معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و یکم

۱۴۰۰/۹/۱۳

مثال - $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{t}\cos 2t \end{pmatrix}$ شرط اولیه $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 4\right]$$

$\lambda = 1 , 1 \pm 2i$ مقادیر ویژه این ماتریس هستند.

$$(A - I)V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = v_3 = -\frac{2}{3} v_2$$

بردار ویژه متناظر $\lambda = 1$، $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$(A - (1+2i)I)V = 0 \quad \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = 0 , \; v_2 = i v_3$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$ بردار ویژه متناظر $1 \pm 2i$

$$e^{t}\left[\cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \qquad e^{t}\left[\cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -2e^{t} & 0 & 0 \\ 3e^{t} & e^{t}\cos 2t & e^{t}\sin 2t \\ -2e^{t} & -e^{t}\sin 2t & e^{t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1} = \Phi(t) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \Phi(t) \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t - \sin 2t & \cos 2t & \sin 2t \\ 1 - \frac{3}{2}\sin 2t - \cos 2t & -\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

$$X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{s}\cos 2s \end{pmatrix} ds$$

روش حدسی (ضرایب نامعین)

$$\dot{X} = AX + f(t)$$

مثلاً $f(t) = e^{\alpha t} V$ حدس معقول برای جواب $X_p(t) = e^{\alpha t} U$

$$\Rightarrow \quad \dot{X}_p = \alpha e^{\alpha t} U \quad \Rightarrow \quad \alpha e^{\alpha t} U = A(e^{\alpha t} U) + e^{\alpha t} V$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha I - A) U = V$$

اگر α مقدار ویژهٔ ماتریس A نباشد، $\alpha I - A$ وارون‌پذیر است و بردار U از رابطهٔ بالا به راحتی به دست می‌آید.

اگر α مقدار ویژه باشد، به جای حدس فوق قرار می‌دهیم

$$X_p(t) = e^{\alpha t} \times \text{چندجمله‌ای برداری} = e^{\alpha t} \left[U_0 + tU_1 + \frac{t^2}{2} U_2 + \cdots + \frac{t^k}{k!} U_k \right]$$

$$\dot{X}_p = \alpha X_p + e^{\alpha t}\left[U_1 + tU_2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}U_k\right] = AX_p + e^{\alpha t}V$$

$$\Rightarrow \quad U_1 - V + tU_2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}U_k = (A-\alpha I)\left[U_0 + tU_1 + \cdots + \frac{t^k}{k!}U_k\right]$$

$$\begin{cases} (A-\alpha I)U_0 = U_1 - V \\ (A-\alpha I)U_1 = U_2 \\ \vdots \\ (A-\alpha I)U_{k-1} = U_k \\ (A-\alpha I)U_k = 0 \end{cases}$$

$$(A-\alpha I)^k U_1 = 0 \quad , \quad (A-\alpha I)^{k-1} U_1 = U_k$$

U_1 بردار ویژه تعمیم یافته مرتبه k است.

نکته - فقط دستگاه معادلات بالا به ازای هر بردار V دارای جواب است وقتی k تکرر مقدار ویژه α است.

مثال- $\dot{X} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}2e^{-t}\\ 0\end{pmatrix}$

مقادیر ویژه $A = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ عبارتند از -1 و -3 جمله ناهمگنی $f(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$

اگر حدس $X_p = e^{-t} U$ را برای جواب خصوصی قرار دهیم

$$\dot{X}_p = -e^{-t} U = A e^{-t} U + \begin{pmatrix}2e^{-t}\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow (A+I)\, U = \begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}$$

این دستگاه جواب ندارد.

(تذکر- اگر جمله ناهمگنی به صورت $e^{t}\begin{pmatrix}\omega\\ -\omega\end{pmatrix}$ باشد، حدس بالا برای جواب درست است.)

چون $\alpha = -1$ مقدار ویژه با تکرار یک است، به جای حدس فوق قرار می‌دهیم

$$X_p = e^{-t}\left[U_0 + t U_1\right]$$

$$\dot{X}_p = -e^{-t}\left[U_0 + t U_1\right] + e^{-t} U_1 = A e^{-t}\left[U_0 + t U_1\right] + \begin{pmatrix}2e^{-t}\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} U_1 - U_0 = A U_0 + \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix} \\ -U_1 = A U_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} U_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad U_1 = \begin{pmatrix}\omega\\ \omega\end{pmatrix}$$

$$(A+I)U_0 = \begin{pmatrix}\omega\\ \omega\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix}\omega-2\\ \omega\end{pmatrix}$$

شرط وجود جواب

$$\omega = 1 \quad\Leftarrow\quad \omega - 2 = -\omega$$

$$U_0 = \begin{pmatrix}\gamma+1\\ \gamma\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad X_p(t) = e^{-t}\left[\begin{pmatrix}\gamma+1\\ \gamma\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \underbrace{\gamma e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}_{\text{جواب معادله همگن}} + e^{-t}\begin{pmatrix}1+t\\ t\end{pmatrix}$$

