ریاضی عمومی ۱

۱۴۰۰/۷/۱۲

جلسه دوم

نمایش اعداد حقیقی

$$c_0/c_1c_2c_3\cdots$$

$c_0 \in \mathbb{Z}$ یک عدد صحیح است و $c_1, c_2, c_3, \cdots \in \{0,1,2,\dots,9\}$

سؤال: ضرب دو عدد حقیقی چگونه محاسبه می‌شود؟ مثلاً

$$\sqrt{2} \times 1/0100100010001\cdots = ?$$

ضرب دو عدد طبیعی

$$m\times n = \underbrace{n+n+\cdots+n}_{m\text{ مرتبه}}$$

ضرب دو عدد گویا:

$$\frac{p}{q}\times\frac{m}{n} := \frac{p\times m}{q\times n}$$

ضرب یک عدد طبیعی و یک عدد گنگ.

$$m\times x = \underbrace{x+\cdots+x}_{m\text{ مرتبه}}$$

همچنین ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ

$$\frac{m}{n}\times x = \underbrace{(x+\cdots+x)}_{m\text{ مرتبه}}/n$$

سؤال: در ضرب یک عدد طبیعی با یک عدد گنگ چه اتفاقی برای نمایش حاصلضرب خواهد افتاد؟

$$10 \times \underbrace{c_0/c_1c_2\cdots}_{x} \stackrel{?}{=} (10c_0+c_1)/c_2c_3\cdots$$

وقتی نمایشِ x از یکجا به بعد تمامیِ c_n برابر صفر باشد.

$$x = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \frac{c_3}{10^3} + \cdots$$

$$10x = 10c_0 + c_1 + \frac{c_2}{10} + \frac{c_3}{10^2} + \cdots = (10c_0+c_1)/c_2c_3\cdots$$

اثبات بالا اشتباه است، زیرا جمع بی‌نهایت عدد گویا معنادار نیست. همچنین خاصیت پخشی ضرب در بی‌نهایت عدد.

$$m\times(x+y) = m\times x + m\times y$$

اما اگر بسط نمایشِ x از یکجا به بعد صفر باشد، آنگاه جمع تعداد متناهی عدد گویا را داریم و استدلال برقرار است.

روش تعریف ضرب :

ضرب عدد طبیعی در یک عدد حقیقی

$$x = c_0/c_1c_2\cdots$$

$$x \in [\underbrace{c_0/c_1\cdots c_n}_{\text{اعداد گویا}} \,,\, \underbrace{c_0/c_1\cdots c_n + \frac{1}{10^n}}]$$

اعداد گویا

$$10 \times x \in [\underbrace{10 \times c_0/c_1\cdots c_n} \,,\, \underbrace{10 \times (c_0/c_1\cdots c_n + \frac{1}{10^n})}]$$

$$[(10c_0+c_1)/c_2\cdots c_n \,,\, (10c_0+c_1)/c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^{n-1}}]$$

بنابر تعریف نمایش اعداد حقیقی

$$10 \times x = (10c_0+c_1)/c_2c_3\cdots$$

$$\pi = ۳,۱۴۱۵۹۲۶۵ \ldots$$

$$\pi \in [۳ , ۴] \qquad ۱۰\pi \in [۳۰, ۴۰]$$

$$\pi \in [۳,۱ , ۳,۲] \qquad ۱۰\pi \in [۳۱, ۳۲]$$

$$\pi \in [۳,۱۴ , ۳,۱۵] \qquad ۱۰\pi \in [۳۱,۴ , ۳۱,۵]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\pi \in [۳,۱۴۱۵۹ , ۳,۱۴۱۶] \qquad ۱۰\pi \in [۳۱,۴۱۵۹ , ۳۱,۴۱۶]$$

$$۱۰\pi = ۳۱,۴۱۵۹ \ldots$$

تعریف طرح ضرب به کمک اصل تمامیت.

