ریاضی عمومی ۱

جلسه سوم

۱۴۰۰/۷/۱۷

$$z = r\cos\theta + r\sin\theta\, i \implies z^n = ?$$

$$|z^2| = |z|^2 = r^2 \qquad \arg z^2 = \arg z + \arg z \neq 2\arg z$$

$$\{2k\pi + \theta : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$2\arg z = \{4k\pi + 2\theta : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\arg z + \arg z = \{2k\pi + \theta : k \in \mathbb{Z}\} + \{2k\pi + \theta : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{2k\pi + 2\theta : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$|z^n| = |z|^n = r^n \qquad \arg z^n = \{2k\pi + n\theta : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$ فرمول دمواور

مثلاً درحالت $n=3$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos\theta)^3 + 3i(\cos\theta)^2\sin\theta - 3\cos\theta(\sin\theta)^2 - i(\sin\theta)^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = (\cos\theta)^3 - 3\cos\theta(\sin\theta)^2 \\ \sin 3\theta = 3(\cos\theta)^2\sin\theta - (\sin\theta)^3 \end{cases}$$

$$(2+2i)^{100} =$$ مثال -

$$z = 2+2i \Rightarrow |z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg z = \arctan 1 = \pi/4$$

$$\Rightarrow z = 2\sqrt{2}\left(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4\right)$$

$$\Rightarrow z^{100} = (2\sqrt{2})^{100}\left(\cos 100 \times \pi/4 + i \sin 100 \times \pi/4\right) = -2^{150}$$

$$(\sqrt{3} - i)^{100} = ?$$ مثال -

$$z = \sqrt{3} - i \Rightarrow |z| = \sqrt{3+1} = 2 \quad , \quad \arg z = \arctan -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\pi/6$$

$$z = 2\left(\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6)\right)$$

$$z^{100} = 2^{100}\left(\cos(-\pi/6 \times 100) + i \sin(-\pi/6 \times 100)\right) = 2^{100}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -2^{100}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z \times \frac{1}{z} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = r\rho\left(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\right)$$

$$\Rightarrow \quad r\rho = 1, \quad \theta + \varphi = 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{r}, \quad \varphi = -\theta$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = r^{-1}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$$

$$= r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad n = \dots,-2,-1,0,1,2,\dots$$

توان گویا: اگر $w\in\mathbb{C}$ یک عدد مختلط باشد، منظور از $z = w^{1/n}$ عددی است که $z^n = w$.

حالت خاص: $\omega = 1$ ، $z^n = 1$

به دنبال عدد $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ هستیم که

$$1 = z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \Rightarrow r^n = 1 \Rightarrow r = 1$$

r یک عدد حقیقی مثبت است

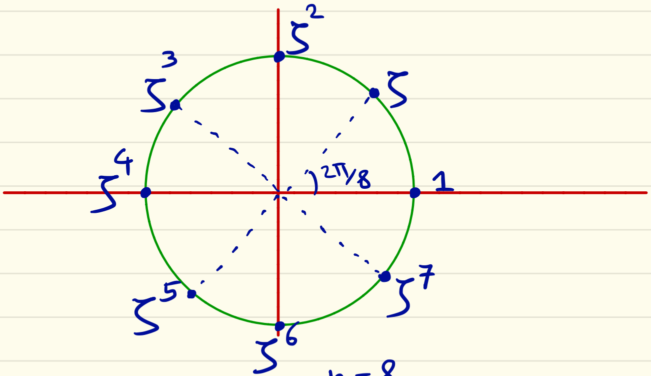
$$n\theta = 2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}$$

برای مقادیر مختلف k

تنها n حالت مختلف زیر به دست می‌آید. (به ازای k و $k+n$ مقدار θ تنها با اختلاف 2π به دست می‌آید)

$$\theta \in \left\{ 0+2k\pi ,\ \frac{2\pi}{n}+2k\pi ,\ \dots ,\ \frac{2(n-1)\pi}{n}+2k\pi \ :\ k\in\mathbb{Z} \right\}$$



$n=8$

جواب‌های معادله $z^n=1$ در صفحه اعداد مختلط یک n-ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع یک خواهند بود.

اگر
$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\zeta^m = \cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n}$$

و درنتیجه مجموعه جواب‌های معادله $z^n=1$ عبارتند از

$$\{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}\}$$

که به آنها ریشه n-ام واحد گفته می‌شود.

تمرین - وقتی $\omega = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ یک عدد مختلط دلخواه است ریشه‌های معادله $z^n = \omega$

را برحسب ρ و φ به دست آورید.

حدود بستگی

هر عدد حقیقی را به صورت $c_0 / c_1 c_2 c_3 \dots$ نشان می‌دهیم.

از آنجا که نمی‌توان بسط یک عدد را تا بی‌نهایت در نظر گرفت، در محاسبات به جای آن یک مقدار تقریبی در نظر می‌گیریم که از یکی به بعد ادامه بسط را مقدار صفر فرض می‌دهیم.

مثلاً عبارت روبرو تا هفت رقم اعشار عدد $\sqrt{2}$ را تقریب می‌زند. $\sqrt{2} \approx 1/4142135$

$$\pi \approx 3/1415926$$

همیشه در محاسبات کامپیوتری (ماشین حساب) به جای مقدار واقعی $\sqrt{2}+\pi$ مقدار تقریبی جمع دو عدد تقریب $\sqrt{2}$ و π را حساب می‌کند.

اگر تابع $f(x)$ را در نظر بگیریم و قرار باشد کامپیوتر مقدار $f(x)$ را برای عدد مشخص x محاسبه کند،

وقتی به این محاسبه می‌شود اعتماد کرد که اگر به جای x مقدار تقریبی آن $\tilde{x}$ را بگذاریم، خروجی کامپیوتر $f(\tilde{x})$

یک تقریب خوب از مقدار $f(x)$ ارائه کند. این ویژگی را پایداری محاسبه برای تابع $f(x)$ گوییم.

مثال- مقدار $f(x)=5x+3$ را با خطای کمتر از 10^{-4} در نقطه $x=\sqrt{2}$ به دست آورید.

$$|f(\tilde{x})-f(\sqrt{2})|<10^{-4} \Leftrightarrow |(5\tilde{x}+3)-(5\sqrt{2}+3)|<10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow 5|\tilde{x}-\sqrt{2}|<10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow |\tilde{x}-\sqrt{2}|<\frac{1}{5}\times 10^{-4}$$

اگر $\tilde{x}=1,41421$ که تا پنج رقم اعشار $\sqrt{2}$ را تقریب می‌زند، $f(\tilde{x})$ با خطای کمتر از 10^{-4} مقدار $f(\sqrt{2})$ را برآورد می‌کند.

مثال - $f(x) = x^2$. مقدار π^2 را با ترتیب 10^{-3} محاسبه کنید.