

معادلات دیفرانسیل

۱۴۰۰، ۹، ۲۷

جلسه بیست و پنجم

کامپوزیشن (پیچش)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

تعریف

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]$$

سنتز

سنتز را بلاک اینتر می‌گویند. اگر $F(s) = \mathcal{L}[f]$ و $G(s) = \mathcal{L}[g]$ بدانیم

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f * g$$

به عنوان مثال در حل معادله $ay'' + by' + cy = f(t)$ با شرایط اولیه $y(0) = y_0$ ، $y'(0) = y'_0$ و وارد کردن

$Y(s) = \mathcal{L}[y]$ با تبدیل لاپلاس نتیجه می‌شود:

$$Y(s) = \frac{as+b}{as^2+bs+c} y_0 + \frac{a}{as^2+bs+c} y'_0 + \frac{F(s)}{as^2+bs+c} \quad F(s) = \mathcal{L}[f]$$

$$, y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{as+b}{as^2+bs+c} \right] \quad \text{آر}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a}{as^2+bs+c} \right]$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 \times y_1(t) + y'_0 \times y_2(t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{as^2+bs+c} \right]$$

y_1 و y_2 جواب معادله همکن هستند (یعنی $f=0$) که در شرایط اولیه $y_1(0)=1, y'_1(0)=0$

$$y_2(0)=0, y'_2(0)=1$$

مصدق می‌کند. $y_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{as^2+bs+c} \right]$ جواب خصوصی معادله نا همکن است که در شرایط

$$y_p(0) = y'_p(0) = 0 \quad \text{اولیه}$$

مصدق می‌کند.

بہک کوئی کانفرنس طریق :

$$y_p(t) = \frac{1}{a} (f * y_2(t))$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{a} y_2 \right] = \frac{1}{as^2 + bs + c} \quad \text{زیر}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(t-\tau) y_2(\tau) d\tau = \frac{1}{a} \int_0^t f(\tau) y_2(t-\tau) d\tau$$

اِسبَت - $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau dt$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^t [e^{-s(t-\tau)} f(t-\tau)] [e^{-s\tau} g(\tau)] d\tau dt$$

$$= \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} [e^{-s(t-\tau)} f(t-\tau)] [e^{-s\tau} g(\tau)] dt d\tau$$

↗ جابجائي وائٹرال

$$= \int_0^{\infty} [e^{-s\tau} g(\tau)] \int_0^{\infty} e^{-s\theta} f(\theta) d\theta d\tau$$

$$= \left[\int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau \right] \left[\int_0^{\infty} e^{-s\theta} f(\theta) d\theta \right]$$

$$= \mathcal{L}[g] \cdot \mathcal{L}[f]$$

خاص کاتولون :

$$f * g = g * f \quad (i)$$

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_t^0 f(\theta) g(t-\theta) (-d\theta) \\ &\quad \tau = t - \theta \quad \text{تغییر} \\ &= \int_0^t g(t-\theta) f(\theta) d\theta = (g * f)(t) \end{aligned}$$

$$f * (g_1 + g_2) = (f * g_1) + (f * g_2) \quad (ii)$$

$$f * 0 = 0 * f = 0 \quad (iii)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (iv)$$

$$\int_0^t f(t-\tau) d\tau = f * 1 \neq f \quad \text{نکته:}$$

کاربرد تبدیل لاپلاس برای دستگاه خطی :

$$\mathcal{L}[X] = \int_0^{\infty} e^{-st} X(t) dt =: \hat{X}(s)$$

بردار ←

بزرگ خواص تبدیل لاپلاس در اینجا

$$\mathcal{L}[\dot{X}] = s \hat{X}(s) - X(0)$$

در اینجا برای حل دستگاه $\dot{X} = AX + f(t)$ (که f تابع برداری است) و شرط اولیه $X(0) = X_0$ با تبدیل لاپلاس مواجه داشت :

$$s \hat{X}(s) - X_0 = A \hat{X}(s) + \hat{F}(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A) \hat{X}(s) = X_0 + \hat{F}(s)$$

$$\hat{X}(s) = (sI - A)^{-1} X_0 + (sI - A)^{-1} \hat{F}(s)$$

• $\Phi(0) = I$ $\dot{X} = AX$ مناسبت $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1})$

$$X_p(t) = \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1} \hat{F}(s)) = (\Phi * f)(t)$$

