $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. بنابر تعریف باید ثابت کنیم

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{sth.} \quad -\delta < x < 0 \implies \frac{1}{x} < -M$$

اگر برای هر مقدار M، قرار دهیم $\delta = \frac{1}{M}$ به وضوح حکم بالا برقرار خواهد بود.

مثال- $\lim_{x\to+\infty} 2x^3+5x-6 = +\infty$.

بنابر تعریف باید نشان دهیم

$$\forall M \ \exists B \ \text{sth.} \quad x>B \Rightarrow 2x^3+5x-6 > M \qquad (1)$$

با توجه به رابطه

$$2x^3+5x-6 = 2x^3\left(1+\frac{5}{2x^2}-\frac{3}{x^3}\right)$$

اثبات را در دو مرحله انجام می‌دهیم:

گام اول: $\exists B' \ \text{sth.} \quad x>B' \Rightarrow 1+\frac{5}{2x^2}-\frac{3}{x^3} > \frac{1}{2}$

این گزاره برای $B'=2$ برقرار است. زیرا برای $x>2$ داریم $8<x^3$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{x^3}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2} \Rightarrow 1+\frac{5}{2x^2}-\frac{3}{x^3} > \frac{1}{2}$$

گام دوم: برای $x>2$ بنابر نتیجه گام اول داریم:

$$2x^3\left(1+\frac{5}{2x^2}-\frac{3}{x^3}\right) > 2x^3 \times \frac{1}{2} = x^3$$

و اگر $x>M^{1/3}$، آنگاه نزاره (1) برقرار خواهد شد. لذا باید

$$x > B = \max\left(2, M^{1/3}\right)$$

مثال - اگر $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ و $Q(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$ آنگاه

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \begin{cases} +\infty \text{ یا } -\infty & n>m \\ 0 & n<m \\ \frac{a_n}{b_m} & n=m \end{cases}$$

ایده اثبات:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)}{b_mx^m\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\cdots+\frac{b_0}{b_mx^m}\right)}$$

حد عبارت‌های داخل پرانتز برابر یک است.

مثال - مقدار حد $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ وجود ندارد.

اگر حد تابع $\sin x$ وجود داشته باشد و مقدار آن L باشد، باید

$$\forall e \ \exists B \ \text{sth.} \quad x > B \Rightarrow |\sin x - L| < e$$

برای هر مقدار B می‌توان k را انتخاب کرد که $B < x = 2k\pi - \pi/2$ در نتیجه باید

$$-e < \underbrace{\cancel{\sin(2k\pi - \pi/2)}}_{-1} - L < e$$

همینطور برای $B < x = 2k\pi + \pi/2$ باید

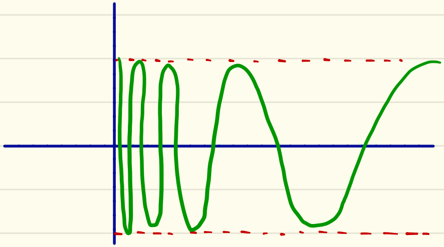
$$-e < \underbrace{\cancel{\sin(2k\pi + \pi/2)}}_{1} - L < e$$

$$-e < 1 + L < e$$

$$-2e < 2 < 2e$$

در نتیجه خطای e نمی‌تواند به اندازه دلخواه کوچک شود.

تمرین- با تعریف حد نشان دهید که $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد.



به لحاظ شهودی اگر قرار باشد حد $\sin\frac{1}{x}$ برابر L باشد

در نزدیکی نقطه $x=0$، نمودار تابع باید بین دو خط $y=L+\varepsilon$ و $y=L-\varepsilon$

قرار گیرد و با توجه به نوسانات تابع $\sin\frac{1}{x}$ همه مقادیر بین 1 و -1 گرفته می‌شود.

ارتباط بین حد و پیوستگی

اگر تابع در همسایگی نقطه a تعریف شده باشد، در این صورت تابع f در نقطه a پیوسته است اگر و تنها اگر

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

خواص پیوستگی: توابع f و g در نقطه a پیوسته هستند. آنگاه

① توابع $f+g$ و $f-g$ نیز در a پیوسته هستند.

طبق مطلب بالا چون f و g در a پیوسته هستند، در نتیجه $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

بنابر خواص حد داریم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$= f(a) + g(a)$$

همانطور که می‌بینیم حد تابع $f+g$ در نقطه a برابر $f(a)+g(a)$ است. در نتیجه $f+g$ در a پیوسته است.

② تابع $f(x)g(x)$ در نقطه a پیوسته است.

برای اثبات کافی است بگوییم $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = f(a)g(a)$ که از خاصیت حد ضرب توابع نتیجه می‌شود.

③ تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه a پیوسته است به شرط آنکه $g(a)\neq 0$.

④ به ازای هر عدد حقیقی r تابع $rf(x)$ در نقطه a پیوسته است.

⑤ به ازای هر عدد گویای مثبت $\frac{m}{n}$ تابع $(f(x))^{m/n}$ در نقطه a پیوسته است. (وقتی n زوج است باید $f(a)>0$
تا تابع در همسایگی a تعریف شود)

مثال- تابع $f(x)=x$ در همه نقاط پیوسته است. بنابر ⑤ تابع x^n نیز همه جا پیوسته است.

بنابر ④ و ① هر چندجمله‌ای $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ نیز پیوسته است.

بنابر ③ هر تابع گویای $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که P و Q چندجمله‌ای هستند، در نقاطی که $Q(a)\neq 0$ پیوسته هستند.

مثال- در جلسه پیش نشان دادیم
$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

پس توابع $\sin x$ و $\cos x$ در نقطه $a=0$ پیوسته هستند.

نشان می‌دهیم در نقاط دیگر نیز این توابع پیوسته هستند. برای این مطلب باید ثابت کنیم
$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$$

$$\sin x = \sin(x-a+a) = \sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \sin x = \cos a \times \lim_{x\to a} \sin(x-a) + \sin a \times \lim_{x\to a} \cos(x-a)$$

$$= \cos a \times 0 + \sin a \times 1 = \sin a$$

تمرین - با اثبات تساوی نشان دهید $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$ و در نتیجه $\cos x$ در هر نقطه a پیوسته است.

مثال - $\tan x$ در نقاط $x \neq k\pi + \pi/2$ پیوسته است.