ریاضی عمومی ۱

۱۴۰۰/۷/۱۰

جلسه اول

مقدمات

اعداد: ساده‌ترین کاربردِ ریاضیات شمارش

۱، ۲، ۳، ...

اینِ مجموعه اعداد را به عنوان اعداد طبیعی می‌شناسیم.

گام دوم در توسعه مفهوم اعداد رفتن سراغ کمیت‌هایی است که قابل شمارش نیستند مثل فاصله دو شیء.

راه‌حل: تعریف یک متر یا واحد برای محاسبه است. با اینِ متر می‌توان اینِ کمیت‌ها را برحسب تعداد آن متر اندازه گرفت.

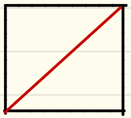
گام سوم: محاسبه نسبت دو کمیت

راه حل: تعریفِ یک واحد جدید به طوری که هرکدام از اینِ پاره‌خط‌ها مضرب صحیحی از اینِ واحد باشند.

نوع سوم اعداد گویا (Q)

$\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۵}{۴}$ ، ...

سؤال: آیا همیشه یک واحد مناسب برای پیدا کردن نسبت دو کمیت وجود دارد؟



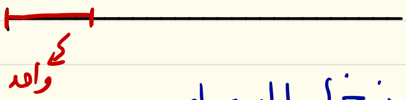
پاسخ: خیر

نسبت قطر مربع به ضلع عدد گویا نیست.

مجموعه اعداد گنگ . Q^c

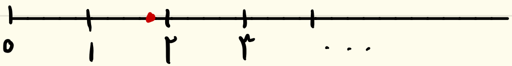
تمرین: $\sqrt{۲}$ عدد گویا نیست.

اعداد حقیقی:



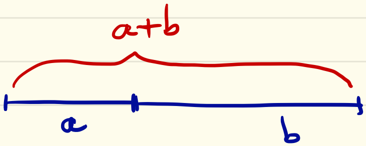
اگر یک نیم خط به همراه واحدی انتخاب کنیم. نسبت فاصله هر نقطه ای از این نیم خط با این واحد

یک عدد حقیقی (مثبت) گوییم.

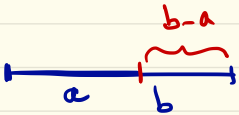


اعمال جبری روی مجموعه اعداد حقیقی :

جمع



تفاضل



اعداد حقیقی منفی :

$$0 - a = -a$$

ضرب :

ترتیب اعداد حقیقی :

$a < b$ ← نقطه a سمت چپ نقطه b قرار دارد.

$c \geq d$

بازه‌ها :

$$(a,b) =]a,b[= \{x : a < x < b\}$$

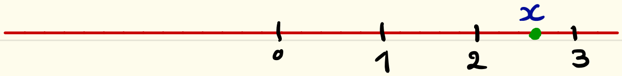
$$[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

$$(a,b] \quad , \quad [a,b) \quad , \quad [a,\infty) = \{x : a \leq x\}$$

$$(-\infty, a) = \{x : x < a\}$$

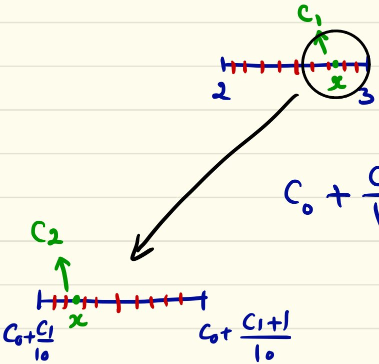
$$(a,b] =]a,b] = \{x : a < x \leq b\}$$

نمایش اعداد :



یادآوری: هر نقطه‌ای از یک خط، یک عدد حقیقی است .

$$c_0 \le x \le c_0+1 \iff x \in [c_0, c_0+1)$$



$$c_0+\frac{c_1}{10} \le x \le c_0+\frac{c_1+1}{10} \iff x \in \left[c_0+\frac{c_1}{10}, c_0+\frac{c_1+1}{10}\right)$$

$$c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{100} \le x \le c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2+1}{100}$$