مثال -

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

جواب خصوصی دستگاه، بالا جمع دو جواب خصوصی دو دستگاه زیر است :

$$\dot{X} = AX + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_p^1 = e^{-t}\left[U_0 + tU_1\right]$$

$$\dot{X} = AX + e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_p^2 = e^{-3t}\left[V_0 + tV_1\right]$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیست و دوم

۱۴۰۰/۹/۱۵

تبدیل لاپلاس

$$f(t) \longmapsto F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt := \mathcal{L}[f]$$

مهم‌ترین خاصیت تبدیل لاپلاس رابطه تبدیل مشتق تابع f است :

$$\mathcal{L}[f'] = s F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''] = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

از این دو خاصیت می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بهره برد.

$$ay'' + by' + cy = g(t) \qquad y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y_0'$$

$$Y(s) := \mathcal{L}[y] \quad \Rightarrow \quad a\mathcal{L}[y''] + b\mathcal{L}[y'] + c\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[g]$$

$$a(s^2 Y(s) - s y_0 - y_0') + b(sY(s) - y_0) + cY(s) = \mathcal{L}[g]$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{\mathcal{L}[g] + a(s y_0 + y_0') + b y_0}{as^2 + bs + c}$$

همانطور که دیدید به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل به یک معادله تابعی تبدیل می‌شود (که در آن مشتق ظاهر نمی‌شود)
با حل آن معادله تابعی تبدیل یافته جواب، $Y(s)$، به دست می‌آید. اگر نشان دهیم تبدیل لاپلاس خاصیت وارون‌پذیری دارد و
بتوانیم $y(t)$ را از $Y(s)$ به دست آوریم، راه حلی برای پیدا کردن جواب معادله به دست آورده‌ایم.

سؤال: از چه توابعی می‌توان تبدیل لاپلاس گرفت؟

مثال-
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t}\, dt = \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t}\, dt = \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s-\alpha}$$ به شرط آنکه $s>\alpha$

در حالت خاص $\alpha=0$، $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ برای $s>0$.

مثال- تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{t^2}$ برای هیچ مقدار s تعریف نمی‌شود.

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}\,dt = \int_0^\infty e^{(t-s/2)^2-s^2/4}\,dt = e^{-s^2/4}\int_0^\infty e^{(t-s/2)^2}\,dt$$

$$= e^{-s^2/4}\int_{-s/2}^\infty e^{t^2}\,dt = \infty$$

مثال-

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{Re}\,e^{i\omega t}\,dt$$

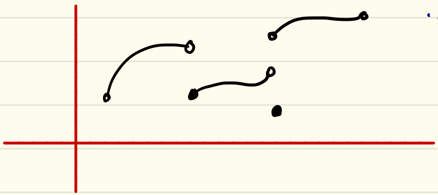
$$= \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-st}e^{i\omega t}\,dt = \mathrm{Re}\left.\frac{e^{(i\omega-s)t}}{i\omega-s}\right|_{t=0}^{\infty}$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{s-i\omega}$$ برای $0<s$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

مثال- $$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

تعریف - تابع f را قطعه‌قطعه پیوسته گوییم هرگاه نقاط ناپیوستگی $t_0 < \dots < t_{n-1} < t_n$ وجود داشته باشند



بطوری که در تمام نقاط تابع پیوسته باشد و در نقاط t_i حد چپ و راست f وجود داشته باشد.

می‌دانیم این توابع انتگرال‌پذیر هستند.

تابع f را از مرتبه نمایی گوییم هرگاه ثابت‌های M , α, $0<K$ وجود داشته باشند که

$$|f(t)| \le K e^{\alpha t} \quad \text{برای} \quad M<t$$

بنابر آزمون مقایسه تبدیل لاپلاس هر تابع قطعه‌قطعه پیوسته مرتبه نمایی برای $\alpha < s$ تعریف می‌شود.

$$\int_M^{\infty} \left| e^{-st} f(t) \right| dt \le \int_M^{\infty} e^{-st} K e^{\alpha t} \, dt \underset{\text{برای } \alpha < s}{<} \infty$$

جمع بندی : دامنه تعریف تبدیل لاپلاس خانواده توابع قطعه قطعه پیوسته از مرتبه نمایی است که تبدیل آنها برای مقادیر s از یکجا به بعد تعریف شده است.

