معادلات دیفرانسیل

جلسه هفدهم

۱۴۰۰/۸/۲۹

دستگاه خطی با ضرایب ثابت $\dot{x} = Ax$

می‌دانیم فضای همه جواب یک فضای nـ بعدی است.

هدف: پیدا کردن n جواب مستقل به عنوان پایه‌ای برای فضای جواب.

ایده: $x(t) = e^{\lambda t} v$ را در معادله جایگزین می‌کنیم و به رابطه ساده شده $Av = \lambda v$ می‌رسیم.

یعنی v بردار ویژه باشد و λ مقدار ویژه.

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، مقادیر ویژه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه ماتریس هستند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det(\lambda I - A) \rightsquigarrow \text{چندجمله‌ای درجه } n$$

می‌دانیم هر چندجمله‌ای درجه n دارای n ریشه در اعداد مختلط (با احتساب تکرار) است یعنی

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{s_r}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ متمایز هستند و $1 \leq s_i$ و $s_1 + s_2 + \dots + s_r = n$.

بردارهای ویژه متناظر λ_i جواب‌های معادله $(\lambda_i I - A)v = 0$ است که مجموعه این جواب‌ها زیرفضای برداری است که به آن فضای پوچ ماتریس $\lambda_i I - A$ گفته می‌شود و با $Nul(\lambda_i I - A)$ نمایش داده می‌شود. بنابر قضیه‌ای در جبرخطی

می‌دانیم

$$t_i = \dim Nul(\lambda_i I - A) \leq s_i$$

اگر λ_i یک مقدار ویژه حقیقی باشد و V_1^i ، ... ، $V_{t_i}^i$ بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر λ_i از فضای پوچ
$Null(\lambda_i I - A)$ باشند، متناظر آن جواب‌های

$$X_j^i(t) = e^{\lambda_i t} V_j^i \qquad 1 \leq j \leq t_i$$

برای معادله $\dot{X} = AX$ به دست می‌آیند. چون بردارهای $X_1^i(0) = V_1^i$ ، ... ، $X_{t_i}^i(0) = V_{t_i}^i$ مستقل خطی هستند
پس توابع $X_1^i(t)$ ، ... ، $X_{t_i}^i(t)$ نیز مستقل هستند.

گزاره- اگر u^1 ، ... ، u^k بردارهای ویژه متناظر مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ باشند، آنگاه $u^1, \dots, u^k$
مستقل خطی هستند.

اثبات- تمرین

نتیجه- اگر $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ مقادیر ویژه حقیقی ماتریس A باشند، متناظر هر λ_i به تعداد $t_i = \dim Nul(\lambda_i I - A)$ جواب پیدا کردیم.

$$X_j^i(t) = e^{t\lambda_j^i}\, V_j^i \qquad 1 \leq j \leq t_i \;,\; 1 \leq i \leq k$$

گزاره قبل نشان می‌دهد که مجموعه همه این جواب‌ها مستقل هستند. بدین ترتیب $t_1 + t_2 + \cdots + t_k$ جواب مستقل پیدا می‌شود.

مثال- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$

$\lambda = 2$ مقدار ویژه با تکرر ۳ است.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in Nul(2I - A) \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies u = v = 0 \implies Nul(2I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} : w \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim Nul(2I - A) = 1$ تنها جواب بدست آمده $e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ است.

مقدار ویژه مختلط

اگر λ یک مقدار ویژه مختلط ماتریس A باشد، آنگاه بردار ویژه متناظر آن نیز درایه‌ای مختلط دارد.

$$\lambda = \alpha + i\beta \qquad v = u + i\,w$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{u} + i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w}$$

$$Av = \lambda v \Rightarrow A(u + iw) = (\alpha + i\beta)(u + iw)$$

$$\begin{cases} Au = \alpha u - \beta w \\ Aw = \beta u + \alpha w \end{cases} \Rightarrow A\begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$x(t) = e^{\lambda t} v$ به عنوان یک تابع مختلط در معادله $\dot{X} = AX$ صدق می‌کند.

$$x(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(u+iw) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(u+iw)$$

$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t\, u - \sin\beta t\, w) + i e^{\alpha t}(\sin\beta t\, u + \cos\beta t\, w)$$

تذکر- اگر ماتریس A حقیقی باشد و $\lambda = \alpha + i\beta$ یک مقدار ویژه آن باشد، آنگاه $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ نیز مقدار ویژه است و تکرار آن برابر تکرار λ است. به علاوه اگر $v = u + iw$ بردار ویژه متناظر λ باشد، $\bar{v} = u - iw$ نیز بردار ویژه متناظر $\bar{\lambda}$ است.

