معادلات دیفرانسیل

جلسه نوزدهم

۱۴۰۰/۹/۶

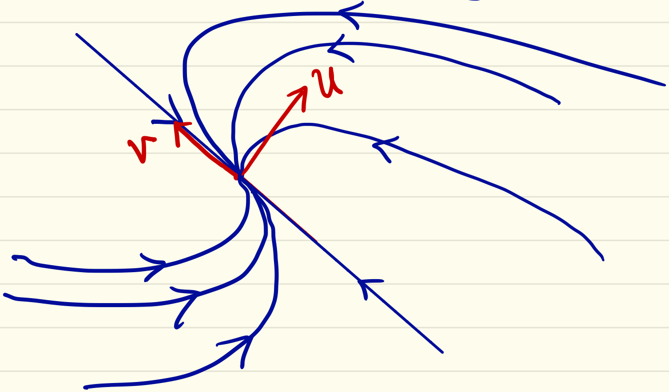
(iii) یک مقدار ویژه با تکرار ۲ که فضای ویژه یک بعدی است.

(اگر فضای ویژه نیز دو بعدی باشد، در این حالت باید $A=\lambda I$.)

$$(A-\lambda I)V=0 \implies X_1(t)=e^{\lambda t}V$$

$$(A-\lambda I)U=V \implies X_2(t)=e^{\lambda t}[U+tV]$$

$$X(t)=e^{\lambda t}\left[c_1(U+tV)+c_2V\right]$$ جواب عمومی



$\lambda<0$

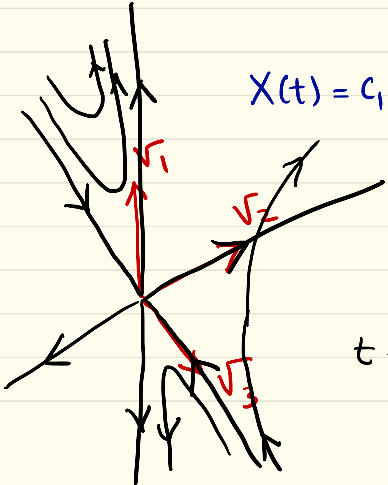
قضیه - اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A منفی باشند، آنگاه همه جوابهای دستگاه $\dot{X}=AX$ به مبدأ همگرا هستند، یعنی $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$

و اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه مثبت باشند، آنگاه $\lim_{t\to -\infty} X(t) = 0$.

حالتهای مختلف دستگاه سه بعدی:

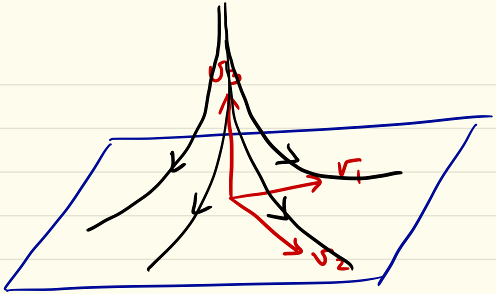
(الف) سه بردار ویژه مستقل داریم. $X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} V_3$

که V_i بردار ویژه متناظر λ_i است.



در حالت $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$

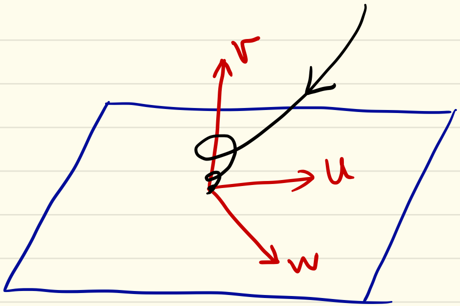
وقتی $t\to\infty$ جواب به صفحه تولید شده $V_1 V_2$ نزدیک میشود و وقتی $t\to -\infty$ موازی خط V_3 خواهد بود.