$x = c_0 / c_1 c_2 \cdots$

x کوچکترین کران بالای مجموعه

$X = \{ c_0 , c_0/c_1 , c_0/c_1c_2 , \cdots \}$

و همینطور

$y = d_0 / d_1 d_2 \cdots$

کوچکترین کران بالای مجموعه

$Y = \{ d_0 , d_0/d_1 , d_0/d_1d_2 , \cdots \}$

$X \times Y = \{ a \times b \mid a \in X , b \in Y \}$

دقت کنید اعضای X و Y گویا هستند و در نتیجه ضرب $a \times b$ معنادار است. کافی است $x \times y$ را کوچکترین کران بالای $X \times Y$ تعریف کنیم.

اعداد مختلط

می‌دانیم ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ برابرند با

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2-4ac$$

وقتی $\Delta<0$ ریشه‌ای برای این چندجمله‌ای نداریم.

در حالت خاص $x^2+1=0$ ریشه حقیقی نداریم. مجموعه اعداد حقیقی را توسعه می‌دهیم به یک مجموعه بزرگتر که در آن مجموعه این چندجمله‌ای ریشه داشته باشد. این ریشه را با $i=\sqrt{-1}$ نشان می‌دهیم.

با اضافه کردن i به مجموعه اعداد حقیقی برای اینکه مجموعه جدید (اعداد مختلط) خواص جمع و ضرب برقرار باشد باید شامل موجوداتی به صورت $x+yi$ باشد که x و y دو عدد حقیقی هستند.

$$\mathbb{C} = \{ x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$z = x + yi \quad , \quad z' = x' + y'i$$

$$z + z' = (x + x') + (y + y')i$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $$\alpha z = (\alpha x) + (\alpha y)i$$

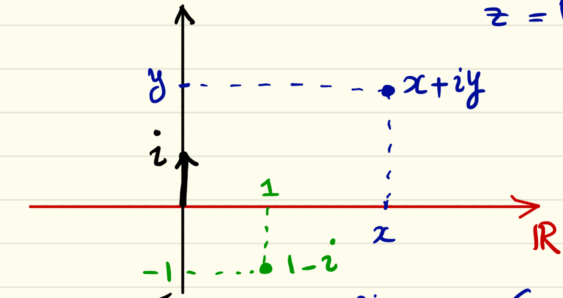
$$z \cdot z' = (x + yi) \cdot (x' + y'i)$$

$$= xx' + xy'i + x'yi + \underbrace{(yi) \cdot (y'i)}_{-yy'}$$

$$= (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$$

تعریف- برای عدد مختلط $z=x+yi$ ، $x=\operatorname{Re} z$ قسمت حقیقی z و $y=\operatorname{Im} z$ قسمت موهومی آن گوییم.

$$z=\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z$$



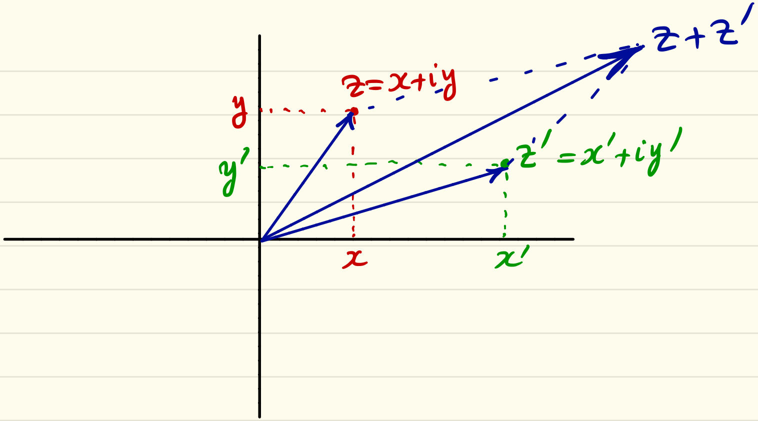
نمایش هندسی اعداد مختلط

هر نقطه‌ای از صفحه بیانگر یک عدد مختلط است.

مبدأ نقطه $(0,0)$ بیانگر عدد مختلط $0+0i$ است که با 0 نشان می‌دهیم.

