معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و هفت

۱۴۰۰/۱۰/۴

قضیه: اگر در معادله $P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$ توابع $p=\frac{Q}{P}$ و $q=\frac{R}{P}$ در نقطه t_0 تحلیلی باشند، آنگاه هر جواب معادله در t_0 تحلیلی است و شعاع همگرایی سری تیلور جواب حداقل برابر مینیمم شعاع‌های همگرایی سری‌های p و q است.

در یک حالت خاص که R، Q و P توابع تحلیلی هستند، اگر $P(t_0)\neq 0$ آنگاه توابع $p=\frac{Q}{P}$ و $q=\frac{R}{P}$ در همسایگی t_0 تحلیلی هستند و معادله جوابی به صورت $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$ دارد.

اگر $P(t_0)=0$ ، نقطه t_0 را نقطه تکین (Singular) می‌نامیم و ممکن است در این حالت معادله جواب تحلیلی نداشته باشد.

مثال - $(1-t)y''+y'+(1-t)y=0$

نقطه $t=1$ تکین است. نقطه $t=0$ عادی است و مسأله جواب تحلیلی در همسایگی $t=0$ دارد. اگر

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$$

باشد، شعاع همگرایی این سری حداقل به اندازه شعاع همگرایی سری‌های تیلور $p(t)=\frac{1}{1-t}$ و $q(t)=1$ است، یعنی یک.

$$y'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n t^{n-1} \quad , \quad y''(t)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}$$

$$0=(1-t)y''+y'+(1-t)y=(1-t)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}n a_n t^{n-1}+(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n a_n t^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n a_{n+1}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}t^n$$

$n=0$ جمله اضافه است　　　$n=0$ اضافه دارد.　　　$n=0$ جمله اضافه دارد

$$= (2a_2 + a_1 + a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)n\,a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_n - a_{n-1} \right] t^n$$

$$\Rightarrow \quad 2a_2 + a_1 + a_0 = 0, \qquad (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2-1)a_{n+1} + a_n - a_{n-1} = 0 \quad \text{for } n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{(n^2-1)a_{n+1} - a_n + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \qquad n \geq 1$$

اگر بدانیم $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ و بخواهیم $y^{(4)}(0)$ محاسبه کنیم،

$$a_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{-a_1 + a_0}{6} = -\tfrac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{3a_3 - a_2 + a_1}{12} = \frac{1}{12}$$

از طرفی می‌دانیم $a_4 = \dfrac{y^{(4)}(0)}{4!} \Rightarrow y^{(4)}(0) = 2$

$$y(t) = t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + O(t^5)$$

بررسی جواب حول نقاط تکین

مثال : $$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0$$ معادله اویلر

که α و β دو عدد ثابت داده شده هستند.

$P(t) = t^2$ ، $Q(t) = \alpha t$ ، $R(t) = \beta$. $t=0$ یک نقطه تکین این معادله است.

یک حدس معقول برای جواب $y(t) = t^r$ است که با جایگذاری مقدار r را به دست می آوریم.

r هر عدد حقیقی می تواند باشد و تابع t^r به صورت زیر تعریف می شود

$$t^r := \exp(r \ln t) \qquad t > 0$$

$$\frac{d}{dt} t^r = r t^{r-1}$$

$$y(t)=t^r \Rightarrow t^2y''+\alpha t y'+\beta y = r(r-1)t^r+\alpha r t^r+\beta t^r$$
$$=\left(r(r-1)+\alpha r+\beta\right)t^r$$

اگر $F(r)=r^2+(\alpha-1)r+\beta$ آنگاه $y(t)=t^r$ جواب معادله اویلر است اگر و تنها اگر $F(r)=0$.

به $F(r)$ چندجمله‌ای مشخصه متناظر معادله اویلر گفته می‌شود.

<u>حالت اول</u>: $F(r)=0$ دو ریشه حقیقی متمایز $r_1\neq r_2$ دارد. در این صورت $y_1(t)=t^{r_1}$ و $y_2(t)=t^{r_2}$ دو جواب مستقل معادله اویلر هستند.

دقت کنید t^r در صورتی در $t=0$ تحلیلی است که r یک عدد صحیح مثبت باشد.

مثال - معادله $2t^2y''-ty'+y=0$ دارای دو جواب $y_1(t)=t$ و $y_2(t)=t^{1/2}$ است.

همانطور که مشاهده کردید علی‌رغم آنکه $t=0$ نقطه تکین است، ممکن است جواب تحلیلی باشد یا نه.