(iii) دو مقدار ویژه‌ی مختلط $\alpha \pm i\beta$ و یک مقدار ویژه‌ی حقیقی

$u \pm iw$ بردار ویژه‌ی مختلط

v بردار ویژه‌ی حقیقی متناظر λ



$\lambda, \alpha < 0$

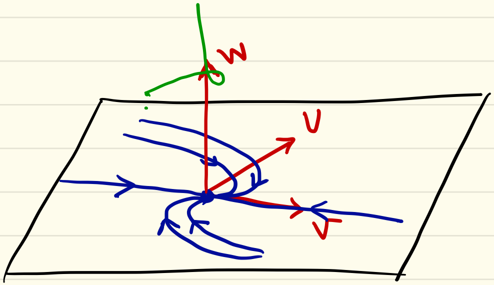
(iii) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ مقادیر ویژه حقیقی، λ_1 تکرر یک دارد و λ_2 تکرر دو دارد.

فضای پوچ $Nul(A-\lambda_1 I)$ و $Nul(A-\lambda_2 I)$ یک بعدی است.

$$(A-\lambda_2 I)V = 0 \quad , \quad (A-\lambda_1 I)W = 0$$

$$(A-\lambda_2 I)U = V$$

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} W + c_2 e^{\lambda_2 t} V + c_3 e^{\lambda_2 t}[tV + U]$$



$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

(iv) λ تکرار ویژه با تکرار سه باشد

- بعد فضای ویژه سه باشد ← حالت (i) است.
- بعد فضای ویژه دو باشد
- بعد فضای ویژه یک باشد. V بردار ویژه باشد

$$X_1(t) = e^{\lambda t} V \qquad (A-\lambda I)V = 0$$

$$X_2(t) = e^{\lambda t}\left[tV + W\right] \qquad (A-\lambda I)W = V$$

$$X_3(t) = e^{\lambda t}\left[\frac{t^2}{2}V + tW + U\right] \qquad (A-\lambda I)U = W$$

مثال- $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\-3&2&4\end{pmatrix}$ ، $\lambda=2$ مقدار ویژه با تکرار سه است. $\dim Nul(A-2I)=1$

$$(A-2I)v=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow v_1=v_2+v_3=0$$

$$v=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)w=v \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 1=w_1=w_2+w_3 \Rightarrow w=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)U=W \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1=2,\quad u_2+u_3=3 \Rightarrow U=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$X_1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad X_2(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\t+1\\-t\end{pmatrix},\quad X_3(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}t+2\\t^2/2+t+3\\-t^2/2\end{pmatrix}$$

• λ مقدار ویژه با تکرار سه و بعد فضای ویژه برابر دو است . V^1 و V^2 دو بردار ویژه مستقل متناظر λ است .

$$X_1(t) = e^{\lambda t} V^1 , \qquad X_2(t) = e^{\lambda t} V^2$$

$$X_3(t) = e^{\lambda t}\left[tV + U\right] \qquad \begin{cases} (A-\lambda I)V = 0 \\ (A-\lambda I)U = V \end{cases}$$

U در رابطه زیر

$$(A-\lambda I)^2 U = 0$$

صدق می‌کند. اما می‌دانیم در این حالت $(A-\lambda I)^2 = 0$. در نتیجه به ازای هر U دلخواه رابطه بالا درست است.

اما شرط $(A-\lambda I)U = V$ می‌گوید تنها کافی است بردار U پیدا کنید که $(A-\lambda I)U \neq 0$ این تاکید به این معناست که U بردار ویژه نیست. عملاً کافی است یک بردار U انتخاب کنیم که در فضای تولید شده توسط V^1 و V^2 نباشد

و قرار دهید $V = (A-\lambda I)U$

$$X_3(t) = e^{\lambda t}\left[t v + u\right]$$

مثال - $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda=1$ مقدار ویژه با تکرار سه است .

$$(A-I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 4v_1 = 3v_2 + 2v_3$$

$$v^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^1(t) = e^t v^1 ,\ X^2(t) = e^t v^2$$

u را برداری می‌گیریم که بردار ویژه نباشد. مثلاً

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = v = (A-I)u \neq 0 \Leftarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-I)v = 0 \Rightarrow X^3(t) = e^t \begin{pmatrix} 4t+1 \\ 8t \\ -4t \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2 = 0$$

معادلات دیفرانسیل

جلسه بیستم

۱۴۰۰/۹/۸

رویکردی دیگر به دستگاه خطی $\dot{X} = AX$.

