

معادلات دیفرانسیل

۱۴۰۰/۹/۱

جلسه هجدهم

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{مثال -}$$

$\lambda = 2$ تکرار دارد.

$$0 = (2I - A)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow u + w = 0$$

$$\text{Nul}(2I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ بردار ویژه است و } X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ یک جواب خاص است. } \dot{X} = AX$$

$$V = (A - 2I)u \neq 0 \quad \text{بردار ویژه تصمیم یافته } u \text{ در شاره زیر صدق نمی کند:}$$

$$(A - 2I)^2 u = 0$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow u + w = -1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{بنابراین } V \text{ یک بردار ویژه است.}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ -1-u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه تمام بردارهای ویژه تعمیم یافته به صورت

↓
بردار ویژه

$$\checkmark \quad X_2(t) = e^{2t} [t u_1 + u_0]$$

جواب دوم معادله برابر است با

$$(A - 2I) u_0 = u_1, \quad (A - 2I) u_1 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ -t-1 \end{bmatrix}$$

نکته - اگر λ یک مقدار ویژه بانگري S باشد، آن گاه هم بردار آي ویژه نعيم يافته متناظر λ از مرتبه S خواهد بود، يعني

$$\text{همه آنها در فضای بيج } \text{Nul}(A - \lambda I)^S$$

قرار مي گيرند.

$$\text{Nul}(A - \lambda I) \subseteq \text{Nul}(A - \lambda I)^2 \subseteq \text{Nul}(A - \lambda I)^3 \subseteq \dots \subseteq \text{Nul}(A - \lambda I)^S$$

$$\dim \text{Nul}(A - \lambda I)^S = s \quad \text{در حقيقت داريم:}$$

بعلاوه اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ قايي مقدار ویژه متمايز ماتريس A باشند بانگري $S_1, \dots, S_r$ آن گاه

$$\mathbb{R}^n = \text{Nul}(A - \lambda_1 I)^{S_1} \oplus \text{Nul}(A - \lambda_2 I)^{S_2} \oplus \dots \oplus \text{Nul}(A - \lambda_r I)^{S_r}$$

در نتيجه مي توان يافته اي از بردار ویژه نعيم يافته پيدا کرد.

تذکر - برای ماسه برداری ویژه تعمیم یافته ، ابتدا برداری ویژه (فضای بوج $\text{Nul}(A - \lambda I)$) را پیدا می‌کنیم سپس

از حل معادله

$$(A - \lambda I)u = v$$

که v یک بردار ویژه است ، برداری ویژه تعمیم یافته مرتبه دو را پیدا می‌کنیم . همچنین با حل

$$(A - \lambda I)w = u$$

که u یک بردار ویژه تعمیم یافته مرتبه دو است ، برداری ویژه تعمیم یافته مرتبه 3 را پیدا می‌کنیم و ...

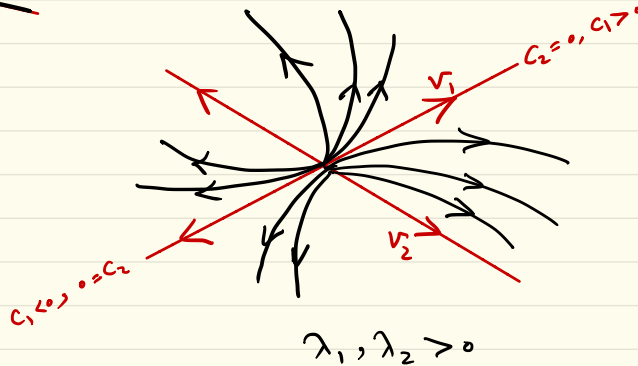
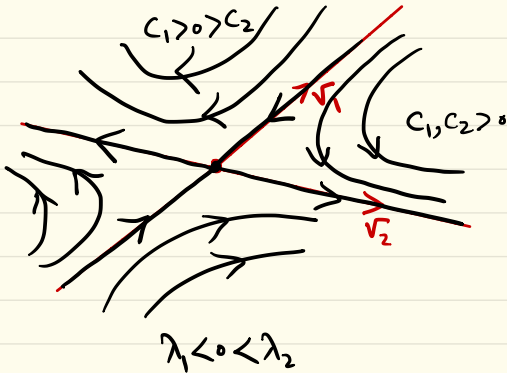
حالتی مختلف دستگاه دو بعدی :

(i) دو بردار ویژه مستقل فضایی. شکل عمومی جواب به صورت

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

است که λ_1, λ_2 مقادیر ویژه و V_1, V_2 بردارهای ویژه متناظر.