مثال- $t^2y''+ty'-y=0 \Rightarrow r(r-1)+r-1=0$

$\Rightarrow r^2-1=0 \Rightarrow r=\pm 1 \Rightarrow y_c(t)=c_1 \underbrace{t}_{\text{جواب کران‌دار}} + c_2 \underbrace{t^{-1}}_{\text{جواب بیکران}}$

نکته- جوابهای $y(t)=t^r$ که در بالا تعریف کردیم برای $t>0$ تعریف شده‌اند. اگر بخواهیم معادله را برای $t<0$ نیز حل کنیم کافی است با تغییر متغیر $u(t)=y(-t)$ برای $t<0$ معادله را حل کنیم.

$$u'=-y'(-t) \quad , \quad u''(t)=y''(-t)$$

$$0=(-t)^2y''(-t)+\alpha(-t)y'(-t)+\beta y(-t) = t^2u''(t)+\alpha t u'(t)+\beta u(t) \qquad t>0$$

اگر بدانیم $u(t)=c_1t^{r_1}+c_2t^{r_2}$ است پس

$$y_c(t)=c_1|t|^{r_1}+c_2|t|^{r_2}$$

حالت دوم: $F(r) = r^2 + (\alpha - 1) r + \beta = 0$ دو ریشه مختلط $\lambda \pm i\mu$ دارد.

$$t^{\lambda \pm i\mu} = \exp((\lambda \pm i\mu) \ln t) = \exp(\lambda \ln t) \exp(\pm i \mu \ln t)$$

$$= t^{\lambda} \left[\cos(\mu \ln t) \pm i \sin(\mu \ln t) \right]$$

در نتیجه این تابع مختلط در معادله صدق می‌کند و باید قسمت حقیقی و موهومی آن جواب‌های معادله باشند.

$$y_c(t) = c_1 |t|^{\lambda} \cos(\mu \ln |t|) + c_2 |t|^{\lambda} \sin(\mu \ln |t|)$$

حالت سوم: $F(r)=0$ ریشه تکراری $r_1=r_2$ دارد. در این حالت $y_1(t)=t^{r_1}$ یک جواب معادله است.

برای پیدا کردن جواب می‌توان از روش کاهش مرتبه استفاده کرد. $y(t)=t^{r_1}u(t)$ در معادله جایگذاری کنید

u در یک معادله مرتبه اول صدق می‌کند. (تمرین: نشان $u(t)=\ln t$ جواب آن معادله است)

یک روش دیگر

$$\mathcal{L}[t^r]=F(r)\,t^r \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial r}} \mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial r}e^{r\ln t}\right]=F'(r)\,t^r+F(r)\frac{\partial}{\partial r}e^{r\ln t}$$

عملگر دیفرانسیلی متناظر معادله اویلر

در رابطه بالا قرار دهید $r=r_1$. چون r_1 ریشه تکراری است $F(r_1)=F'(r_1)=0$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\ln t\, e^{r_1\ln t}\right]=0 \Rightarrow$$ $\ln t \times t^{r_1}$ جواب معادله است.

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y_c(t)=c_1|t|^{r_1}+c_2|t|^{r_1}\ln|t|$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و هشت

۱۴۰۰/۱۰/۶

تعریف - در معادله $P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0$ که ضرایب P، Q و R تحلیلی هستند و t_0 نقطه تکین باشد،

یعنی $P(t_0)=0$ این نقطه را تکین منظم می‌نامیم هرگاه توابع $(t-t_0)\dfrac{Q(t)}{P(t)}$ و $(t-t_0)^2\dfrac{R(t)}{P(t)}$ در نقطه t_0 تحلیلی باشند.

این معادل است با اینکه $\lim\limits_{t\to t_0}(t-t_0)\dfrac{Q(t)}{P(t)}$ و $\lim\limits_{t\to t_0}(t-t_0)^2\dfrac{R(t)}{P(t)}$ وجود داشته و متناهی باشند.

مثال - معادله اویلر $t^2y''+\alpha t y'+\beta y=0$. $P(t)=t^2,\ Q(t)=\alpha t,\ R(t)=\beta$

$t_0=0$ نقطه تکین منظم است.

مثال - معادله بسل $t^2y''+ty'+(t^2-\nu^2)y=0$ برای مقدار ثابت $\nu\geq 0$. نقطه $t=0$ تکین منظم است.

