ریاضی عمومی ۱

۱۴۰۰/۷/۲۴

جلسه پنجم

حد تابع

اگر تابع f در نزدیکی نقطه a تعریف شده باشد، می‌گوییم حد f در نقطه a برابر L است هرگاه مقدار $f(x)$ برای x های به اندازه کافی نزدیکِ a تقریباً L باشد. در این حالت می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

یا اینکه

$$f(x) \longrightarrow L \quad \text{وقتی} \quad x \to a$$

تعریف دقیق: برای هر مقدار خطای محاسبه $e>0$ ، مقدار $\delta>0$ را بتوان تعیین کرد که اگر

$$|x-a|<\delta \implies |f(x)-L|<e$$

مثال-

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+6)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+6} = \frac{3}{7}$$

اثبات همگرایی با تعریف بالا:

$$\forall e\ \exists \delta>0 \text{ sth. } |x-1|<\delta \implies \left| \frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6} - \frac{3}{7} \right| < e$$

$$\left|\frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6}-\frac{3}{7}\right| = \left|\frac{x+2}{x+6}-\frac{3}{7}\right| = \left|\frac{4x-4}{7(x+6)}\right| = \frac{4}{7}\left|\frac{x-1}{x+6}\right| \overset{?}{<} \epsilon$$

δ چقدر باشد که نامساوی بالا درست دربیاید؟

$$|x-1|<\delta \Rightarrow 1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow 7-\delta < x+6 < 7+\delta$$

اگر $\delta<1$ باشد، آنگاه $6 < x+6$ و داریم:

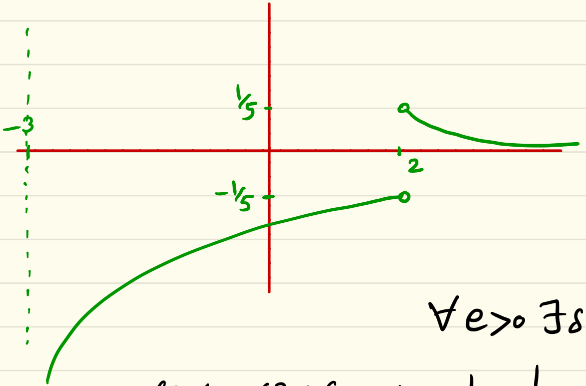
$$\Rightarrow \frac{4}{7}\left|\frac{x-1}{x+6}\right| < \frac{4}{7}\,\frac{|x-1|}{6} < \frac{2}{21}\delta$$

کافی است $\delta = \frac{21}{2}\epsilon$ تا حکم بالا برقرار شود.

مثال-

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = ?$$

$$\frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \frac{|x-2|}{(x-2)(x+3)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & x>2 \\ \dfrac{-1}{x+3} & x<2 \end{cases}$$



انتظار می‌رود که این تابع در $x=2$ حد نداشته باشد. این مطلب را به کمک تعریف حد نشان می‌دهیم. اگر قرار باشد تابع حد داشته باشد باید مقدار L که حد تابع هست در خاصیت زیر صدق کند

$$\forall e>0\ \exists \delta>0 \text{ s.th. } |x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<e$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2<x<2+\delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x+3}-L\right|<e \xRightarrow{x=2+\delta/2} \left|\dfrac{1}{2+\delta/2+3}-L\right|<e \\ 2-\delta<x<2 \Rightarrow \left|\dfrac{-1}{x+3}-L\right|<e \xRightarrow{x=2-\delta/2} \left|\dfrac{-1}{2-\delta/2+3}-L\right|<e \end{cases}$$

دو رابطه آخر را با هم جمع کنید:

$$-2\varepsilon < \frac{1}{5+\delta/2} + \frac{1}{5-\delta/2} < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{10}{25} < \frac{10}{25-\delta^2/4} < 2\varepsilon$$

در نتیجه نمی‌توان ε را به اندازه کافی کوچک انتخاب کرد.

تعریف - حد چپ و راست: گوییم حد راست (حد چپ) f در نقطه a برابر L است هرگاه برای هر خطای محاسبه $\varepsilon > 0$، مقدار δ وجود داشته باشد که

$$a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

$$a-\delta < x < a$$

و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \qquad \left(\lim_{x\to a^-} f(x) = L\right)$$

مثال - در مثال قبل حد راست تابع برابر $1/5$ است و حد چپ برابر $-1/5$.

قضیه - تابع f در نقطه a حد L دارد (به مقدار L همگرا است) اگر و تنها اگر حد چپ و راست داشته باشد و مقدار هر دو برابر L باشد.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \end{cases}$$

مثال - تابع $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ در نقطه $x=1$ تنها حد چپ دارد زیرا $x>1$ در دامنه تابع نیست.

خواص حد:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

① $$\lim_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big) = L+M$$

② $$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$$

③ برای هر تعداد حقیقی r ، $$\lim_{x\to a} \big(rf(x)\big) = rL$$

④ $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$ مشروط به آنکه $M \neq 0$.

⑤ $$\lim_{x\to a} \big(f(x)\big)^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$$

⑥ اگر در یک بازه حول نقطه a داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ آنگاه $L \leq M$.

