معادلات دیفرانسیل

جلسه شانزدهم

۱۴۰۰/۸/۲۴

گزاره: اگر $X_1(t)$ ، ... ، $X_k(t)$ جواب‌های معادله $\dot{X}=A(t)X$ باشند و اگر به عنوان توابع برداری مستقل باشند، آنگاه برای هر t_0 بردارهای $X_1(t_0)$ ، ... ، $X_k(t_0)$ مستقل خطی هستند.

اثبات ـ فرض کنید برای t_0 ، بردارهای $X_1(t_0)$ ، ... ، $X_k(t_0)$ وابسته خطی باشند، پس ضرایب c_1 ، ... ، c_k وجود دارند (که همگی صفر نیستند)

$$c_1X_1(t_0)+\cdots+c_kX_k(t_0)=0$$

قرار دهید

$$Y(t)=c_1X_1(t)+\cdots+c_kX_k(t)$$

می‌دانیم Y نیز جواب معادله $\dot{X}=A(t)X$ است. به علاوه $Y(t_0)=0$. بنابر قضیه وجود و یکتایی $Y(t)\equiv 0$ برای هر t .

$$\Longrightarrow\quad c_1X_1(t)+\cdots+c_kX_k(t)=0\qquad \forall t$$

که با استقلال توابع برداری X_1 ، ... ، X_k تناقض دارد.

مثال - توابع $X_1(t)=\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ و $X_2(t)=\begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$ نمی‌توانند جواب‌های دستگاه $\dot{X}=A(t)X$ باشند که ماتریس $A(t)$ پیوسته است.

مثال - $X_1(t)=\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ و $X_2(t)=\begin{pmatrix}2t\\1+t\end{pmatrix}$ نمی‌توانند جواب‌های یک دستگاه خطی همگن با ضرایب پیوسته باشند.

زیرا $X_1(t)$ و $X_2(t)$ به عنوان دو تابع مستقل هستند ولی $X_1(1)$ و $X_2(1)$ وابسته خطی هستند.

نکته - در شرایط قبل می‌توان ماتریس $A(t)$ و تابع برداری $g(t)$ را پیدا کرد که X_1 و X_2 جواب‌های دستگاه غیرهمگن $\dot{X}=A(t)X+g(t)$ باشند.

مثال - $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-2x_2\end{cases}$ این دستگاه معادل معادله مرتبه دوم $y''+2y'+y=0$ که جواب‌های پایه آن $y_1=e^{-t}$ و $y_2=te^{-t}$ است.

$$X_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{pmatrix} \quad , \quad X_2=\begin{pmatrix}te^{-t}\\(1-t)e^{-t}\end{pmatrix}$$

$X_1(0)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ و $X_2(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ مستقل خطی هستند، بنابراین $X_1(t)$ و $X_2(t)$ دو جواب مستقل هستند برای هر t،

برای هر t و $X_1(t)$ و $X_2(t)$ مستقل خطی است.

نکته ـ در مثال قبل دو بردار $X_1(t)$ و $X_2(t)$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر ماتریس

$$[X_1 \mid X_2] = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

وارون پذیر باشد و شرط وارون پذیری معادل این است که $\det[X_1 \mid X_2] \neq 0$.

قضیه آبل: اگر $X_1(t)$، ...، $X_n(t)$ جوابهای دستگاه خطی $\dot{X} = A(t)X$ باشد ($A(t)$ پیوسته است). ماتریس $n \times n$

$$\Phi(t) = \left[X_1(t) \mid X_2(t) \mid \cdots \mid X_n(t) \right]$$

یا همیشه وارون پذیر است یا هیچ وقت نیست. به طور معادل $W(t) = \det \Phi(t)$ یا همیشه صفر است یا هیچ موقع صفر نیست.

نکته ـ هر چند قضیه فوق نتیجه مستقیم گزاره قبل است اما از راه دیگری می‌توان به شکل زیر نشان داد که

$$\frac{dW}{dt} = (\operatorname{tr} A(t))\, W$$

$$\Phi = [X_1 | \cdots | X_n] = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_1^n \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^n \end{bmatrix}$$

$$(*) \quad \frac{d}{dt}\det\Phi = \det\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1^1 & \cdots & \frac{d}{dt}x_n^1 \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \frac{d}{dt}x_1^2 & \cdots & \frac{d}{dt}x_n^2 \\ \vdots & & \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} + \cdots + \det\begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & \\ \frac{d}{dt}x_1^n & \cdots & \frac{d}{dt}x_n^n \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_i = AX_i \Rightarrow \frac{d}{dt}x_i^j = a_{j1}x_i^1 + a_{j2}x_i^2 + \cdots + a_{jn}x_i^n = \sum_k a_{jk}x_i^k$$

$$\det\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1^1 & \cdots & \frac{d}{dt}x_n^1 \\ \vdots & & \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \sum_k a_{1k}x_1^k & \cdots & \sum_k a_{1k}x_n^k \\ x_1^2 & & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n & & x_n^n \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11}x_1^1 & \cdots & a_{11}x_n^1 \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = a_{11}\det\begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = a_{11}\det\Phi$$

a_{12} برابر سطر دوم را از سطر اول کم کنید

a_{13} 〃 〃 سوم 〃 〃 〃

$\vdots$

a_{1n} 〃 〃 n-ام 〃 〃 〃

به طور مشابه بقیه جملات (*) برابر $a_{22}\det\Phi$ ، … ، $a_{nn}\det\Phi$ می‌شود.