$$= \int_0^t \Phi(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ معلوم

$$s\hat{X}(s) - X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \hat{X} + \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix} \Rightarrow (sI - A)\hat{X} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{s-1} \\ 1 + \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-1)\hat{x}_1 - 4\hat{x}_2 = \frac{2s-1}{s-1} \\ -\hat{x}_1 + (s-1)\hat{x}_2 = \frac{s}{s-1} \end{cases}$$

$$\hat{X}(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{s-3} + \frac{1}{s^2-1} \\ \frac{1}{s-3} + \frac{s}{(s^2-1)(s-3)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{X}) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} + \sinh t \\ e^{3t} + \frac{3}{8}e^{3t} - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2-4} \begin{pmatrix} s-1 & 4 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1/2}{s-3} + \frac{1/2}{s+1} & \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+1} \\ \frac{1/4}{s-3} - \frac{1/4}{s+1} & \frac{1/2}{s-3} + \frac{1/2}{s+1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}((sI-A)^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}) & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و ششم

۱۴۰۰/۹/۲۹

سری توانی:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (t-t_0)^n$$

در حل معادله تفاضلی می توان فرض کرد جواب به صورت
است که ضرایب $C_0, C_1, C_2, \dots$ مجهول هستند. پس از جایگذاری y در معادله روابط برای این ضرایب پیدا می شود که با حل آن
جواب به دست می آید. عبارت $\sum C_n (t-t_0)^n$ را سری توانی به مرکز t_0 می گویند.

تعیین - اگر برای تابع $y(t)$ به شکل یک سری توانی نوشته شود در یک محاسبات t_0 آن را در نقطه t_0 کلی می گیریم.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (t-t_0)^n = C_0 + C_1 (t-t_0) + C_2 (t-t_0)^2 + \dots$$

مقدار $0 < p$ را شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (t-t_0)^n$ می گیریم. هرگاه برای هر $|t-t_0| < p$ سری همگرایی
در p نیز گزینیم معادله باشد که این اتفاق می افتد.

به کمک آزمون ریشه سری $\sum c_n(t-t_0)^n$ وقتی هژا است که $\lim \sqrt[n]{|c_n(t-t_0)^n|} < 1$

بنابراین اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda$ آنگاه سری توانی برای $\rho = \frac{1}{\lambda} < |t-t_0|$ هژا است.

حقیقی بنابر آزمون نسبت باید $\lim \left| \frac{c_{n+1}(t-t_0)^{n+1}}{c_n(t-t_0)^n} \right| < 1$. بنابراین اگر $\lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda$

آنگاه $\rho = \frac{1}{\lambda}$ شعاع هژا است.

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad \text{مثال -}$$

$\leftarrow c_n = 1$ بنابراین شعاع هژا $|t| < 1$ است.

در شُعاع هکدام یک سری توانی حاصل زیر برآور است : $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n = c_0 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + \dots$
 باز هکدامی سری با $|t-t_0| < \rho$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (t-t_0)^{n-1} = c_1 + 2c_2(t-t_0) + 3c_3(t-t_0)^2 + \dots \quad (1)$$

شُعاع هکدامی سری مجدد نیز م است.

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n \right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n (t-t_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) (t-t_0)^n \quad (2)$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n (t-t_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n \quad (3)$$

$$a_0 = c_0 d_0$$

$$a_1 = c_0 d_1 + c_1 d_0$$

$$a_2 = c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0, \dots$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n (t-t_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n \quad (4)$$

$$c_0 = a_0 d_0 \Rightarrow a_0 = c_0 / d_0$$

$$c_1 = a_0 d_1 + a_1 d_0 \Rightarrow a_1 = ?$$

:

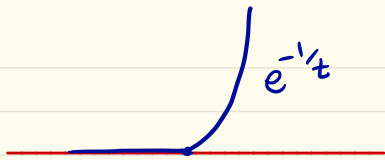
$$y(t) = \sum c_n (t-t_0)^n = c_0 + c_1 (t-t_0) + c_2 (t-t_0)^2 + \dots \quad (5)$$

$$y(t_0) = c_0, \quad y'(t_0) = c_1, \quad y''(t_0) = 2c_2, \dots, \quad y^{(n)}(t_0) = n! c_n$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!} (t-t_0)^n$$

← سری تیلور تابع y حول نقطه t_0

توضیح جدید تابع تکاملیم: تابعی که به نسبت با مشتق پذیر است و در یک بازه حول t_0 برابر سری تیلورش باشد.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-1/t} & t > 0 \end{cases}$$