فضای فاز سیستم $\dot{X} = AX$



سؤال: چگونه تشخیص دهیم
فهمی جواب در معادله بردار
محس است یا V_2 ؟

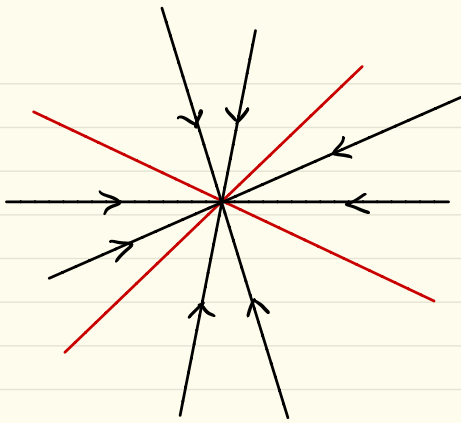
برای پاسخ به این سؤال باید به معادله $\dot{X}$ در $t \rightarrow \infty$ نگاه کنیم.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX = A(c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2) \\ &= c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_2\end{aligned}$$

همانطور که می بینید $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{X} = 0$ ، ولیکن جهت ما در راستای $\frac{\dot{X}}{|X|}$ است. با فرض اینکه $\lambda_2 < \lambda_1$ باشد، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{|c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_2|} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c_1 \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_1 + c_2 \lambda_2 v_2}{|c_1 \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_1 + c_2 \lambda_2 v_2|} \\ &= \frac{c_2 \lambda_2 v_2}{|c_2 \lambda_2 v_2|} = \frac{c_2 v_2}{|c_2 v_2|}\end{aligned}$$

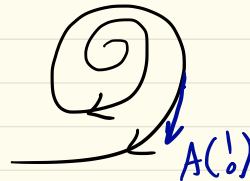
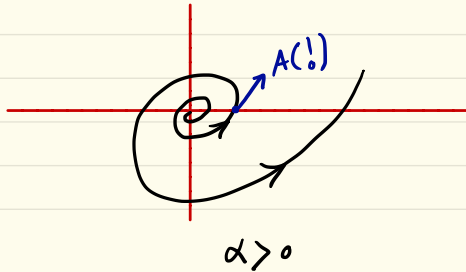
در نتیجه در حالتی که $\lambda_2 < \lambda_1$ و $c_2 \neq 0$ جواب به سمت v_2 می‌گراید (در حالتی که $c_2 = 0$ و $c_1 \neq 0$ در حالتی که $\lambda_1 < 0$ می‌گراید).



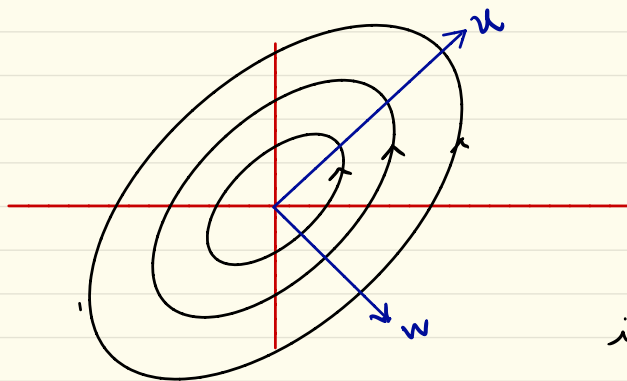
$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

(نقطة) دو حلقه وُورُو مُنْطَلَق $\lambda = \alpha \pm i\beta$. داری $(\beta \neq 0)$ $U \pm iW$ برابری مُنْطَلَق

$$X(t) = e^{\alpha t} \left[c_1 (\cos \beta t U - \sin \beta t W) + c_2 (\cos \beta t W + \sin \beta t U) \right]$$



در حالتی که $\alpha > 0$ ، اگر درایه (z_1, z_2) ماکزیمم نباشد، بردار $A(!)$ به سمت بالا است و جهت چرخش هم جواب
 یار است و معکوس است.



$$\alpha = 0$$

در حالت $\alpha = 0$ فرجه جواب هکلی میباشند