روش تقریب‌های متوالی: دیدیم که جواب
$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
نقطهٔ ثابت عملگر انتگرالی

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

است. دنبالهٔ بازگشتی زیر به جواب معادله همگرا است.

$$\varphi_0(t) \equiv y_0 \quad , \quad \varphi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\, ds$$

این تقریب‌های متوالی را برای دستگاه خطی $\dot{X} = AX$ به کار می‌بریم. در این حالت توابع φ_n توابع برداری هستند

$$\varphi_0(t) \equiv X_0 \quad , \quad \varphi_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A\varphi_n(s)\, ds$$

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = X_0$$

$$\varphi_0(t) \equiv X_0$$

$$\varphi_1(t) = X_0 + \int_0^t A\varphi_0(s)\,ds = X_0 + (AX_0)t = (I + tA)X_0$$

$$\varphi_2(t) = X_0 + \int_0^t A\varphi_1(s)\,ds = X_0 + \int_0^t A(I + sA)X_0\,ds$$

$$= X_0 + tAX_0 + \frac{1}{2}t^2A^2X_0 = \left(I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2\right)X_0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_k(t) = \left[I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \cdots + \frac{(tA)^k}{k!}\right]X_0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

$$\exp(B) = e^B := I + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{3!} + \cdots$$

تعریف می‌کنیم

$$\varphi_k(t) \longrightarrow \exp(tA)X_0$$

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = Ae^{tA}$$

نکته - دقت کنید تساوی $e^{A+B} = e^{A}\cdot e^{B}$ همیشه درست نیست.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow A^{k} = \begin{bmatrix} \alpha^{k} & 0 \\ 0 & \beta^{k} \end{bmatrix}$$

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k}}{k!} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\alpha^{k}}{k!} & 0 \\ 0 & \sum \frac{\beta^{k}}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\beta} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \exp\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \eta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \eta & 0 \end{bmatrix} \cdot \exp\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ \eta & \eta\gamma \end{bmatrix}$$

$$\exp\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \eta & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \eta & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \gamma\eta & 0 \\ 0 & \gamma\eta \end{bmatrix} = \gamma\eta\, I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \eta & 0 \end{bmatrix}^{2k} = (\gamma\eta)^k I \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \eta & 0 \end{bmatrix}^{2k+1} = (\gamma\eta)^k \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \eta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \eta & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \eta & 0 \end{bmatrix}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \eta & 0 \end{bmatrix}^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma\eta)^k}{(2k)!} I + \frac{(\gamma\eta)^k}{(2k+1)!} \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \eta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma\eta & -\gamma\sin\gamma\eta \\ -\eta\sin\gamma\eta & \cos\gamma\eta \end{bmatrix}$$

با این حال روابط زیر برقرار است :

① $AB=BA$ وقتی $e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B}$

② $(e^{A})^{-1} = e^{-A}$

③ $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$

نتیجه - به ازای هر بردار X_0 ، تابع $X(t) = e^{tA} X_0$ جواب دستگاه $\dot{X} = AX$ با شرط اولیه $X(0)=X_0$ است

همچنین $Y(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$ جواب این دستگاه با شرط اولیه $Y(t_0) = X_0$ است.

نکته - همانطور که بالا گفتیم ماتریس e^{tA} وارون پذیر است. در نتیجه ستونهای این ماتریس یک جوابهای پایه و مستقل دستگاه $\dot{X} = AX$ هستند.