فونکشن باریتمتیک ندرلیت و $f^{(n)}(0) = 0$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots \quad \text{مثال}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-t)^2} = 1 + 2t + 3t^2 + \dots \quad \text{مشتق گرفتن}$$

$$\begin{aligned} \text{ضرب} \quad \frac{1}{1-t} \times \frac{1}{1-t} &= (1 + t + t^2 + \dots)(1 + t + t^2 + \dots) \\ &= 1 + 2t + \dots \end{aligned} \quad \text{باروش ضربه گرفتن}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \quad \text{با جایگزینی } t \leftarrow -t$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad \text{با جایگزینی } t^2$$

$$\int_0^t \frac{ds}{1+s^2} = \tan^{-1} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots$$

درست کنید بازه همگرا $|t| < 1$ است.

$$\frac{1}{2t-3} = \frac{1}{-3(1-\frac{2}{3}t)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2t}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2^n}{3^{n+1}} t^n$$

بازه همگرا $|\frac{2t}{3}| < 1$ است یا به طور مساوی $|t| < \frac{3}{2}$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

سُغَاحِ هَلَالِ اِي سِرِّ نَبِيَّتِ اسْت.

مَثَل - سِرِّ تِلْوَ رَافِع $\frac{1}{2t-3}$ رَافِع $t_0=1$ بَنُوِيْد .

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Rightarrow \frac{1}{1-(t-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} (t-a)^n \quad |t-a| < 1$$

$$\frac{1}{2(t-1)-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (t-1)^n \Rightarrow |2(t-1)| < 1 \Rightarrow |t-1| < \frac{1}{2}$$

کاربرد برای حل معادله دیفرانسیل: $y'' + y = 0$ ، با شرایط اولیه $y(0) = y_0$ و $y'(0) = y'_0$.

فرض کنید جواب معادله تحلیلی باشد و به صورت $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ ضرایب c_n مجهول هستند.

در واقع $c_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$ که با برداردهای مساوی $c_0 = y_0$ ، $c_1 = y'_0$.

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}$$

بعد از فرض کنیم شعاع همگرایی جواب m باشد. سری y'' نیز در $|t| < m$ همگرا است. به علاوه سری $y + y''$ نیز در این شعاع همگرایی برابر است با:

$$(2c_2 + 6c_3t + 3 \times 4c_4t^2 + \dots) + (c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots) = 0$$

$$\Rightarrow 2c_2 + c_0 = 0, \quad 6c_3 + c_1 = 0, \quad 12c_4 + c_2 = 0, \quad \dots$$

$$y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ n=m+2 \end{matrix}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) C_{m+2} t^m \xrightarrow{m=n} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) C_{n+2} t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) C_{n+2} + C_n] t^n = 0$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1) C_{n+2} = -C_n \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow C_{2k} = -\frac{C_{2k-2}}{2k(2k-1)} = -\frac{C_{2k-4}}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)} = \dots = \frac{(-1)^k}{(2k)!} C_0$$

$$C_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} C_1$$

$$\Rightarrow y(t) = C_0 \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} + C_1 \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

$$= \frac{C_0}{y_0} \times \cos t + \frac{C_1}{y'_0} \times \sin t$$

در روش سری توانی، فرض می‌کنیم معادله جواب تحلیلی دارد. قضیه زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

قضیه: اگر در معادله $P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$ توابع $p = \frac{Q}{P}$ و $q = \frac{R}{P}$

در نقطه t_0 تحلیلی باشند، آنگاه هر جواب معادله در t_0 تحلیلی است. رُشع همگانی سری سکولر جواب صدق را برابر در نیم رُشع‌ها همگانی سری p و q است.

$$\text{مثال - } (1-t^2)y'' + 3ty' + y = 0$$

$$p(t) = \frac{3t}{1-t^2}, \quad q(t) = \frac{1}{1-t^2}$$

در نقطه $t_0 = 0$ تحلیلی هستند و رُشع همگانی سری سکولر آنها برابر یک است. بنابراین جواب معادله در $t_0 = 0$ تحلیلی است.

و رُشع همگانی سری سکولر آن برابر یک است. در $t_0 = 2$ نیز جواب تحلیلی است.

دقت کنید در نقطه $t_0 = 1$ چرا - ممکن است تحلیلی باشد، هر صید قصه فوق وجود آن را قصصین می کند.