به همین ترتیب اعداد c_0، c_1، c_2، .... پیدا می‌شوند که $c_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ و

$$c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{100}+\cdots+\frac{c_n}{10^n} \le x \le c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{100}+\cdots+\frac{c_n+1}{10^n}$$

$$x = c_0 / c_1 c_2 c_3 \cdots$$

$$\frac{1}{2} = 0/50000\cdots$$

$$\frac{5}{4} = 1/25000\cdots$$

$$\frac{1}{3} = 0/333\cdots \iff$$

برای هر n داریم

$$\underbrace{\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}}_{0/\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ تا}}} \leq x \leq \underbrace{\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^{n-1}}+\frac{4}{10^n}}_{0/\underbrace{33\ldots}_{n-1}34}$$

$$-\frac{1}{7} = -0/142857142857142857\cdots$$

تمرین - در نمایش اعداد گویا یک الگوی بعد از ممیز تکرار می‌شود.

$$\sqrt{2} = 1/4142135\ldots$$

سؤال: آیا هر نمایش به صورت $x = c_0/c_1c_2c_3\ldots$ یک عدد حقیقی را نشان می‌دهد؟

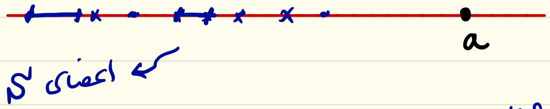
یعنی آیا نقطه x روی خط اعداد حقیقی وجود دارد که در روابط زیر صدق کند؟

$$x \in \left[c_0/c_1\cdots c_n \,,\, c_0/c_1\cdots c_n + \frac{1}{10^n}\right]$$

پاسخی برای این سؤال نداریم و آن را به عنوان یک اصل (یک گزاره درست بدون اثبات) می‌پذیریم. این اصل را به عنوان اصل تمامیت می‌شناسیم. در حقیقت اصل تمامیت می‌گوید محور اعداد حقیقی سوراخ ندارد.

تعریف- کران بالای یک زیرمجموعه S از اعداد حقیقی عددی مثل a است که

$x \le a$ برای هر $x \in S$



لزوماً هر زیرمجموعه ای کران بالا ندارد. مثلاً $S = (۱, \infty)$ یا مجموعه اعداد طبیعی کران بالا ندارد.

مثال- $S = (۱, ۲]$ اعداد $a = ۲, ۳, ۲\sqrt{۲}, \dots$ کران‌های بالا برای S هستند.

به طور مشابه کران پایین تعریف می‌شود.

اصل تمامیت: اگر زیرمجموعه S کران بالا داشته باشد، آنگاه عدد حقیقی a به عنوان کوچکترین کران بالای S وجود دارد.

منظور از کوچکترین کران بالای S عدد a است که دو ویژگی زیر را داشته باشد:

- a کران بالای S است.
- اگر b کران بالای S باشد، آنگاه $a \leq b$.

اگر $x = c_0/c_1c_2c_3\cdots$ آنگاه x کوچکترین کران بالای مجموعه زیر است.

$$S = \{c_0 ,\ c_0/c_1 ,\ c_0/c_1c_2 ,\ c_0/c_1c_2c_3 ,\ \ldots\}$$

نکته- به طور مشابه می‌توان بزرگترین کران پایین را به عنوان اصل تمامیت مطرح کرد.

تمرین - با پذیرش اصل تمامیت، کوچکترین کران بالا یکتا است.

مثال - دو نمایش $2 = 1{,}999\ldots$ یک عدد را نشان می‌دهند.

$$2 \leq 2 \leq 2{,}\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ تا}}1$$

$$1{,}\underbrace{9\ldots9}_{n\text{ تا}} \leq 2 \leq 1{,}\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ تا}} + \frac{1}{10^n} = 2$$

هر دو کوچکترین کران بالای مجموعه زیر هستند.

$$\{1،\ 1{,}9،\ 1{,}99،\ 1{,}999،\ \ldots\}$$