مثال- تابع ثابت $f(t)=1$ از مرتبه نمایی است $\alpha=0$ ، $K=1$

تابع $\cos\omega t$ 〃 〃 $\alpha=0$ ، $K=1$

تابع $e^{\omega t}$ 〃 〃 $\alpha=\omega$ ، $K=1$

هر تابع کران دار دلخواه 〃 〃 $\alpha=0$ ، $K=$ کران تابع

تابع e^{t^2} 〃 نیست. $e^{t^2} \nleq K e^{\alpha t} \quad \forall K,\alpha$

خواص تبدیل لاپلاس :

① خطی بودن
$$\mathcal{L}[af+bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

② تبدیل مشتق: اگر f مشتق پذیر و از مرتبه نمایی $e^{\alpha t}$ باشد و f' قطعه‌ای پیوسته آنگاه $\mathcal{L}[f']$ برای $s>\alpha$ تعریف می‌شود و

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0) \qquad s>\alpha$$

$$\mathcal{L}[f'] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \int_0^\infty -\frac{d}{dt}(e^{-st}) f(t)\,dt + e^{-st}f(t)\Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$= \int_0^\infty s\,e^{-st} f(t)\,dt + \lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) - f(0)$$

$$= s\mathcal{L}[f] - f(0) \qquad |e^{-st}f(t)| \underset{f \text{ از مرتبه } e^{\alpha t}}{\leq} K e^{-st}e^{\alpha t} \xrightarrow[\text{برای } \alpha<s]{} 0$$

$$\mathcal{L}[f''] = s\,\mathcal{L}[f'] - f'(0) = s\left(s\,\mathcal{L}[f] - f(0)\right) - f'(0)$$

$$= s^2\,\mathcal{L}[f] - s\,f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n\,\mathcal{L}[f] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

به شرط آنکه f، f'، ...، $f^{(n-1)}$ از مرتبه نمایی $e^{\alpha t}$ باشد، در این صورت رابطه بالا برای $s>\alpha$ معتبر است.

مثال- در رابطه بالا قرار دهید $f(t)=t^n \Leftarrow f^{(n)}(t)=n!$

$$\mathcal{L}[n!] = s^n\,\mathcal{L}[t^n]$$

$$\| $$

$$n!\,\mathcal{L}[1] = \frac{n!}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad s>0$$

$\mathcal{L}[f''] = -\omega^2 \mathcal{L}[f] \Leftarrow f'' = -\omega^2 f \Leftarrow f(t) = \sin \omega t$ مثل-

$$\mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f] - s\underbrace{\cancel{f(0)}}_{0} - \underbrace{\cancel{f'(0)}}_{\omega}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$\mathcal{L}[f''] = \omega^2 \mathcal{L}[f] \Leftarrow f'' = \omega^2 f \Leftarrow f(t) = \cosh(\omega t)$ مثل-

$$\mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f] - s\underbrace{\cancel{f(0)}}_{1} - \underbrace{\cancel{f'(0)}}_{0}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\cosh(\omega t)] = \frac{s}{s^2-\omega^2}$$

قضیه- اگر f و g دو تابع از رتبه‌ی نمایی $e^{\alpha t}$ باشند که $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$ برای $\alpha < s$. در این صورت

$f(t) = g(t)$ برای $0 < t$

قضیه فوق نشان می‌دهد که تبدیل لاپلاس یک عملگر یک به یک است. در نتیجه تبدیل لاپلاس یک عملگر وارون پذیر است.

هر چند پیدا کردن یک فرمول صریح برای محاسبه تبدیل وارون کار ساده‌ای نیست، اما ابزاری برای محاسبه تبدیل وارون می‌توان طرح کرد.

مثال- $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$ ، $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 0$

$$Y(s) = \mathcal{L}[y] \Rightarrow \mathcal{L}[y'] = sY(s) - \underbrace{\cancel{y(0)}}_{1} \quad , \quad \mathcal{L}[y''] = s^2 Y(s) - s\underbrace{\cancel{y(0)}}_{1} - \underbrace{\cancel{y'(0)}}_{0}$$

$$\Rightarrow \left(s^2 Y(s) - s\right) - 3\left(sY(s) - 1\right) + 2Y(s) = \mathcal{L}[e^{3t}] = \frac{1}{s-3}$$

$$Y(s) = \left(s - 3 + \frac{1}{s-3}\right) \Big/ (s^2 - 3s + 2) = \frac{1/2}{s-3} + \frac{5/2}{s-1} + \frac{-2}{s-2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

تابعی که تبدیل لاپلاس آن $\frac{1}{s-3}$ است.

$$= \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{5}{2}e^{t} - 2e^{2t}$$

نکته- در مثال بالا فرض کرده‌ایم که معادله دارای جوابی است که تبدیل لاپلاس آن تعریف شده است. در واقع اگر تابع f از مرتبه نمایی باشد، آنگاه هر جواب $ay'' + by' + cy = f(t)$ نیز از مرتبه نمایی است. به همین دلیل مجاز هستیم که از تکنیک تبدیل لاپلاس برای حل معادله استفاده کنیم.