و نقاط روی محور افقی $(x,0)$ عدد مختلط $x+0i$ را نشان می‌دهند که همان عدد حقیقی x است.

نقطه $1-i$ با رنگ سبز در نمودار بالا نشان داده شده است.



$$z+z' = (x+x') + i\,(y+y')$$

$$\Updownarrow$$

$$(x,y) + (x',y') = (x+x' \,,\, y+y')$$

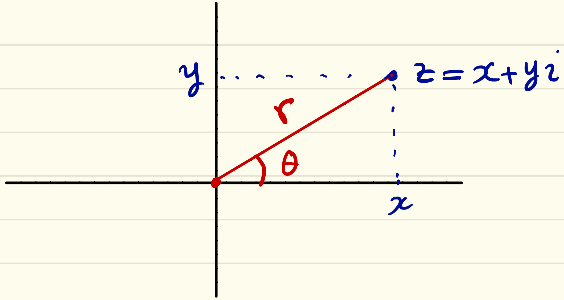
و همچنین ضرب یک عدد حقیقی در یک عدد مختلط

$$\alpha z = \alpha x + \alpha y\, i \qquad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha \cdot (x,y) = (\alpha x \,,\, \alpha y)$$

نمایش قطبی اعداد مختلط



هر نقطه از صفحه را می‌توان با دو پارامتر r فاصله از مبدأ و θ زاویه با سمت مثبت محور حقیقی نشان داد.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \tan\theta = y/x$$

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad z = r\cos\theta + r\sin\theta\, i$$

در نمایش قطبی $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ را قدر مطلق نقطه z می‌شناسیم و θ را آرگومان نقطه z می‌نامیم. $\theta = \arg z$ آرگومان یکتا تعریف نمی‌شود و در واقع جمع θ با هر مضرب صحیحی از 2π آرگومان نقطه z است.

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \Leftarrow \quad z = 1 + \sqrt{3}\, i$$

$$\arg z = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

گزاره. $|z+z'| \le |z| + |z'|$ نامساوی مثلث.

گزاره. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

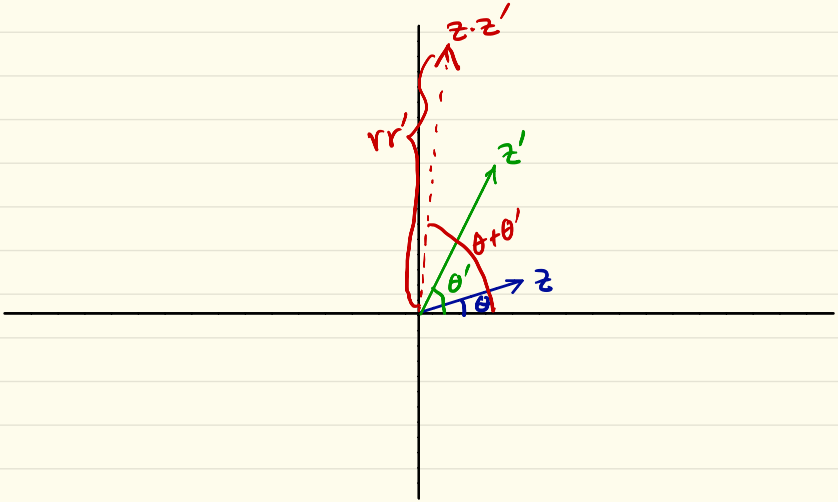
$\arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z'$ (به پیمانه 2π)

$$z = \underbrace{r\cos\theta}_{x} + i\,\underbrace{r\sin\theta}_{y}, \qquad z' = \underbrace{r'\cos\theta'}_{x'} + i\,\underbrace{r'\sin\theta'}_{y'} \qquad r = |z|,\ r' = |z'|$$

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i\,(x'y + xy')$$

$$= rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\,rr'(\cos\theta'\sin\theta + \sin\theta'\cos\theta)$$

$$= rr'\cos(\theta+\theta') + i\,rr'\sin(\theta+\theta')$$



z·z'
rr'
z'
θ+θ'
θ'
z
θ