مثال- $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda + 1/2 & -1 \\ 1 & \lambda + 1/2 \end{pmatrix} = (\lambda + 1/2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \lambda = -1/2 \pm i$$

$$\left((-1/2 \pm i) I - A\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm i & -1 \\ +1 & \pm i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pm i u = v$$

بردار ویژه متناظر $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$ است.

$$e^{(-1/2+i)t}\begin{pmatrix}1\\+i\end{pmatrix} = e^{-t/2}(\cos t + i\sin t)\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\+1\end{pmatrix}\right)$$

$$= e^{-t/2}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix} + i\, e^{-t/2}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$X_1(t) = e^{-t/2}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}$ و $X_2(t)=e^{-t/2}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ دو جواب مستقل $\dot{X}=AX$ هستند.

تذکر- اگر $V=U+iW$ بردار ویژه متناظر $\lambda=\alpha+i\beta$ باشد، U و W قطعاً مستقل خطی هستند. (چرا؟)

در نتیجه دو جواب

$$e^{\alpha t}(\cos\beta t\, U - \sin\beta t\, W)$$
$$e^{\alpha t}(\sin\beta t\, U + \cos\beta t\, W)$$

مستقل هستند. متناظر هر بردار ویژه دو مقدار ویژه $\lambda=\alpha+i\beta$ و $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ دو جواب مستقل بدست می‌آید.

اگر $\lambda = \alpha + i\beta$ تکرار s داشته باشد و بعد فضای پوچ $Nul(\lambda I - A)$ در مجموعه اعداد مختلط t باشد

با این روش به تعداد $2t$ جواب حقیقی مستقل به دست می‌آوریم. عملاً متناظر دو مقدار ویژه مختلط $\alpha \pm i\beta$ ، به تعداد

$2t$ جواب خواهیم داشت.

مقادیر ویژه تکراری

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{s_r}$$

$$t_i = \dim Nul(\lambda_i I - A)$$

تاکنون به تعداد $t_1 + \dots + t_r$ جواب مستقل برای معادله به دست آوردیم (λ_i حقیقی باشد و یا مختلط)

سؤال: چگونه متناظر λ_i ، تعداد s_i جواب پیدا کنیم؟

ایده : حدس جواب را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم

$$X(t) = e^{\lambda t} \times \text{چندجمله‌ای برداری}$$

$$= e^{\lambda t}\left[t^k V_k + t^{k-1} V_{k-1} + \cdots + t V_1 + V_0 \right]$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} v_k^1 t^k + v_{k-1}^1 t^{k-1} + \cdots + v_0^1 \\ v_k^2 t^k + \cdots \qquad + v_0^2 \\ \vdots \\ v_k^n t^k + \cdots \qquad + v_0^n \end{pmatrix} = t^k \begin{pmatrix} v_k^1 \\ \vdots \\ v_k^n \end{pmatrix} + t^{k-1} \begin{pmatrix} v_{k-1}^1 \\ \vdots \\ v_{k-1}^n \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} v_0^1 \\ \vdots \\ v_0^n \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = e^{-\lambda t} X(t) \Rightarrow \dot{Y} = -\lambda e^{-\lambda t} X(t) + e^{-\lambda t} \dot{X}(t)$$

$$= -\lambda Y + e^{-\lambda t} A X = (A - \lambda I) Y$$

$$Y(t) = \frac{t^k}{k!} U_k + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} U_{k-1} + \cdots + t U_1 + U_0 \quad , \quad U_k \neq 0$$

$$\dot{Y} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} U_k + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} U_{k-1} + \cdots + t U_2 + U_1$$

$$= (A-\lambda I) Y = (A-\lambda I)\left(\frac{t^k}{k!} U_k + \cdots + t U_1 + U_0\right)$$

$$= \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I) U_k + \cdots + t (A-\lambda I) U_1 + (A-\lambda I) U_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A-\lambda I) U_0 = U_1 \\ (A-\lambda I) U_1 = U_2 \\ \vdots \\ (A-\lambda I) U_{k-1} = U_k \\ (A-\lambda I) U_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (A-\lambda I)^{k+1} U_0 = 0 \\ (A-\lambda I)^k U_0 = U_k \neq 0 \end{matrix}$$

تعریف - بردار U_0 که در رابطه بالا صدق می‌کند را یک <u>بردار ویژه تعمیم یافته</u> متناظر λ گوییم. در واقع $k \geq 0$ ای وجود دارد که $(A-\lambda I)^{k+1} U_0 = 0$ و $(A-\lambda I)^k U_0 \neq 0$. حالت $k=0$ همان بردار ویژه است.