مثال - معادله چبیشف $(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y=0$

$t=\pm 1$ تکین منظم است.

$$(t-1)\times\frac{Q}{P}=(t-1)\times\frac{-t}{1-t^2}=\frac{t}{1+t}$$

$$(t-1)^2\times\frac{R}{P}=(t-1)^2\times\frac{\alpha^2}{1-t^2}=(1-t)\frac{\alpha^2}{1+t}$$

فرض کنیم $t=0$ نقطه تکینِ منظم $P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0$ باشد.

$$p(t)=\frac{Q}{P} \quad , \quad q=\frac{R}{P}$$

توابع tp و t^2q در $t=0$ تحلیلی هستند.

$$tp(t)=p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots$$

$$t^2q(t)=q_0+q_1t+q_2t^2+\cdots$$

معادله بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$0=t^2y''+t\big(tp(t)\big)y'+\big(t^2q(t)\big)y=t^2y''+t(p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots)y'+(q_0+q_1t+\cdots)y$$

حدس جواب: $y(t)=t^r\times$ تابع تحلیلی

$$=t^r\times\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+r}$$

همیشه می‌توان فرض کرد $a_0\neq 0$. همچنین r لزوما عدد صحیح نیست.

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} \implies y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r-1}$$

$$y''(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r-2}$$

$$0=t^2y''+t\Big(\sum_{n=0}^{\infty}p_n t^n\Big)y'+\Big(\sum_{n=0}^{\infty}q_n t^n\Big)y$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r}+\Big(\sum_{n=0}^{\infty}p_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r}\Big)+\Big(\sum_{n=0}^{\infty}q_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+r}\Big)$$

$$=\left[r(r-1)+p_0 r+q_0\right]a_0 t^r+\left[\left((r+1)r+p_0(r+1)+q_0\right)a_1+(p_1 r+q_1)a_0\right]t^{r+1}$$
$$+\cdots+\Big(\left[(n+r)(n+r-1)+p_0(n+r)+q_0\right]a_n+\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k\Big)t^{n+r}$$
$$+\cdots$$

با فرض $a_0\neq 0$ باید

$$F(r)=r(r-1)+p_0 r+q_0=0$$

که درحقیقت معادله مشخصه معادله اویلر $t^2y'' + tp_0y' + q_0y = 0$ است.

به علاوه باید برای $n = 1, 2, \cdots$

$$a_n = \frac{-\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+r)p_{n-k} + q_{n-k}\right)a_k}{F(n+r)} \qquad (*)$$

اگر $r_2 < r_1$ دو ریشه حقیقی متمایز $F(r) = 0$ باشند، برای $r = r_1$ به کمک رابطه بازگشتی بالا همه ضرایب a_n برحسب a_0 به دست می‌آیند. زیرا $F(n+r_1) \neq 0$ برای $n = 1, 2, \ldots$

اما برای $r = r_2$ ممکن است $F(n+r_2) = 0$ که این درصورتی اتفاق می‌افتد که $n + r_2 = r_1$ به ازای $1 \leq n$

قضیه (روش فربنیوس) فرض کنید $t=0$ نقطه تکین منظم $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ باشد که

سری‌های تیلور $tp(t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ و $t^2q(t)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$ در بازه $-\rho<t<\rho$ همگرا هستند.

فرض کنید r_1 و r_2 ریشه‌های حقیقی معادله $F(r)=r(r-1)+p_0 r+q_0$ باشند که $r_2<r_1$.

آنگاه معادله در هر یک از بازه‌های $0<t<\rho$ یا $-\rho<t<0$ جوابی به صورت

$$y_1(t)=|t|^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)\, t^n \quad , \quad a_0(r_1)=1$$

حالت اول: r_1-r_2 صفر یا عدد صحیح مثبت نیست. در این صورت جواب دوم نیز به صورت زیر است:

$$y_2(t)=|t|^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)\, t^n$$

تذکر: از رابطه (*) با قرار دادن $a_0=1$ در شرایط قضیه قبل همیشه دنباله a_n به عنوان تابعی از r قابل محاسبه است.
برای همین می‌توانیم $a_n(r)$ را تابعی از r در نظر بگیریم.

تذکر: برای تعریف چندجمله‌ای مشخصه $F(r)$ کافی است $p_0=\lim\limits_{t\to 0} t\,p(t)$ و $q_0=\lim\limits_{t\to 0} t^2 q(t)$.

