ریاضی عمومی ۱

جلسه چهارم

۱۴۰۰/۷/۱۹

مثال - $f(x)=x^2$. مقدار π^2 را با تقریب 10^{-3} محاسبه کنید .

$$x \sim \pi = 3,1415926\cdots$$

$$|x^2-\pi^2| < 10^{-3} \iff |x-\pi| < \frac{10^{-3}}{\underbrace{x+\pi}_{<8}}$$

$$\Uparrow$$

$$|x-\pi| < \frac{10^{-3}}{10} = 10^{-4}$$

لذا تقریب $x = 3,1415$ مقدار π^2 را با خطای 10^{-3} محاسبه می‌کند .

$$f(3,1415) = 9,86902225$$

برای همین می‌گوییم تابع $f(x)=x^2$ دارای پایداری محاسبه است در نقطه $x=\pi$. یعنی اگر به جای π تقریب آن را استفاده کنیم، مقدار محاسبه شده به اندازه کافی نزدیکِ مقدار واقعی است.

تعریف- تابع f در نقطه $x=a$ دارای خاصیتِ پایداری محاسبه (یا پیوستگی) است. هرگاه برای هر خطای محاسبه دلخواه $e>0$ مقدار محاسبه شده $f(x)$ برای x های به اندازه کافی نزدیک به a مقدار $f(a)$ را با خطای کمتر از e محاسبه کند. در واقع متناظر مقدار e، میزان خطای $\delta>0$ برای محاسبه a وجود داشته باشد که اگر x با تقریب δ مقدار عدد a را محاسبه کند، $f(x)$ کمتر از e با $f(a)$ فاصله داشته باشد.

$$|x-a|<\delta \Longrightarrow |\underbrace{f(x)}_{\text{مقدار محاسبه شده است.}}-\underbrace{f(a)}_{\text{مقدار واقعی یک کمیت}}|<e$$

مثال- در مثال قبل برای تابع $f(x)=x^2$ ، برای خطای $e=10^{-3}$ نشان دادیم با $\delta=10^{-4}$ مقدار تقریبی $f(x)$ با مقدار $f(\pi)$ کمتر از e فاصله دارد. برای اینکه پیوستگی (یا برابری محاسبه) در نقطه π را نشان دهیم باید اثبات کنیم به ازای هر خطای دلخواه $e>0$ ، مقدار $\delta>0$ وجود دارد.

$$|x-\pi|<\delta \Longrightarrow |x^2-\pi^2|<e$$

$$\Updownarrow$$

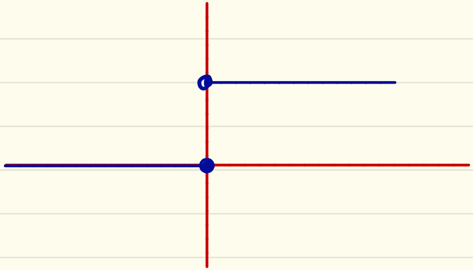
$$|x-\pi| < \frac{e}{x+\pi}$$

$$\Uparrow$$

$$|x-\pi| < \frac{e}{10} \quad \text{مشروط به آنکه} \quad \pi-1 < x < \pi+1$$

لذا برای $\delta = \min\left\{1, \frac{e}{10}\right\}$ رابطه بالا درست است.

مثال -



$$f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که این تابع در نقطه $x=0$ خاصیت پایداری محاسبه را ندارد.

اگر قرار باشد تابع در $x=0$ پیوسته باشد، باید برای خطای $e>0$ ، مقدار $\delta>0$ وجود داشته باشد که

$$|x-0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\underbrace{f(0)}_{0}|<e$$

برای مقادیر $x>0$ رابطه بالا همواره درست است. اما اگر $0<x<\delta$ آنگاه

$$f(x)=1$$

و در نتیجه رابطه بالا برای خطاهای $e<1$ درست نیست.

مثال- $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in \mathbb{Q} \\ 0 & x\notin \mathbb{Q} \end{cases}$ این تابع در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

نقطه a دلخواه در نظر بگیرید. تعریف پیوستگی در نقطه a بدین صورت است: برای هر خطای $e>0$ مقدار $\delta>0$ وجود دارد

$$|x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<e$$

نشان می‌دهیم برای $e=\frac{1}{2}$ مقدار $\delta>0$ وجود ندارد که رابطه بالا برای آن برقرار باشد.

اگر $a\in\mathbb{Q}$ گویا باشد، $f(a)=1$، برای هر $\delta>0$ دلخواه می‌توان مقدار گنگ x را در بازه $a-\delta<x<a+\delta$ انتخاب کنیم. درنتیجه $f(x)=0$ است و نامساوی

$$|\underbrace{f(x)}_{0}-\underbrace{f(a)}_{1}| \not< \frac{1}{2}$$

به طور مشابه وقتی $a\notin\mathbb{Q}$ می‌توان دید که تعریف پیوستگی برقرار نیست.

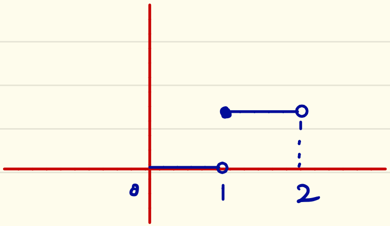
تمرین- $f(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ 1-x & x\notin Q\end{cases}$ تنها در نقطه $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است.

تعریف- گوییم تابع $f(x)$ در نقطه a خاصیت پایداری محاسبه یا پیوستگی از راست (چپ) دارد، هرگاه برای هر مقدار خطای دلخواه $e>0$، مقدار $\delta>0$ وجود داشته باشد که اگر

$$a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<e$$

$$(a-\delta<x<a)$$

مثال- تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ جزء صحیح (بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x) از راست پیوسته است.



تمرین - اگر تابعی از چپ و از راست پیوسته باشد، آنگاه پیوسته است و بالعکس.

برای خطای $e>0$ دلخواه

پیوستگی از راست: $\exists \delta_1 : a<x<a+\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)|<e$

پیوستگی از چپ: $\exists \delta_2 : a-\delta_2<x<a \Rightarrow |f(x)-f(a)|<e$

پیوستگی: $\exists \delta : a-\delta<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<e$

اگر تابع f در نقطه $x=a$ خاصیت پیوستگی (یا پایداری محاسبه) را نداشته باشد، مقدار محاسبه شده $f(x)$ قابل اعتماد نیستند وقتی x تقریب a را ارائه می‌کند. سؤال مهم این است که $f(x)$ چه چیزی را دارد حساب می‌کند؟

در بعضی شکل‌ها اصلاً مقدار تابع در نقطه a تعریف نشده است و برای ما مهم است که بدانیم رفتار f در نزدیکی نقطه a چگونه است؟

مثال - $g(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ در نقطه $x=0$ تعریف نشده است.