ستون i-ام ماتریس e^{tA} است که در حقیقت جواب دستگاه با شرط اولیه $X(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $= e^{tA} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i$-ام

درنتیجه اگر به طریقی توانستیم ماتریس e^{tA} را محاسبه کنیم، ستون‌های آن n جواب مستقل برای دستگاه $\dot{X}=AX$ را ارائه می‌دهد.
هرچند در بعضی مواقع می‌توان به روش معکوس عمل کرد. یعنی جواب‌های مستقل را به روشی که در جلسات پیش گفتیم محاسبه کرد و به کمک آن‌ها e^{tA} را به‌دست آورد. یعنی اگر $X_1(t), \dots, X_n(t)$، n جواب مستقل دستگاه $\dot{X}=AX$ باشند،

$$\Phi(t) = \left[X_1 \mid X_2 \mid \cdots \mid X_n \right] \qquad \dot{\Phi} = A\Phi$$

$$e^{tA}\Big|_{t=0} = I \qquad \Psi(t) := \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Psi = \dfrac{d}{dt}\Phi \cdot \Phi(0)^{-1} = A\,\Phi(t)\,\Phi(0)^{-1} = A\,\Psi(t) \\ \Psi(0) = I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(t) = e^{tA} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$$

مثال - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ماتریس e^{tA} را محاسبه کنید

مقادیر ویژه این ماتریس ۱، 3 و 5 است به ترتیب بردارهای ویژه عبارتند از $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \left[X_2 \middle| X_1 \middle| X_3 \right] = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{t} & e^{5t} \\ 2e^{3t} & 0 & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

محاسبه e^{tA} به روش دیگر :

اگر A ماتریس قطری باشد

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}$$

اگر $A = PDP^{-1}$ که $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ قطری و P یک ماتریس وارون پذیر است. در این حالت ماتریس A را قطری شدنی گوییم. به عنوان مثال هر ماتریس متقارن را می‌توان به این صورت نوشت.

$$A^k = PD^kP^{-1} \Rightarrow \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} PD^kP^{-1}$$

$$= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tD)^k}{k!}\right)P^{-1} = P \underbrace{e^{tD}}_{\begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}} P^{-1}$$

دستگاه ناهمگن $\dot{X} = AX + f(t)$ که $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ یک تابع برداری است.

روش تغییر پارامتر:

اگر $X_1(t)$، ...، $X_n(t)$ جوابهای پایه دستگاه $\dot{X}=AX$ باشند جواب عمومی معادله همگن به صورت زیر است

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله غیرهمگن به روش تغییر پارامترها قرار می‌دهیم

$$X_p(t) = u_1(t) X_1(t) + \cdots + u_n(t) X_n(t) = \Phi(t) \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} =: \Phi(t) u(t)$$

و به دنبال تابع برداری $u(t)$ هستیم که در معادله ناهمگن صدق کند.

$$\dot{X}_p = \dot{\Phi} u + \Phi \dot{u} = A\Phi u + \Phi \dot{u} = AX_p + \Phi \dot{u}$$

برای اینکه $\dot{X}_p = AX_p + f$ باید

$$\Phi \dot{u} = f \rightarrow \dot{u} = \Phi(t)^{-1} f(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s)\, ds$$

$$X_p(t) = \Phi(t) u(t) = \Phi(t) \underbrace{u(t_0)}_{\Phi(t_0)^{-1} X_0} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t) \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds$$

اگر بخواهیم $X_p(t_0) = X_0$

بنابراین جواب دستگاه غیرهمگن $\dot{X} = AX + f$ با شرط اولیه $X(t_0) = X_0$ برابر است با

$$X(t) = \Phi(t) \Phi(t_0)^{-1} X_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t) \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds$$

اگر به جای $\Phi(t)$ ماتریس e^{tA} را قرار دهیم

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds$$