② اثبات

فرضیات
$$\begin{cases} \forall e'>0 \quad \exists \delta' \ \text{s.th.} \quad |x-a|<\delta' \Rightarrow |g(x)-M|<e' & (1) \\ \forall e''>0 \quad \exists \delta'' \ \text{s.th.} \quad |x-a|<\delta'' \Rightarrow |f(x)-L|<e'' & (2) \end{cases}$$

حکم: $\forall e>0 \quad \exists \delta \ \text{s.th.} \quad |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)g(x)-LM|<e$

$$|f(x)g(x)-LM| = |(f(x)-L)g(x) + L(g(x)-M)|$$

$$\le |f(x)-L|\cdot|g(x)| + |L|\cdot|g(x)-M|$$

$|a+b|\le|a|+|b|$

e' و e'' را مقادیر کوچکی بگیرید که در پایان اثبات آنها را مشخص خواهیم کرد. متناظر آنها δ' و δ'' تعریف می‌شوند و روابط (1) و (2) برقرار هستند.

$$(1) \Rightarrow |g(x)|-|M| \le |g(x)-M| < e' \Rightarrow |g(x)| < |M|+e'$$

اگر $\delta=\min(\delta',\delta'')$ آنگاه برای مقادیر x که $|x-a|<\delta$ هر دو رابطه (1) و (2) برقرار هستند. در نتیجه

$$|f(x)-L|\cdot|g(x)|+|L|\cdot|g(x)-M| < e''\cdot(|M|+e')+|L|\cdot e'$$

کافی است $e' = \dfrac{e}{2|L|}$ و $e'' = \dfrac{e}{2(|M|+e')}$ تا مقدار بالا کمتر از e شود.

قضیه فشار (ساندویچ) فرض کنید $f(x) \le g(x) \le h(x)$ در یک همسایگی a. به علاوه

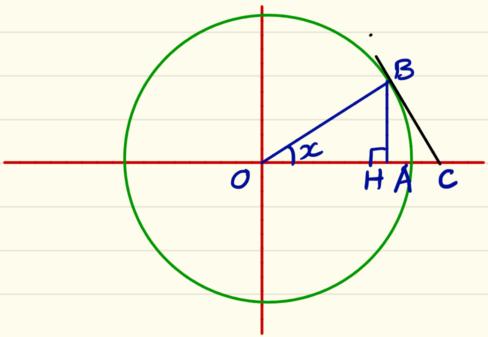
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

در این صورت تابع g در نقطه a حد دارد و مقدار آن برابر L است.

مثال- اگر $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. زیرا

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

مثال -
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



$$\overline{BH}=\sin x \quad , \quad \overline{OH}=\cos x$$

در مثلث قائم الزاویه ABH داریم :

$$\overline{BH}<\overline{AB} \quad , \quad \overline{AH}<\overline{AB}$$

از طرف دیگر طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ بزرگتر از وتر $\overline{AB}$ است. درنتیجه

(3) $$\sin x < x \quad , \quad 1-\cos x < x$$

برای مقادیر $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم :

$$0<\sin x<x \qquad 0\le 1-\cos x<x$$

درنتیجه بنابر قضیه ساندویچ

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\sin x=0$$

$$\Downarrow$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

اگر از نقطه B مماسی بر دایره رسم کنیم و امتداد دهیم تا ادامه OA را در نقطه C قطع کند، طول $\overline{BC}$ برابر $\tan x$ است. زیرا OBC قائم الزاویه است و $OB = 1$. داریم

$$\overset{\frown}{AB} < \overline{BC}$$

زیرا:

$$\text{مساحت مثلث } OBC = \frac{1}{2}\,\overline{OB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2}\tan x$$

$$\text{مساحت قطاع دایره } OAB = \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow \quad x < \tan x \qquad (5)$$

دو رابطه (3) و (5) را دوباره می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 0 < \sin x < x \\ 0 < x < \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

حال به کمک رابطه (4) و قضیه ساندویچ نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حد در بی‌نهایت :

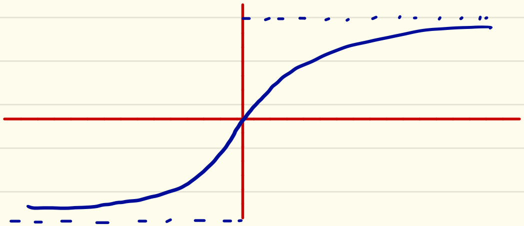
گوییم حد تابع f در $+\infty$ برابر L است هرگاه برای هر مقدار خطای محاسبه $e>0$ مقدار B وجود داشته باشد که اگر

$$B<x \Rightarrow |f(x)-L|<e$$

و می‌نویسیم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

به طور مشابه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ هرگاه برای هر $e>0$ مقدار $B>0$ وجود داشته باشد که

$$x<-B \Rightarrow |f(x)-L|<e$$



مثال -

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

حکم : $\forall e\ \exists B>0$ sth. $x>B \Rightarrow \left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right|<e$

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right| = \left|\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right| = \left|\frac{x^2-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}\,\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \overset{?}{<} e$$

باید نشان دهیم برای هر e مقدار B وجود دارد که اگر $x>B$ این نامساوی برقرار است.

می‌دانیم برای $x>B$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} < \frac{1}{\sqrt{B^2+1}\,\left(B+\sqrt{B^2+1}\right)} < \frac{1}{B}$$

لذا کافی است برای هر مقدار $e>0$ قرار دهیم $B=\dfrac{1}{e}$.