قضیه ـ فضای جواب‌های دستگاه خطی همگن $\dot{X}=A(t)X$ یک فضای برداری nـ بعدی است.

اثبات ـ $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow$ i‌ام بنابر قضیه وجود و یکتایی دستگاه $\begin{cases}\dot{X}=A(t)X\\ X(t_0)=e_i\end{cases}$ دارای جواب یکتا است که آن را با

$X_i(t)$ نشان می‌دهیم. بنابراین n تا جواب $\{X_1(t),\dots,X_n(t)\}$ داریم که مستقل هستند. (زیرا در زمان t_0 مستقل خطی هستند)

اکنون نشان می‌دهیم هر جواب دیگر معادله $\dot{X}=A(t)X$ ترکیب خطی این n جواب است. اگر $Y(t)$ جواب دیگری باشد

$$Y(t_0)=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=c_1e_1+c_2e_2+\dots+c_ne_n=c_1X_1(t_0)+\dots+c_nX_n(t_0)$$

تابع $c_1X_1(t)+\dots+c_nX_n(t)$ نیز جواب دستگاه است که در زمان t_0 برابر $Y(t_0)$ شده است. بنابر قضیه وجود و یکتایی باید برای هر t

$$Y(t)=c_1X_1(t)+\dots+c_nX_n(t)$$

دستگاه خطی با ضرایب ثابت $\quad \dot{X} = AX$

A یک ماتریس $n\times n$ ثابت است

به دنبال پیدا کردن n جواب مستقل برای این دستگاه هستیم.

حدس اولیه برای جواب توابع به صورت $X(t) = e^{\lambda t} V$ است که $\lambda \in \mathbb{R}$ و $V \in \mathbb{R}^n$ ثابت هستند که با جایگذاری در معادله تعیین می‌شوند.

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} v_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t} v_n \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{X} = \begin{bmatrix} \lambda e^{\lambda t} v_1 \\ \vdots \\ \lambda e^{\lambda t} v_n \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} V$$

$$AX = A(e^{\lambda t} V) = e^{\lambda t} AV$$

$AV = \lambda V \iff$ $X = e^{\lambda t} V$ جواب $\dot{X} = AX$ است

تعریف - مقدار $\lambda\in\mathbb{R}$ را مقدار ویژه ماتریس A گوییم هرگاه بردار ناصفر $0\neq V\in\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که $AV=\lambda V$.

یا به طور معادل $(A-\lambda I)V=0$. بردار V را بردار ویژه متناظر λ می‌نامیم.

λ مقدار ویژه است $\Leftrightarrow$ ماتریس $A-\lambda I$ وارون‌ناپذیر باشد $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I)=0$

عبارت $\det(A-\lambda I)$ یک چندجمله‌ای درجه n برحسب λ است که به آن چندجمله‌ای مشخصه گفته می‌شود. ریشه‌های این چندجمله‌ای مشخصه مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

مثال- $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda&1\\4&1-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)^2-4$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow 1-\lambda=\pm 2 \Rightarrow \lambda=3\,,\,-1$$

$$AV^1=3V^1 \Rightarrow (A-3I)V^1=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-2&1\\4&-2\end{pmatrix}V^1=0 \Rightarrow V^1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$x_1(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ یک جواب $\dot{X}=AX$ است.

$$AV^2 = -V^2 \Rightarrow (A+I)V^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} V^2 = 0 \Rightarrow V^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

در نتیجه همه جواب‌های معادله $\dot{X} = AX$ به صورت زیر هستند:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

فرض کنیم بخواهیم دستگاه $\dot{X} = AX$ با شرط اولیه $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ حل کنیم. باید مقادیر c_1 و c_2 را پیدا کنیم که

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 3/4,\ c_2 = 1/4$$

مثال- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$0 = \det(A - \lambda I) = (\lambda+1)^2 (2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2, \lambda_3 = -1$ مقادیر ویژه این ماتریس هستند.

بردار ویژه متناظر $\lambda_1 = 2$ $\quad (A - 2I) V^1 = 0 \Rightarrow V^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

بردار ویژه متناظر $\lambda_{2,3} = -1$ $\quad (A + I) V^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u + v + w = 0$

$$V^2 = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -u-v \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

متناظر $\lambda_2, \lambda_3 = -1$ دو بردار ویژه مستقل $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ وجود دارد.

$$X_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_3(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$