مثال- $2ty''+y'+ty=0$

$t=0$ نقطه تکین منظم است. $q(t)=\frac{1}{2}\ ,\ p(t)=\frac{1}{2t} \Leftarrow p_0=\frac{1}{2}\ ,\ q_0=0$

$$F(r)=r(r-1)+\frac{1}{2}r=0 \Rightarrow r=0,\frac{1}{2}$$

$$y_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n \quad , \quad y_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n t^{n+1/2}$$

$$b_n=\frac{-\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\right)b_k}{F(n+\frac{1}{2})}$$

$p_n=0$ برای $n\geq 1$

$q_2=\frac{1}{2}$ ، $q_n=0$ برای $n\neq 2$

$$\Rightarrow b_n=-\frac{1}{2}b_{n-2}/(n+\tfrac{1}{2})n$$

$$b_0 = 1 \;,\; b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{2n+1} = 0$$

$$b_{2n} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(4k+1)}$$

$$y_2(t) = t^{1/2}\left[1 - \frac{t^2}{10} + \frac{t^4}{17\times 8\times 10} - \cdots\right]$$

نکته: اگر $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$ ریشه‌ها مختلط $F(r)=0$ باشند، چون $r_1 - r_2 = 2i\beta$ پس $F(n+r_1) \neq 0$ و
$F(n+r_2) \neq 0$ و رابطه (*) ضرایب جواب را تعیین می‌کنند.

$$y_1(t) = |t|^{\alpha} \cos(\beta \ln|t|) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y_2(t) = |t|^{\alpha} \sin(\beta \ln|t|) \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

دو جواب معادله خواهند بود.

روش فربنیوس ، حالت دوم : وقتی $r_1 = r_2$.

اگر $y(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, t^{n+r}$ را در نظر بگیریم که $a_n(r)$ از رابطه (*) تولید می‌شوند

معادله دیفرانسیل ← $L[y(t,r)] = F(r)\, a_0 \cdot t^r$

$F(r_1)=0$ و $F'(r_1)=0$ از رابطه بالا نسبت به r مشتق بگیرید :

$$L\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r)\, t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) \ln t \cdot t^{n+r}\right] = a_0 F'(r) t^r + a_0 F(r) \ln t \cdot t^r$$

اگر $r=r_1$ قرار دهیم ، سمت راست برابر صفر است . درنتیجه جواب دوم به صورت زیر است :

$$y_2(t) = \ln|t|\, y_1(t) + |t|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_1)\, t^n$$

مثال- معادله بسل مرتبه صفر $t^2y'' + ty' + t^2y = 0$

$$p(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow tp(t) = 1 \Rightarrow P_0 = 1, \quad P_1 = P_2 = \cdots = 0$$

$$q(t) = 1 \Rightarrow t^2q(t) = t^2 \Rightarrow q_2 = 1, \quad q_0 = q_1 = q_3 = \cdots = 0$$

$$F(r) = r(r-1) + r = r^2$$

$r=0$ ریشه تکراری است.

$$a_n(r) = \frac{-\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+r)P_{n-k} + q_{n-k}\right)a_k(r)}{F(n+r)} = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}$$

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$$

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\, t^n \qquad a_0 = 1, \; a_2(r) = \frac{-1}{(2+r)^2}, \quad a_4(r) = \frac{1}{(2+r)^2(4+r)^2}$$

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m}{(2+r)^2 \cdots (2m+r)^2}$$

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} t^n \rightarrow \text{تحلیلی است}$$

$$y_2(t) = \ln|t| \times y_1(t) + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(0)\, t^n}_{\text{تابع تحلیلی}}$$

$$\frac{a_{2m}'(0)}{a_{2m}(0)} = \frac{d}{dr} \ln|a_{2m}(r)| \Big|_{r=0} = -2 \frac{d}{dr}\left[\ln(r+2) + \cdots + \ln(r+2m)\right]\Big|_{r=0}$$

$$= -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}\right] = -\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right] = -H_m$$

$$a_{2m}'(0) = -a_{2m}(0) \times H_m = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m!)^2} \times H_m$$

روش فروبنیوس، حالت سوم: اگر $r_1 - r_2 = N$ عدد صحیح مثبت باشد

$$y_2(t) = a\, y_1(t) \ln|t| + |t|^{r_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right]$$

برای یک مقدار ثابت a که با جایگذاری در معادله تعیین می‌شود.

مشابه حالت ریشه تکراری قرار دهید $y(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) t^{n+r}$ که ضرایب $a_n(r)$ با فرمول $(*)$ تعریف می‌شوند.

در حالت کلی تابع $a_N(r)$ در نقطه r_2 پیوسته نیست، چون $F(\underbrace{N+r_2}_{r_1})=0$. ولی اگر قرار دهیم $a_0(r) = r - r_2$ آنگاه

همه جملات $a_n(r_2) = 0$ که $0 \le n \le N-1$. در نتیجه صورت و مخرج کسر $(*)$ برای جمله a_N در نقطه $r = r_2$ هر دو صفر می‌شوند.

و تابع $a_N(r)$ در $r = r_2$ پیوسته خواهد شد. لذا همه ضرایب $a_n(r)$ توابعی خوش‌تعریف و مشتق‌پذیر برای $r_2 - 1 < r$ هستند.

با این انتخاب ضرایب داریم:

$$\mathcal{L}[y(t,r)] = a_0(r) F(r) t^r = (r - r_1)(r - r_2)^2 t^r$$

حال از رابطه بالا نسبت به r در نقطه r_2 مشتق بگیرید.

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial r}y(t,r_2)\right] = \left((r-r_2)^2 t^r + 2(r-r_1)(r-r_2)t^r + (r-r_1)(r-r_2)^2(\ln t)\, t^r\right)\Big|_{r=r_2} = 0$$

در نتیجه $\frac{\partial}{\partial r}y(t,r_2)$ جواب معادله است.

$$\frac{\partial}{\partial r}y(t,r_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)\, t^{n+r_2}\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_2)\, t^{n+r_2}$$

اما $a_0(r_2)=0$ و از رابطه $(*)$ نتیجه می‌شود که $a_1(r_2) = \cdots = a_{N-1}(r_2) = 0$

و در کسر $(*)$ در نقطه $r=r_2$ صورت و مخرج صفر می‌شود که $r=r_2$ ریشه ساده مخرج است. بنابراین $a_N(r)$

در نقطه $r=r_2$ تعریف می‌شود و قرار می‌دهیم $a = \lim_{r\to r_2} a_N(r)$.

$$a_{N+1}(r_2) = \frac{-((N+r_2)P_1+q_1)a}{F(N+1+r_2)} = \frac{-(r_1P_1+q_1)a}{F(1+r_1)}$$

از طرف دیگر برای محاسبه $y_1(t)=\sum \tilde{a}_n(r_1)t^{n+r_1}$ با قرار دادن $\tilde{a}_0(r_1)=1$ و روابط بازگشتی $(*)$ می‌دانیم

$$\tilde{a}_1(r_1) = \frac{-(r_1P_1+q_1)}{F(1+r_1)} = a_{N+1}(r_2)/a$$

به طور مشابه نتیجه می‌شود $a_{N+n}(r_2) = \tilde{a}_n(r_1)\times a$ برای $n\geq 0$.

$$\frac{\partial}{\partial r}y(t,r_2)= a\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_n(r_1)t^{n+N+r_2}\ln t + t^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_2)t^n\right]$$

$$= a\,y_1(t)\ln t + t^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_2)t^n\right]$$

مثال ــ معادله بسل مرتبه یک $t^2y''+ty'+(t^2-1)y=0$

$$tp(t)=1 \quad , \quad t^2q(t)=t^2-1$$

$$P_0=1\,,\ P_1=P_2=\cdots=0\ ,\quad q_0=-1\,,\ q_2=1\,,\ q_1=q_3=q_4=\cdots=0$$

$$F(r) = r(r-1) + r - 1 = r^2 - 1 \ , \quad r_1 = 1 \ , \ r_2 = -1 \ , \quad N = r_1 - r_2 = 2$$

از رابطه (*) نتیجه می‌شود $a_n(r) = \dfrac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)^2 - 1} \ , \quad a_1 = 0$

اگر $a_0(r) \equiv 1$ آنگاه

$$a_{2m}(r_1) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\, m!\, (m+1)!}$$

و $y_1(t) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, t^{2m+1}}{2^{2m}\, m!\, (m+1)!}$.

برای پیداکردن جواب دوم قرار می‌دهیم $a_0(r) = r - r_2 = r+1$ و خواهیم داشت:

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m \cancel{(r+1)}}{(2m+r+1)(2m+r-1)^2(2m+r-3)^2 \cdots (r+3)^2 \cancel{(r+1)}} \ , \quad \lim_{r \to -1} a_2(r) = \lim_{r \to -1} \frac{-1}{r+3} = -\tfrac{1}{2}$$

$$a_{2m}(r_2) = \frac{(-1)^m}{(2m)(2m-2)^2 \cdots (2)^2} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}\, m!\, (m-1)!}$$

$$\frac{a_{2m}'(r_2)}{a_{2m}(r_2)} = \frac{d}{dr} \ln |a_{2m}(r)| \Big|_{r=-1} = -\frac{1}{2m} - \frac{2}{2m-2} - \cdots - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}[H_m + H_{m-1}]$$

$$y_2(t) = a\, y_1(t) \ln t + t^{r_2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_2)\, t^n\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{2^{2m}\, m!\, (m+1)!} + t^{-1}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} [H_m + H_{m-1}]}{2^{2m}\, m!\, (m-1)!}\, t^{2m}\right)$$